

ГЛОБАЛНИ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНИ МОДЕЛИ/Аутор:
Олег Одаловић, сарадници: Сања Грекуловић,
Ивана Васиљевић
-80 стр. Прилози стр. 81-86.

Универзитет Београд, Грађевински факултет,
2018
ISBN: 978-86-7518-214-6

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ



Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

ГЛОБАЛНИ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНИ МОДЕЛИ
GLOBAL GEOPOTENTIAL MODELS

Аутор
Олег Одаловић

Сарадници на изради
Сања Грекуловић и Ивана Васиљевић

Београд, 2018.

Предговор

Preface

Ова уџбеник написан је сагласно плану и програму предмета ГЛОБАЛНИ ГЕОПОТЕНЦИЈАЛНИ МОДЕЛИ на мастер студијама, смера Геодезија, Грађевинског факултета Универзитета у Београду, са циљем да се примена глобалних геопотенцијалних модела у што већој мери приближи студентима.

Уџбеник садржи 9 поглавља при чему је прво поглавље посвећено основама теорије физичке геодезије и то онај део који се односи на сфернохармонијски развој реалног и нормалног потенцијала Земљине теже и теже Нормалне Земље, респективно. Од другог до петог поглавља детаљно је описан начин примене глобалних модела при одређивању аномалија убрзања, аномалија висина, поремећајног убрзања и компоненти одступања вертикале. Посебна пажња у оквиру ових поглавља посвећена је и значењу и значају резолуције глобалних модела. У шестом и седмом поглављу приказани су само неки од напредних аспеката коришћења глобалних модела и начини процене њиховог квалитета као што су: варијансе степена глобалних модела, грешке варијанси степена глобалних модела, алтернативни начини примене глобалних модела путем самих дефиниција функционала аномалијског потенцијала. У осмом поглављу дате су теоријске поставке и илустративни пример прилагођавања глобалног модела, сагласно терестричким подацима који су на располагању. Девето поглавље у потпуности је посвећено поступку комбиновања глобалних геопотенцијалних модела у прецесу одређивања квазигеоида или геоида центиметраске тачности, а посебна пажња посвећена је remove-restore методи.

Сви прорачуни приказани у оквиру уџбеника урађени су коришћењем низа глобалних геопотенцијалних модела и терестричких података са територије Србије који су били на располагању: гравиметријског премера, дискретних вредности аномалија висина и дигиталног модела терена резолуције једне лучне секунде.

Београд, 2018. године.

Аутор са сарадницима

Садржај

Предговор

1 Сферно хармонијски развој

потенцијала силе Земљине теже

The potential of the Earth in terms of spherical harmonics	1
1.1 Сила Земљине теже	
Gravity	2
1.2 Потенцијал силе Земљине теже	
The gravity potential of the earth	3
1.3 Потенцијал убрзања силе Земљине теже	
The force and acceleration	4
1.4 Нивоске површи и линије сила	
Level surface and plumb line	4
1.5 Спољашњи и унутрашњи потенцијал убрзања силе Земљине теже	
LaPlace's and Poisson's Equations	6
1.6 Проблеми граничних вредности теорија потенцијала	
Boundary Value Problems	8
1.7 Решења Лапласове једначине применом Фуријеове методе раздвајања променљивих	
Solution of Dirichlet's Problem by Means of spherical harmonics	10
1.8 Нормални потенцијал	
The gravity field of the level ellipsoid	13
1.9 Нормални потенцијал у функцији сферних хармоника	
Expansion of the normal potential in spherical harmonics	14
1.10 Аномалијски потенцијал	
Anomalous gravity field	15

1.11	Аномалијски потенцијал у функцији сферних хармоника Series expansions of the anomalous gravity field	17
1.12	Функционали аномалијског потенцијала Linear functionals of the anomalous field	17
2	Глобални геопотенцијални модели Global geopotential models	19
2.1	Међународни сервис за поље силе Земљине теже The International Gravity Field Service	21
2.2	Преузимање глобалних модела са интернет стране ICGEM Downloading the global model	22
2.3	Референтни нормални потенцијал и усаглашавање кофицијената глобалног модела Reference potential and the scale difference	25
2.4	Глобални модели и третман плима тела Земље Global models and permanent tides	27
3	Одређивање аномалија убрзања применом глобалних модела Gravity anomaly determination by global geopotential models	28
3.1	Одређивање аномалије убрзања применом глобалних модела Gravity anomaly determination by global geopotential models - one point example	30
3.2	Терестрички подаци на локалном подручју Terrestrial data in the local area	31
3.3	Примена глобалних модела на локалном подручју Gravity anomaly determination in local areas	34
3.4	Резолуција глобалног модела The resolution of the global models	36
4	Одређивање аномалија висина применом глобалних модела Anomaly height determination by global geopotential models	42
4.1	Одређивање аномалије висина применом глобалних модела One point example	44
4.2	Терестрички подаци на локалном подручју Terrestrial data in the local area	44
4.3	Примена глобалних модела на локалном подручју Height anomaly determination in local areas	47
4.4	Аномалије висина и резолуција модела Height anomaly and the global model resolution	48
5	Одређивање поремећајног убрзања и угла одступања вертикале	

применом глобалних модела	52
Gravity disturbance and the deflection of the vertical determination by global models	52
5.1 Одређивање поремећајног убрзања	
Gravity disturbance	53
5.2 Одређивање компоненти одступања вертикале	
Deflection of the vertical	55
6 Варијансе степена и грешке варијанси степена глобалних модела	56
Degree Variances and Error Degree Variances of the global geopotential models	56
6.1 Варијансе степена и грешке варијанси степена	
Degree Variances and Error Degree Variances	57
6.2 Примена за моделе EGM96 и GGM05c	
Degree Variances and Error Degree Variances of the global models EGM96 and GGM05c	57
7 Глобални модели и дефиниције функционала	60
Global geopotential models and definitions of linear functionals of the anomalous field	60
7.1 Аномалија убрзања	
Gravity anomaly	61
7.2 Аномалија висина	
Height anomaly	62
8 Прилагођавање глобалних модела	64
Tailoring of the global geopotential models	64
8.1 Теоријске основе прилагођавања модела	
Theoretical background	65
8.2 Прилагођавање модела EGM96	
Tailoring of the EGM96	66
9 Примена глобалних модела у процесу одређивања референтних геодетских површи	69
Geodetic reference surfaces and the global geopotential models	69
9.1 Физичка површ Земље, сфера, обртни елипсоид, геоид, нивоски елипсоид и квазигеоид	
Physical surface of the earth, sphere, ellipsoid, ellipsoid of the revolution, geoid, level ellipsoid and quasigeoid	70
9.2 Одређивање квазигеоида применом глобалних модела	
Quasigeoid determination and global geopotential models	74
9.3 Одређивање геоида применом глобалних модела	
Geoid determination and global geopotential models	75
9.4 Одређивање квазигеоида/геоида центиметарске тачности	
Geoid and quasigeoid - centimeter accuracy solutions	76
Литература	80

A	Лежандрове функције и полиноми	83
	Legendre functions and polynomials	83
A.1	Лежандрове функције	
	Legendre functions	83
A.2	Лежандрови полиноми	
	Legendre polynomials	84
A.3	Рекурентне релације	
	Recurrence relations	85

Списак слика

1.1	Вектор силе Земљине теже	2
1.2	Нивоске површи и вертикале	5
1.3	Геоид и одсечак вертикале као висина тачке на физичкој површи Земље	6
1.4	Гранични проблеми	9
1.5	Сферне координате	11
1.6	Нормална Земља	14
2.1	Део интернет стране ICGEM	22
2.2	Део интернет стране ICGEM са списком глобалних модела	23
2.3	Део архиве модела GOCO03s	24
3.1	Вектори реалног и нормалног убрзања на физичкој површи Земље и телуроиду	29
3.2	Распоред тачака гравиметријског премера Србије	31
3.3	Распоред тачака дела гравиметријског премера Србије	32
3.4	Општи облик површи аномалија слободног ваздуха (јединице mgal, еквидистанца 20 mgal)	33
3.5	Општи облик аномалија убрзања одређених применом модела GOG03s (јединице mgal, еквидистанца 20 mgal)	34
3.6	Општи облик разлика $R^{\Delta g^{GOCO03s} - \Delta g}$ (јединице mgal, еквидистанца 20 mgal)	35
3.7	Општи облик топографских маса на територији Србије	36
3.8	Подела физичке површи Земље на квазиквадрате Δ	37
3.9	Општи облик аномалија убрзања одређених применом модела EGM2008 (јединице mgal, еквидистанца 20 mgal)	38
3.10	Општи облик разлика $R^{\Delta g^{EGM2008} - \Delta g}$	39
3.11	Хистограм разлика $R^{\Delta g^{EGM2008} - \Delta g}$	40
4.1	Телуроид, нормална висина (H_P^N) и аномалија висине (ζ)	43
4.2	Мрежа нивелмана високе тачности СФРЈ	45
4.3	Просторни распоред тачака Референтне мреже Србије (SREF)	45

4.4	Графички прикази терестрички одређених аномалија висина (јединице m, еквидистанца 0.20 m)	46
4.5	Графички прикази резултата одређених применом модела GOCO03s (јединице m, еквидистанца 0.20 m)	47
4.6	Графички прикази резултата одређених применом модела EGM2008 (јединице m, еквидистанца 0.20 m)	49
4.7	Општи облик површи $R^{\zeta^{EGM2008}-\zeta}$ (јединице m, еквидистанца 0.05 m)	50
5.1	Вектори реалног и нормалног убрзања	53
5.2	Општи облик површи поремећајног убрзања (јединице mgal, еквидистанца 20 mgal)	54
5.3	Векторски приказ угла одступања вертикале (јединице лучна секунда)	55
6.1	Степене варијансе и грешке варијанси степена аномалија висина/ундулација геоида одређене на основу података модела EGM96 и GGM05c	58
6.2	Графички прикази разлика $R^{\zeta^{EGM96}-\zeta}$ и $R^{\zeta^{GGM05c}-\zeta}$ (јединице m, еквидистанца 0.20 m)	59
7.1	Поступак одређивања тачке Q	62
9.1	Физичка површ Земље, геоид, квазигеоид, нивоски елипсоид, ортометријска (H_P^O), нормална (H_P^N) и елипсоидна висина (h), ундулација геоида (N) и аномалија висине (ζ)	73
9.2	Хистограм разлика $R^{\zeta^{EGM2008}-\zeta}$	75
9.3	Општи облик површи разлика геоида и квазигеоида (еквидистанца 1 cm)	76
9.4	Remove-restore метода	79
A.1	Лежандрови полиноми за 1, 3 и 5	84
A.2	Лежандрови полиноми за 0, 2 и 4	85

Списак табела

3.1	Основни статистички подаци Δg ($n=4083$)	33
3.2	Основни статистички подаци $\Delta g^{\text{GOCO03s}}$ ($n=4083$)	34
3.3	Основни статистички подаци разлика $R^{\Delta g^{\text{GOCO03s}}-\Delta g}$ ($n=4083$)	35
3.4	Однос резолуције и степена глобалног модела	37
3.5	Основни статистички подаци $\Delta g^{\text{EGM2008}}$ ($n=4083$)	38
3.6	Основни статистички подаци разлика $R^{\Delta g^{\text{EGM2008}}-\Delta g}$ ($n=4083$)	39
4.1	Основни статистички подаци ζ ($n=1073$)	46
4.2	Основни статистички подаци ζ^{GOCO03s} и $R^{\zeta^{\text{GOCO03s}}-\zeta}$ ($n=1073$)	48
4.3	Основни статистички подаци ζ^{EGM2008} и $R^{\zeta^{\text{EGM2008}}-\zeta}$ ($n=1073$)	49
5.1	Основни статистички подаци $\delta g^{\text{GOCO03s}}$ ($n=4083$)	54
5.2	Основни статистички подаци ξ^{GOCO03s} и η^{GOCO03s} ($n=4083$)	55
6.1	Основни статистички подаци $R^{\zeta^{\text{EGM96}}-\zeta}$ и $R^{\zeta^{\text{GGM05c}}-\zeta}$ ($n=1073$)	59
8.1	Основни статистички подаци $\Delta \zeta$ у итерацијама (број разлика 1073)	67
9.1	Сумарни основни статистички подаци $\Delta \zeta$ у итерацијама при одређивању квазигеоида (број разлика 1073)	74
9.2	Основни статистички подаци разлика геоида и квазигеоида ($n=143246$)	76
A.1	Лежандрове функције за $n, m = 1, \dots, 3$	83
A.2	Лежандрови полиноми за $n = 1, \dots, 3$	84

Сферно хармонијски развој потенцијала силе Земљине теже

The potential of the Earth in terms of spherical harmonics

1.1 Сила Земљине теже

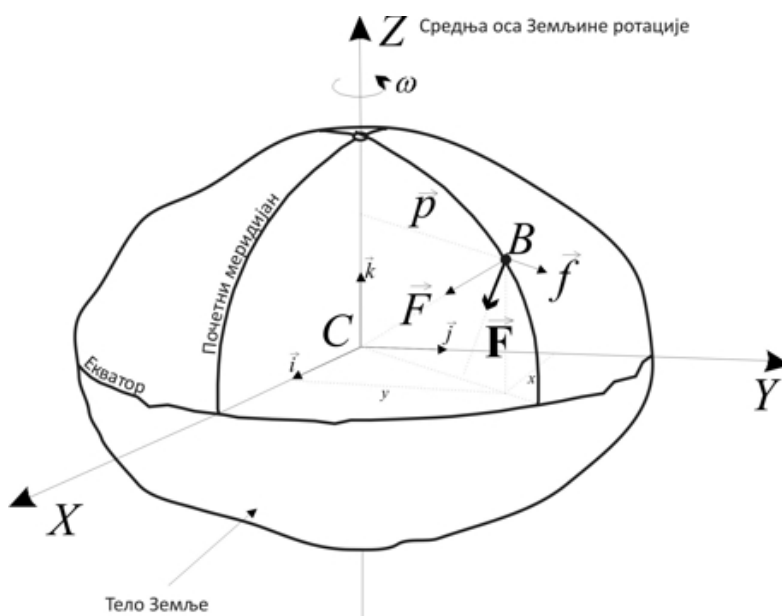
Gravity

На тело B , масе m_B , које се налази на физичкој површи Земље и које учествује у Земљиној ротацији, делују две силе (Слика 1.1):

- гравитациона сила тела Земље (\vec{F})
- и центрифугална сила која настаје као последица ротације Земље (\vec{f}).

Збир наведене две силе назива се *силом Земљине теже*:

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{F} + \vec{f}. \quad (1.1)$$



Слика 1.1: Вектор силе Земљине теже

У геоцентричном координатном систему изрази за наведене силе дати су следећим једначинама, респективно (Heiskanen & Moritz, 1967):

$$\vec{F} = m_B G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_B|^3} (\vec{r} - \vec{r}_B) d\Omega, \quad (1.2)$$

$$\vec{f} = m_B \vec{p} \omega^2, \quad (1.3)$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1.4)$$

где је G универзална гравитациона константа, Ω подручје интеграције (тело Земље масе M), \vec{r} радијус вектор, \vec{r}_B радијус вектор тела B , ρ густина елемента масе тела Земље чији је положај дефинисан радијус вектором \vec{r} , ω угаона брзина Земљине ротације,

а x и y правоугле геоцентричне координате тачке у којој се налази тело B . Правац вектора \vec{r} је правац који је увек управан на осу Земљине ротације.

Ако се свакој тачки простора придружи вектор силе Земљине теже дефинисан са (1.1) може се рећи да је наведеним придруживањем дефинисано *векторско поље силе Земљине теже*.

Приказане једначине важе под следећим условима:

- тело Земље је круто тело
- и ван тела Земље не постоји било које друго тело (било која друга маса), као ни маса Земљине атмосфере.

1.2 Потенцијал силе Земљине теже

The gravity potential of the earth

Потенцијалом силе Земљине теже ($W_{\vec{F}}$) назива се скаларна функција облика:

$$W_{\vec{F}} = V + \Phi, \quad (1.5)$$

где је V потенцијал гравитационе силе тела Земље, а Φ потенцијал центрифугалне силе Земљине ротације.

Ако се свакој тачки простора придружи скалар дефинисан са (1.5) може се рећи да је наведеним придруживањем дефинисано *скаларно поље силе Земљине теже*.

У геоцентричном координатном систему изрази за наведене потенцијале, у скаларном облику, дати су следећим једначинама:

$$V = V(x, y, z) = m_B G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{r} dx dy dz, \quad (1.6)$$

$$\Phi = \Phi(x, y, z) = \Phi(x, y) = m_B \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2). \quad (1.7)$$

Коришћењем потенцијала једноставно је доћи до релација које дефинишу гравитациону и центрифугалну силу, респективно:

$$\vec{F} = \nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad (1.8)$$

$$\vec{f} = \nabla \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, 0 \right), \quad (1.9)$$

где је симболом ∇ („набла“) означен градијент скаларног поља.

Такође важи и релација:

$$\vec{F} = \nabla W_{\vec{F}} = \left(\frac{\partial W_{\vec{F}}}{\partial x}, \frac{\partial W_{\vec{F}}}{\partial y}, \frac{\partial W_{\vec{F}}}{\partial z} \right), \quad (1.10)$$

или речима, вектор силе Земљине теже је градијент скаларног поља $W_{\vec{F}}$.

1.3 Потенцијал убрзања силе Земљине теже

The force and acceleration

Силу дефинисану изразом (1.1) могуће је приказати у облику производа масе и убрзања

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}_B) = \vec{g}(\vec{r}_B)m_B, \quad (1.11)$$

при чему је убрзање Земљине теже следећег облика

$$\vec{g} = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{r} dx dy dz + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2). \quad (1.12)$$

Из (1.11) може се закључити да се векторско поље силе и векторско поље убрзања међусобно разликују само по фактору размере, по маси m_B , одакле следи да је изучавање геометријских особина векторског поља силе могуће у потпуности ослонити на изучавање геометријских особина векторског поља њеног убрзања.

Исти закључак може се извести и за скаларно поље силе: изучавање скаларног поља силе Земљине теже може се у потпуности ослонити на изучавање скаларног поља њеног убрзања:

$$W = V + \Phi, \quad (1.13)$$

где су

$$V = V(x, y, z) = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{r} dx dy dz, \quad (1.14)$$

$$\Phi = \Phi(x, y, z) = \Phi(x, y) = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2). \quad (1.15)$$

Упоређењем (1.6) и (1.7) са (1.14) и (1.15), респективно, очигледна је међусобна разлика само по размери коју дефинише скалар m_B .

Као и у случају потенцијала силе Земљине теже и за потенцијал његовог убрзања важи релација:

$$\vec{g} = \nabla W = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right). \quad (1.16)$$

1.4 Нивоске површи и линије сила

Level surface and plumb line

При проучавању потенцијала убрзања W користе се *нивоске површи* и *линије сила* или *вертикале*.

Нивоске или еквипотенцијалне површи су површи дуж којих нема промене потенцијала:

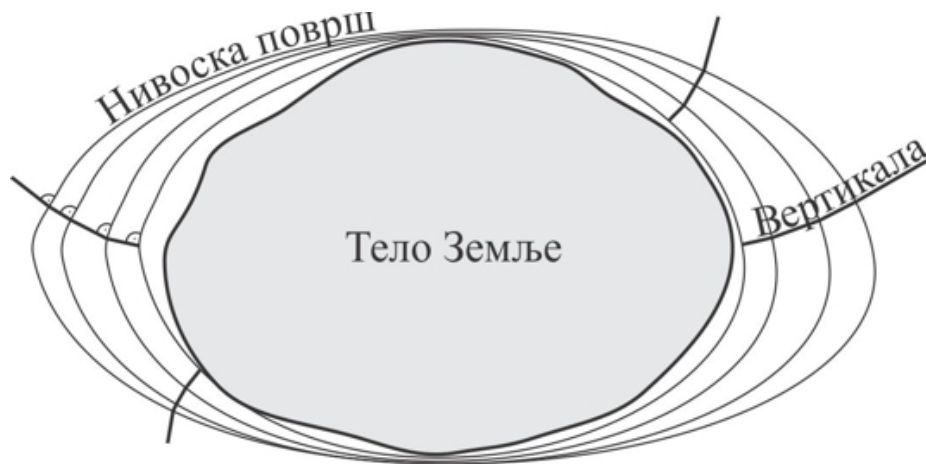
$$W(x, y, z) = C = const. \quad (1.17)$$

а вертикале линије које имају особину да се правац тангенте у свакој њиховој тачки поклапа са правцем градијента скаларног поља тј. са правцем вектора убрзања силе

Земљине теже.

За нивоске површи и вертикале, као и за њихов међусобни геометријски однос најзначајније је навести следеће (Слика 1.2) (Vaniček, 1982):

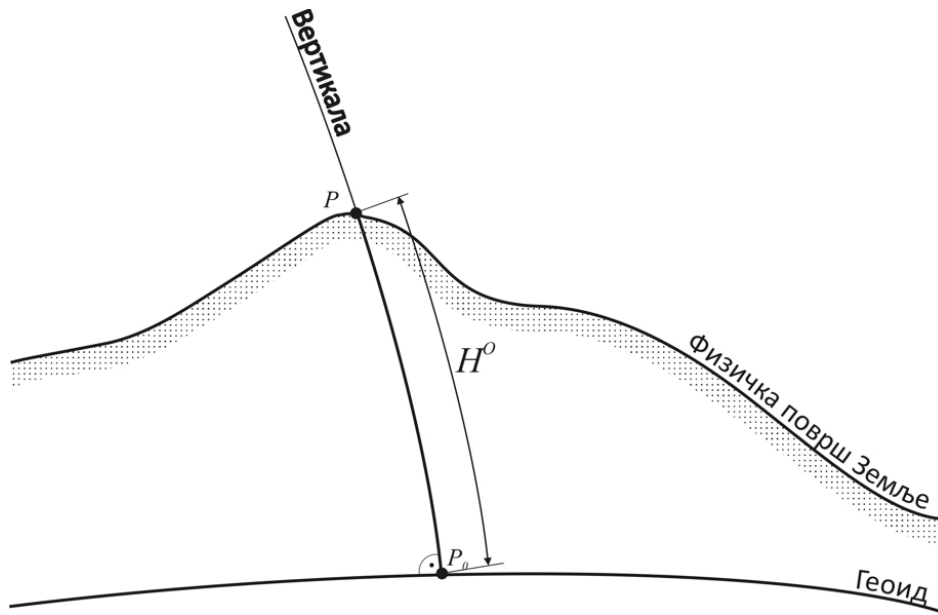
- вертикале су увек управне на нивоске површи,
- вертикале су просторне криве које су двоструко закривљене (поседују и флексију и торзију),
- због непрекидне промене силе теже следи непрекидна промена растојања између нивоских површи, односно, нивоске површи међусобно конвергирају од екватора ка половима,
- најкраће растојање између две произвољно блиске нивоске површи представља одсечак вертикале који је истовремено управан на обе нивоске површи, одакле се, с обзиром на непаралелност нивоских површи, може закључити да је вертикала просторна крива,
- нивоске површи никада се не пресецају нити додирују и
- кроз сваку тачку вертикале пролази по једна нивоска површ.



Слика 1.2: Нивоске површи и вертикале

Управо нивоске површи и вертикале користе се при дефинисању висина у геодезији. Висине које се одређују комбинацијом резултата опажања геометријског нивелмана и резултата опажања убрзања силе Земљине теже називају се *физичким висинама*. При њиховом дефинисању као референтна површ користи се нивоска површ која се поклапа са средњом идеално мирном површином мора и океана и која се назива *геоид* (Слика 1.3):

$$W(x, y, z) = W_0 = const. \quad (1.18)$$



Слика 1.3: Геоид и одсечак вертикале као висина тачке на физичкој површи Земље

Геоид има велики значај не само у теорији и применама геодезије, већ и у другим научним дисциплинама.

1.5 Спољашњи и унутрашњи потенцијал убрзања силе Земљине теже

LaPlace's and Poisson's Equations

Потенцијал убрзања Земљине теже је непрекидна функција у целом простору, као и његови први парцијални изводи. Међутим, други парцијални изводи потенцијала W имају прекид.

У делу простора ван маса тела Земље, у спољашњем простору, збир других парцијалних извода потенцијала убрзања једнак је:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 2\omega^2, \quad (1.19)$$

док је у тачкама самог тела Земље, у унутрашњем простору, дефинисан једначином

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -4G\pi\rho(x, y, z) + 2\omega^2. \quad (1.20)$$

Из свега наведеног следи да други парцијални изводи потенцијала убрзања садрже прекид и то у тачкама физичке површи Земље.

Анализом потенцијала убрзања кроз друге парцијалне изводе збира гравитационог и

центрифугалног потенцијала следи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2(V + \Phi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(V + \Phi)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(V + \Phi)}{\partial z^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Усвајањем оператора

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1.22)$$

који се назива *Лапласовим оператором*, једначину (1.21) могуће је записати у облику:

$$\Delta W = \Delta V + \Delta \Phi, \quad (1.23)$$

где су

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad (1.24)$$

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (1.25)$$

Упоредњем (1.19) и (1.20) са (1.24) и (1.25) следи:

- за тачке у спољашњем простору

$$\Delta V = 0, \quad \Delta \Phi = 2\omega^2, \quad (1.26)$$

- а за тачке у унутрашњем простору

$$\Delta V = -4G\pi\rho(x, y, z), \quad \Delta \Phi = 2\omega^2, \quad (1.27)$$

одакле је очигледно да прекид других извода потенцијала W настаје као последица присуства гравитационог потенцијала V .

Збир других парцијалних извода центрифугалног потенцијала је аналитичка функција једноставног облика и у потпуности је познат у свакој тачки простора, ако је позната угаона брзина Земљине ротације ω .

Са друге стране, збир других парцијалних извода гравитационог потенцијала је далеко сложенија функција при чему је:

- једначину $\Delta V = 0$ могуће решити и одредити функцију V у свим тачкама спољашњег простора,
- док за једначину $\Delta V = -4G\pi\rho(x, y, z)$ није могуће одредити решење јер густина $\rho(x, y, z)$ није позната у свакој тачки унутрашњег простора, односно у свакој тачки тела Земље.

Из наведених разлика анализа потенцијала W дели се на анализу *спољашњег* и *унутрашњег* потенцијала, при чему се посебна пажња посвећује спољашњем гравитационом потенцијалу који задовољава једначину $\Delta V = 0$.

Потребно је напоменути и следеће:

- свака функција V која задовољава једначину $\Delta V = 0$ назива се *хармонијском функцијом*,
- сама једначина $\Delta V = 0$ назива се *Лапласовом једначином*,
- а једначина $\Delta V = -4G\pi\rho(x, y, z)$ једначином *Пуасона (Поасона)*.

1.6 Проблеми граничних вредности теорија потенцијала

Boundary Value Problems

Као што је већ напоменуто једначину $\Delta V = 0$ могуће је решити и добити њено опште решење за све тачке спољашњег простора. У геодетским разматрањима посебно су битна она решења, издвојена из општег решења, која на унапред задатим површима задовољавају такође унапред задате вредности - *граничне вредности*.

Поступак одређивања функције V која задовољава парцијалну једначину другог реда $\Delta V = 0$ и која на унапред задатој површи задовољава задате (познате) вредности, назива се *решавање проблема граничних вредности теорије потенцијала*.

Од свих могућих проблема граничних вредности које је могуће поставити посебно се издвајају три проблема:

- *Дирихлеов проблем* или *први проблем граничних вредности теорије потенцијала*,
- *Нојманов проблем* или *други проблем граничних вредности теорије потенцијала*,
- *Комбиновани проблем* или *трећи проблем граничних вредности теорије потенцијала*.

Ако је тело Ω , тело чија маса генерише позенцијал V , у потпуности окружено затвореном површи S (Слика 1.4), онда се Дирихлеов проблем своди на одређивање оне функције V која је решење парцијалне диференцијалне једначине $\Delta V = 0$ и која на површи S има унапред задате вредности V_S . Другим речима, решавање Дирихлеовог проблема подразумева:

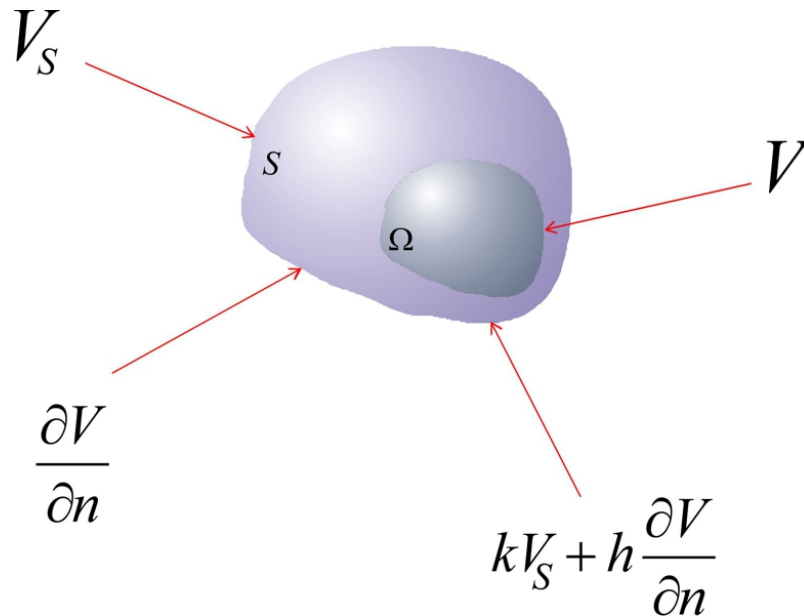
- одређивање гравитационог потенцијала V који генерише маса тела Ω ,
- путем решавања парцијалне диференцијалне једначине $\Delta V = 0$ добијањем њених општих решења,
- и издвајањем оних решења која на S имају вредности једнаке задатим вредностима V_S .

Нојманов или други проблем граничних вредности је одређивање гравитационог потенцијала тела Ω , односно оне функције V која представља решење парцијалне диференцијалне једначине $\Delta V = 0$ која на површи S има вредности које су једнаке вредностима првих парцијалних извода саме функције V у правцу спољашње нормале на површ S . Другим речима:

- одредити гравитациони потенцијал V који генерише маса тела Ω ,
- путем решавања парцијалне диференцијалне једначине $\Delta V = 0$,
- и одабирањем оних функција V које на S имају вредности једнаке задатим вредностима $\partial V/\partial n$.

Трећи гранични проблем, сагласно свему наведеном, могуће је поставити на следећи начин:

- одредити гравитациони потенцијал V које генерише маса тела Ω ,
- путем решавања парцијалне диференцијалне једначине $\Delta V = 0$
- и одабирањем оних функција V које на S имају вредности једнаке задатим вредностима комбинације $kV_S + h(\partial V/\partial n)$, где су h и k константе из скупа реалних бројева.



Слика 1.4: Гранични проблеми

У случају Дирихлеовог проблема јединственост решења дата је Стоксовом теоремом: *Функција која је хармонијска ван S може се једнозначно одредити из њених вредности познатих на површи S , а егзистенција таквог решења доказана је путем теореме која се назива Дирихлеов принцип (Heiskanen & Moritz, 1967).*

1.7 Решења Лапласове једначине применом Фуријеове методе раздвајања променљивих

Solution of Dirichlet's Problem by Means of spherical harmonics

Фуријеова метода раздвајања променљивих базира се на одређивању функције V у облику производа три независне функције f , g и h и то у произвољно изабраним ортогоналним координатама x_1, x_2 и x_3 :

$$V(x_1, x_2, x_3) = f(x_1)g(x_2)h(x_3). \quad (1.28)$$

Како је дужина лука у произвољним ортогоналним координатама дата једначином:

$$ds^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2, \quad (1.29)$$

а Лапласова једначина са

$$\Delta V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial x_3} \right) \right] = 0, \quad (1.30)$$

заменом (1.29) у (1.30) добијају се три обичне диференцијалне једначине другог реда, чија је решења релативно лако одредити и на тај начин добити општа решења једначине $\Delta V = 0$.

Посебно је значајно одредити решења Лапласове једначине у сферним координатама: радијус вектору r , поларном растојању θ и лонгитуди λ (Слика 1.5), чији је однос са правоуглим координатама дефинисан изразима:

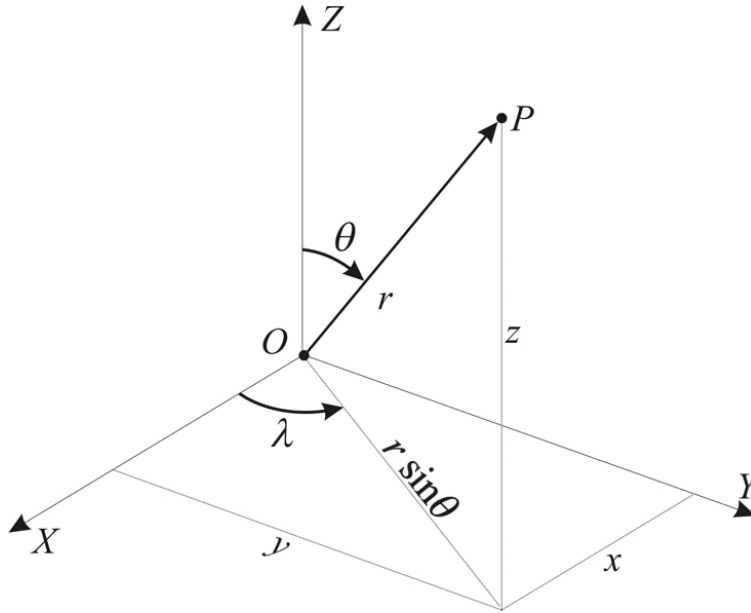
$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \lambda, \\ y &= r \sin \theta \sin \lambda, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.31)$$

У сферним координатама једначине (1.28), (1.29) и (1.30) имају следећи облик:

$$V(r, \theta, \lambda) = f(r)g(\theta)h(\lambda), \quad (1.32)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\lambda^2, \quad (1.33)$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (1.34)$$



Слика 1.5: Сферне координате

Заменом (1.32) у (1.34) добијају се диференцијалне једначине другог реда:

$$\begin{aligned}
 r^2 f'' + 2r f' - n(n+1)f &= 0, \\
 \sin \theta g'' + \cos \theta g' + \left[n(n+1) - m^2 \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] g &= 0, \\
 h'' + m^2 h &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

чија су решења редом:

$$\begin{aligned}
 f(r) &= r^n, & f(r) &= \frac{1}{r^{n+1}}, \\
 g(\theta) &= P_{nm}(\cos \theta), \\
 h(\lambda) &= \cos m\lambda, & h(\lambda) &= \sin m\lambda,
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

где су m и n позитивне целобројне вредности такве да је $0 \leq n < \infty$ и $0 \leq m \leq n$ и где су са $P_{nm}(\cos \theta)$ означене *Лежандрове функције*, које се за $t = \cos \theta$ могу приказати у облику:

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2-1)^n. \tag{1.37}$$

Комбиновањем наведених решења, сагласно са (1.32), могуће је записати решења Лапласове једначине у сферним координатама:

- за тачке у простору унутар површи S

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n [A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(t), \tag{1.38}$$

- и за тачке у простору ван површи S

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n [A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(t). \quad (1.39)$$

За овако добијена решења за потенцијал убрзања гравитационе силе Земље често се каже да је потенцијал приказан у *функцији сферних хармоника*.

Уместо израза (1.39) у сателитској динамици решење за простор ван сфере често се приказује у облику (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(t) \right\}, \quad (1.40)$$

где су за $n \neq 0$,

$$C_{nm} = \frac{A_{nm}}{GMa^n}, \quad (1.41)$$

$$S_{nm} = \frac{B_{nm}}{GMa^n}, \quad (1.42)$$

и где је a средњи полупречник Земље у равни екватора, а у практичним применама у геодезији најчешће се користе ортонормирани коефицијенти и ортонормиране Лежандрове функције:

$$\bar{C}_{n0} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} C_{n0}, \quad (1.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(2n+1)(n-m)!}} \left\{ \begin{array}{c} C_{nm} \\ S_{nm} \end{array} \right\}, \quad (m \neq 0) \quad (1.44)$$

$$\bar{P}_{n0} = \sqrt{2n+1} P_{n0}(t), \quad (1.45)$$

$$\bar{P}_{nm} = \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}} P_{nm}(t). \quad (1.46)$$

Решења (1.38) и (1.39) представљају општа решења Лапласове једначине. Ако се за површ S усвоји сфера плупречника R и ако су на њој задате (познате) вредности:

$$V_S = V(R, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(t), \quad (1.47)$$

могуће је из општих решења одредити она која на сфери имају вредности V_S , односно она која представљају решење Дирихлеовог проблема за задате (познате) вредности на сфери:

- за тачке у простору унутар сфере

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \sum_{m=0}^n [A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(t) \quad (1.48)$$

- и за тачке у простору ван сфере

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(t). \quad (1.49)$$

Коришћењем сферних координата центрифугални потенцијал може бити записан у облику:

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (1.50)$$

1.8 Нормални потенцијал

The gravity field of the level ellipsoid

Нормални потенцијал је потенцијал убрзања теже тела чија је физичка површ обртни елипсоид, чија је унутрашњост у потпуности испуњена масом (Слика 1.6). Маса која испуњава елипсоид једнака је маси Земље, а центар масе поклапа се са центром масе Земље. Заједно са Земљом Нормална Земља ротира угаоном брзином Земљине ротације око средње осе Земљине ротације, односно мале осе елипсоида. Распоред маса је тако одабран да нормални потенцијал поседује ротациону симетрију.

Обртни елипсоид је у геоцентричном координатном систему у потпуности дефинисан својом великом (a_U) и малом полуосом (b_U) путем релације:

$$\frac{x^2 + y^2}{a_U^2} + \frac{z^2}{b_U^2} = 1. \quad (1.51)$$

На овај начин дефинисано тело често се назива *Нормалном Земљом*, а нормални потенцијал *нормалним пољем*. Након увођења нормалног потенцијала, потенцијал убрзања Земљине теже често се назива *реалним потенцијалом*.

Нормални потенцијал дефинише се скаларном функцијом:

$$U = U(\vec{r}_B) = U(x_B, y_B, z_B), \quad (1.52)$$

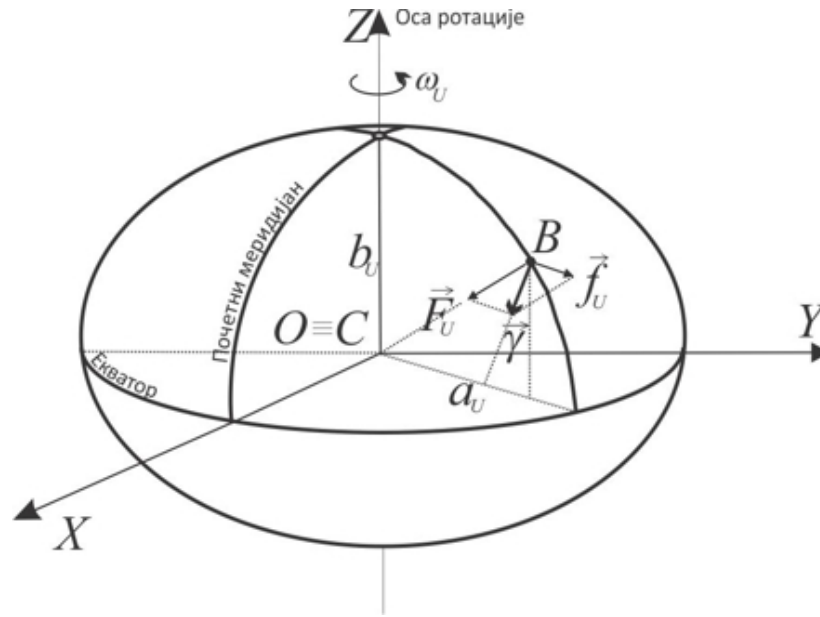
а његов градијент назива се *нормалним убрзањем*:

$$\vec{\gamma} = \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right). \quad (1.53)$$

Као и у случају реалног потенцијала, геометријске особине нормалног потенцијала изучавају се применом нивоских површи и линија сила, али у овом случају линија сила које се у геодезији називају *нормалне вертикале*.

Нормалне вертикале су закривљене само у равни меридијана, а сам елипсоид као физичка површ Нормалне Земље у исто време је и нивоска површ нормалног потенцијала:

$$U(x, y, z) = U_0 = const. \quad (1.54)$$



Слика 1.6: Нормална Земља

1.9 Нормални потенцијал у функцији сферних хармоника

Expansion of the normal potential in spherical harmonics

Као и у случају реалног потенцијала, потенцијал убрзања Нормалне Земље може се третирати путем гравитационог потенцијала који генерише маса Нормалне Земље и центрифугалног потенцијала који настаје као последица ротације Нормалне Земље:

$$U = V_U + \Phi_U, \quad (1.55)$$

када важе и све наведене релације у погледу спољашњег и унутрашњег потенцијала које се односе на гравитациони потенцијал реалне Земље:

- у спољашњем простору нормални гравитациони потенцијал је хармонијска функција

$$\Delta V_U = 0, \quad (1.56)$$

- док у тачкама нормалне Земље важи релација

$$\Delta V_U = -4G\pi\rho_E, \quad (1.57)$$

где је ρ_E густина маса нормалне Земље. Особина нормалног гравитационог потенцијала дата са (1.56) представља основу за решење Дирихлеовог проблема за случај када се тело Нормалне Земље у потпуности налази унутар сфере, на којој су познате вредности самог нормалног гравитационог потенцијала. Другим речима, израз (1.56) омогућава да се нормални гравитациони потенцијал представи у функцији сферних хармоника:

$$V_U = \frac{GM_U}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}^U \left(\frac{a_U}{r} \right)^{2n} P_{2n}(t) \right], \quad (1.58)$$

при чему су коефицијенти дефинисани са:

$$C_{2n}^U = (-1)^n \frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \left(1 - n + 5n \frac{C-A}{M_U E^2} \right), \quad (1.59)$$

где је e први бројни ексцентрицитет,

$$e^2 = \frac{a_U^2 - b_U^2}{b_U^2}, \quad (1.60)$$

E линеарни ексцентрицитет,

$$E^2 = a_U^2 - b_U^2, \quad (1.61)$$

а A и C су моменти инерције Нормалне Земље у односу на X и Z осе геоцентричног координатног система¹:

$$A = \iiint_E (y_B^2 + z_B^2) dM_U, \quad (1.62)$$

$$C = \iiint_E (x_B^2 + y_B^2) dM_U, \quad (1.63)$$

и где је M_U маса Нормалне Земље. Због ротационе симетрије у (1.58) постоје само чланови који зависе од n , а због симетрије у односу на екватор не постоје ни непарни чланови (Heiskanen & Moritz, 1967).

1.10 Аномалијски потенцијал

Anomalous gravity field

Нормални потенцијал се у потпуности може дефинисати путем 4 параметра (Heiskanen & Moritz, 1967), а најчешће се користе²:

- велика полуоса елипсоида a_U ,
- маса тела Нормалне Земље M_U ,
- угаона брзина ротације Нормалне Земље ω_U ,
- и динамички фактор облика Нормалне Земље C_{20}^U .

Ако се, сагласно дефиницији Нормалне Земље у претходном поглављу, усвоји да је маса Нормалне Земље једнака маси тела Земље, као и то да Нормална Земља ротира истом угаоном брзином као и реална Земља може се писати:

$$M_U = M, \quad (1.64)$$

$$\omega_U = \omega. \quad (1.65)$$

¹Ознака E у наредним једначинама односи се на област интеграције, а не на линеарни ексцентрицитет.

²Поред наведених услова поставља се још и услов да је нормални потенцијал на елипсоиду бројно једнак реалном потенцијалу на геоиду: $U_0 = W_0$.

За велику полуосу се усваја полупречник Земље у равни екватора,

$$a_U = a, \quad (1.66)$$

а за динамички фактор облика усваја се динамички фактор облика Земље C_{20} ³

$$C_{20}^U = C_{20}. \quad (1.67)$$

Овако усвојени параметри омогућавају да се однос реалног и нормалог потенцијала може приказати путем релације:

$$W \approx U. \quad (1.68)$$

Знак за приближно у претходном изразу последица је постојања разлика које постоје између тела Земље и тела Нормалне Земље, од којих је најважније споменути: постојање топографских маса⁴, распоред густина маса тела Земље, разлику облика тела Земље и тела Нормалне Земље.

Ако се усвоји да све наведене разлике генеришу гравитациони потенцијал T тада се (1.68) може записати у облику једначине:

$$W = U + T. \quad (1.69)$$

Да је T гравитациони потенцијал може се закључити на основу дефиниција реалног и нормалног потенцијала. Ако се у (1.69) реални и нормални потенцијал представе у облику збира гравитационог и центрифугалног потенцијала следи

$$V + \Phi = V_U + \Phi_U + T. \quad (1.70)$$

Како по дефиницији нормалног центрифугалног потенцијала мора бити испуњено:

$$\Phi_U = \Phi, \quad (1.71)$$

следи да је потенцијал T разлика реалног и нормалног гравитационог потенцијала:

$$T = V - V_U. \quad (1.72)$$

Потенцијал T назива се *аномалијским потенцијалом*, а с обзиром на (1.26) (1.56) следи да је аномалијски потенцијал хармонијска функција:

$$\Delta T = \Delta(V - V_U) = \Delta V - \Delta V_U = 0 - 0 = 0. \quad (1.73)$$

³Из динамичког фактора облика, који представља коефицијент сферно хармонијског развоја Земље за $n = 2$ и $m = 0$, одређује се мала полуоса елипсоида (Moritz, 1984). Ако се занемари ова чињеница за 4. параметар може се усвојити спљоштеност $f = (a-b)/a$ odakle се може срачунати мала полуоса елипсоида.

⁴У геодезији се све масе изнад геоида називају топографским масама.

1.11 Аномалијски потенцијал у функцији сферних хармоника

Series expansions of the anomalous gravity field

С обзиром на (1.40) и (1.58), а сагласно усвојеним параметрима (1.64) до (1.67), за аномалијски потенцијал у функцији сферних хармоника директно се може писати ⁵:

$$T = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(C_{nm} - C_{nm}^U) \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(t). \quad (1.74)$$

1.12 Функционали аномалијског потенцијала

Linear functionals of the anomalous field

Вега између аномалијског потенцијала и његових линеарних функционала:

- ундулације геоида (N),
- поремећајног убрзања (δg),
- аномалије убрзања (Δg),
- компоненте одступања вертикала у правцу меридијана (ξ)
- и компоненте одступања вертикала у правцу првог вертикала (η),

у сферној апроксимацији елипсоида, дате су следећим релацијама (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$N = \frac{T}{\gamma_0}, \quad (1.75)$$

$$\delta g = -\frac{\partial T}{r}, \quad (1.76)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{a}T, \quad (1.77)$$

$$\xi = \frac{1}{r\gamma_0} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{a\gamma_0} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad (1.78)$$

$$\eta = -\frac{1}{r\gamma_0 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} = -\frac{1}{a\gamma_0 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda}. \quad (1.79)$$

где је γ_0 вредност нормалног потенцијала у одговарајућој тачки на елипсоиду и где се аномалијски потенцијал односи на одговарајуће тачке на геоиду. На основу (1.74) и претходно приказаних израза следи да се функционали аномалијског потенцијала у

⁵Анализом израза путем којих су дефинисани реални и нормални потенцијал у функцији сферних хармоника, може се уочити да су чланови нултог степена у оба случаја облика GM/r одакле следи да аномалијски потенцијал неће садржати чланове нултог степена, а како је координатни систем геоцентричан неће постојати ни хармонике првог степена.

функцији сферних хармоника могу приказати путем следећих једначина:

$$N = \frac{GM}{r\gamma_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(C_{nm} - C_{nm}^U) \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(t), \quad (1.80)$$

$$\delta g = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(C_{nm} - C_{nm}^U) \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(t), \quad (1.81)$$

$$\Delta g = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(C_{nm} - C_{nm}^U) \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] P_{nm}(t), \quad (1.82)$$

$$\xi = \frac{GM}{ar\gamma_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [(C_{nm} - C_{nm}^U) \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \frac{\partial P_{nm}(t)}{\partial \theta}, \quad (1.83)$$

$$\eta = -\frac{GM}{ar\gamma_0 \sin \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [-m (C_{nm} - C_{nm}^U) \sin m\lambda + mS_{nm} \cos m\lambda] P_{nm}(t). \quad (1.84)$$

За све практичне радове довољно је узимати у обзир C_{nm}^U само за степене 2,4,6 и 8, а с обзиром на (1.58) само су C_{n0}^U различити од 0.

Глобални геопотенцијални модели

Global geopotential models

У геодезији, математичка функција која се користи за потребе апроксимирања поља убрзања Земљине теже, у простору ван тела Земље, назива се *глобални модел поља убрзања Земљине теже, глобални геопотенцијални модел* или једноставно *глобални модел* (Barthelmes, 2014).

Коришћењем ортонормираних сферних хармоника, а на основу релација приказаних у претходном поглављу, потенцијал убрзања Земљине теже може се приказати у облику:

$$W(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(t) + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (2.1)$$

а нормални потенцијал:

$$U(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a} \sum_{n=0(2)}^{\infty(8)} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \bar{C}_{nm}^U \bar{P}_{nm}(t) + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \theta. \quad (2.2)$$

У једначини (2.1) непознати чланови су коефицијенти \bar{C}_{nm} и \bar{S}_{nm} , а сви остали чланови су:

- фундаменталне физичке константе (G, M, ω) које се за потребе примене израза (2.1) могу сматрати већ одређеним
- и координате тачака (r, θ, λ) које се данас релативно лако могу одредити.

У циљу примене наведене једначине неопходно је одредити непознате коефицијенте и то до само одређеног степена n^1 и реда m , на основу само сателитски прикупљених информација о пољу Земљине теже или комбиновањем сателитски и терестрички прикупљених информација.

Код сателитских података могуће је коефицијенте оцењивати из података опажања путања сателита и везе коефицијената сферно хармонијског развоја са променама Кеплерових параметара путање сателита (Heiskanen & Moritz, 1967) или путем података прикупљених у сателитским мисијама, дедицираним истраживању поља Земљине теже, односно гравитационом пољу тела Земље од којих се посебно издвајају:

- CHAMP (*Challenging Minisatellite Payload*) (Reigber et al., 2003),
- GRACE (*Gravity Recovery and Climate Experiment*) (Adam, 2002),
- GOCE (*Gravity Field and Steady State Ocean Circulation Explorer*) (Rebhan et al., 2000).

Коришћењем сателитски прикупљених података одређују се чисто *сателитска* решења до релативно ниског степена (10,20, 60,...,300, 360,...).

У комбинацији са терестричким опажањима, аномалијама убрзања или дискретним вредностима аномалија висина или ундулација геоида, данас се одређују *комбиновани* глобални модели високог степена, примера ради и до степена 2190 (Pavlis et al., 2012).

¹Максимални одређени степен глобалног модела најчешће се обележава са N_{max} .

2.1 Међународни сервис за поље силе Земљине теже

The International Gravity Field Service

Међународни сервис за поље силе Земљине теже (International Gravity Field Service - IGFS), као сервис Међународног удружења за геодезију² (International Association of Geodesy - IAG), посвећен је:

- прикупљању, провери квалитета и омогућавању приступа подацима који се односе на поље силе Земљине теже,
- иницирању и одржавању курсева и публикавање материјала,
- унификацији података о пољу силе Земљине теже за потребе Глобалног геодетског система опажања (Global Geodetic Observation System - GGOS).

IGFS је састављен од низа сервиса и центара:

- Међународни гравиметријски сервис (Bureau Gravimetric International - BGI),
- Међународни сервис за геоид (International Service for the Geoid - ISG),
- Међународни центар за глобалне моделе Земље (International Center for Global Earth Models - ICGEM),
- Међународни сервис за за дигиталне моделе висина (International Digital Elevation Model Service - IDEMS),
- Међународни сервис за геодинамику и Земљине плиме (International Geodynamics and Earth Tide Service - IGETS),
- Међународни центар за техничку подршку (Technical Support Centre of IGFS - IGFS-TSC).

Готово сви глобални модели, јавно доступни, налазе се у ICGEM сервису чија је дужност да:

- прикупља глобалне моделе,
- обезбеди интернет приступ глобалним моделима и њиховим релевантним подацима,
- обезбеди визуални приказ поља силе Земљине теже, њихове разлике и промене у времену,
- обезбеди литературу о сферним хармоникама и прорачунима за које је сервис задужен
- и финално, да обезбеди DOI (Digital Object Identifier) за податке сваког модела (коефицијенте).

На интернет страни <http://icgem.gfz-potsdam.de/home> могуће је преузети, у овом тренутку, готово све релевантне моделе које се користе у практичним применама.

²IAG је једна од низа асоцијација Међународног удружења за геодезију и геофизику (International Union of Geodesy and Geophysics - IUGG)

2.2 Преузимање глобалних модела са интернет стране ICGEM

Downloading the global model

Архиве глобалних модела дате су у облику текстуалних датотека, а подељене су у две групе (Слика 2.1):

- статички модели (http://icgem.gfz-potsdam.de/tom_longtime) и
- временски модели (<http://icgem.gfz-potsdam.de/series>),



Слика 2.1: Део интернет стране ICGEM

На слици 2.1 наведене две опције интернет стране заокружене су црвеним правоугаоником. Одабирањем, примера ради, опције са статичким моделима, појављује се страна са табелом свих расположивих модела (Слика 2.2). Одабирањем опције gfc или zip (црвени квадрат на слици) архива модела биће пребачена на локални рачунар.

Поред могућности преузимања глобалних модела на интернет страни ICGEM постоје и опције за низ прорачуна као и низ опција које се односе на визуализацију података одређених применом одабраног глобалног модела.

Такође, поред глобалних модела планете Земље могуће је преузети и глобалне моделе за Земљин природни сателит Месец и планете Венеру и Марс (http://icgem.gfz-potsdam.de/tom_celestial).

The screenshot displays the ICGEM website interface. On the left is a navigation menu with categories like Gravity Field Models, Calculation Service, and 3D Visualisation. The main content area shows a table of global models. The ICGEM logo is prominently displayed at the top center, and the GFZ logo is in the top right corner.

ID	Model Name	Year	Size	Type	Author	Download	Calculate	Show
126	GIF48	2011	360	A, G, S(Grace)	Ries, J.C. et al, 2011	gfc zip	Calculate	Show
125	EIGEN-6C	2011	1420	A, G, S(Goce), S(Grace), S(Lageos)	Forste, C. et al, 2011	gfc zip	Calculate	Show
124	EIGEN-6S	2011	240	S(Goce), S(Grace), S(Lageos)	Forste, C. et al, 2011	gfc zip	Calculate	Show
123	GOCO02s	2011	250	S(Goce), S(Grace)	Goiginger, H. et al, 2011	gfc zip	Calculate	Show
122	AIUB-GRACE03S	2011	160	S(Grace)	Jäggi, A. et al,	gfc zip	Calculate	Show
121	GO_CONS_GCF_2_DIR_R2	2011	240	S(Goce)	Bruinsma, S.L. et al, 2010	gfc zip	Calculate	Show
120	GO_CONS_GCF_2_TIM_R2	2011	250	S(Goce)	Pail, Roland et al, 2011	gfc zip	Calculate	Show
119	GO_CONS_GCF_2_SPW_R2	2011	240	S(Goce)	Migliaccio, F. et al, 2011	gfc zip	Calculate	Show
118	GO_CONS_GCF_2_DIR_R1	2010	240	S(Goce)	Bruinsma, S.L. et al, 2010	gfc zip	Calculate	Show
117	GO_CONS_GCF_2_TIM_R1	2010	224	S(Goce)	Pail, R. et al, 2010	gfc zip	Calculate	Show
116	GO_CONS_GCF_2_SPW_R1	2010	210	S(Goce)	Migliaccio, F. et al, 2010	gfc zip	Calculate	Show
115	GOCO01S	2010	224	S(Champ), S(Grace)	Pail, R. et al, 2010	gfc zip	Calculate	Show
114	EIGEN-51C	2010	359	A, G, S(Champ), S(Grace)	Bruinsma, S.L. et al, 2010	gfc zip	Calculate	Show
113	AIUB-CHAMP03S	2010	100	S(Champ)	Prange, L., 2010	gfc zip	Calculate	Show
112	EIGEN-CHAMP05S	2010	150	S(Champ)	Flechtner, Frank et al, 2010	gfc zip	Calculate	Show
111	ITG-Grace2010s	2010	180	S(Grace)	Mayer-Gürr, T. et al, 2010	gfc zip	Calculate	Show
110	AIUB-GRACE02S	2009	150	S(Grace)	Jäggi, A. et al, 2012	gfc zip	Calculate	Show
109	GGM03C	2009	360	A, G, S(Grace)	Tapley, B.D. et al, 2007	gfc zip	Calculate	Show
108	GGM03S	2008	180	S(Grace)	Tapley, B.D. et al, 2007	gfc zip	Calculate	Show
107	AIUB-GRACE01S	2008	120	S(Grace)	Jäggi, A. et al, 2010	gfc zip	Calculate	Show
106	EIGEN-5S	2008	150	S(Grace), S(Lageos)	Forste, C. et al, 2008	gfc zip	Calculate	Show
105	EIGEN-6C	2008	360	A, G, S(Grace), S(Lageos)	Forste, C. et al, 2008	gfc zip	Calculate	Show
104	EGM2008	2008	2190	A, G, S(Grace)	Pavlis, N.K. et al, 2008	gfc zip	Calculate	Show
103	ITG-Grace03	2007	180	S(Grace)	Mayer-Gürr, T. et al, 2007	gfc zip	Calculate	Show
102	AIUB-CHAMP01S	2007	70	S(Champ)	Prange, L. et al, 2009	gfc zip	Calculate	Show
101	ITG-Grace02s	2006	170	S(Grace)	Mayer-Gürr, T. et al, 2006	gfc zip	Calculate	Show
100	EIGEN-GL04S1	2006	150	S(Grace), S(Lageos)	Forste, C. et al, 2006	gfc zip	Calculate	Show
99	EIGEN-GL04C	2006	360	A, G, S(Grace), S(Lageos)	Forste, C. et al, 2006	gfc zip	Calculate	Show
98	eigen-cg03c	2005	360	A, G, S(Champ), S(Grace)	Forste, C. et al, 2005	gfc zip	Calculate	Show
97	GGM02C	2004	200	A, G, S(Grace)	Tapley, B. et al, 2005	gfc zip	Calculate	Show
96	GGM02S	2004	160	S(Grace)	Tapley, B. et al, 2005	gfc zip	Calculate	Show
95	EIGEN-CG01C	2004	360	A, G, S(Champ), S(Grace)	Reigber, C. et al, 2006	gfc zip	Calculate	Show
94	EIGEN-CHAMP03S	2004	140	S(Champ)	Reigber, C. et al, 2004	gfc zip	Calculate	Show
93	EIGEN-GRACE02S	2004	150	S(Grace)	Reigber, Christoph et al, 2005	gfc zip	Calculate	Show
92	TIM-2S	2004	60	S(Champ)	Wermuth, M. et al, 2004	gfc zip	Calculate	Show
91	DEOS_CHAMP-01C	2004	70	S(Champ)	Ditmar, P. et al, 2005	gfc zip	Calculate	Show
90	ITG_Champ01K	2003	70	S(Champ)	Ilk, K.H. et al, 2005	gfc zip	Calculate	Show

Слика 2.2: Део интернет стране ICGEM са списком глобалних модела

Када се глобални модел преузме (директним одабиром опције gfc или zip), подацима из архиве модела могуће је приступити у било ком програму који је прилагођен за рад са текстуалним датотекама, примера ради програм Notepad (Notepad++,...). Део модела под именом GOCO03s приказан је на наредној слици.

```

The combined satellite-only global gravity field model GOCO03S
=====

GOCO (Gravity Observation Combination) is a project initiative in the frame of ESA's GOCE Data AO (project no. 4
pail@bv.tum.de)

Contributing institutions:
* TU Mönchen, Institute of Astronomical and Physical Geodesy
* Univ. Bonn, Institute of Geodesy and Geoinformation
* TU Graz, Institute of Theoretical and Satellite Geodesy
* Austrian Academy of Sciences, Space Research Institute
* Univ. Bern, Astronomical Institute

The following satellite missions contribute to this solution:
- GOCE (18 months; same data period as for GOCE model TIM_R3)
- GRACE (7 years)
- CHAMP (8 years)
- SLR (5 years, 5 satellites)
- Regularization: Kaula starting at degree/order 180
The reference epoch of this mean gravity field model is 1 January 2005.

Reference - methodology:
Pail R., et al. (2010): Combined satellite gravity field model GOCO01S derived from GOCE and GRACE, Geophys. Res

Reference - GOCO03S:
Mayer-Görr T., et al. (2012): The new combined satellite only model GOCO03s. Presentation at GGHS 2012, Venice

begin_of_head =====
product_type          gravity_field
modelname             GOCO03s
earth_gravity_constant 0.39860044150D+15
radius               0.63781363000D+07
max_degree           250
errors               formal
norm                fully_normalized
tide_system         tide-free
url                 www.goco.eu

key   L   M   C   S   sigma C   sigma S
end_of_head =====
gfc   0   0 +1.000000000000000E+000 +0.000000000000000E+000 +0.000000000000000E+000 +0.000000000000000E+000
gfc   1   0 +0.000000000000000E+000 +0.000000000000000E+000 +0.000000000000000E+000 +0.000000000000000E+000
gfc   1   1 +0.000000000000000E+000 +0.000000000000000E+000 +0.000000000000000E+000 +0.000000000000000E+000
gfc   2   0 -4.841650219688693E-004 +0.000000000000000E+000 +4.427138012875650E-013 +0.000000000000000E+000
gfc   2   1 -2.351515210505080E-010 +1.467056198039030E-009 +4.315185219209560E-013 +4.550295653791500E-013

```

Слика 2.3: Део архиве модела GOCO03s

Архива сваког модела састоји се из три дела (<http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM-Format-2011.pdf>):

- основног описа глобалног модела (на слици 2.3 део унутар плавог правоугаоника) који најчешће садржи списак аутора модела и основне податке из којих је модел одређен,

- заглавља (*header*) модела који обавезно мора да садржи основне податке о моделу (на слици 2.3 део унутар зеленог правоугаоника),
- и део са коефицијентима модела са оценом тачности одређивања коефицијената.

Основни подаци који се налазе у заглављу су: тип производа (*product_type*), име модела (*modelname*), геоцентрична гравитациона константа Земље (*earth_gravity_constant*), полупречник Земље у равни екватора (*radius*), максимални степен (*max_degree*), третман оцена тачности модела при оцени коефицијента (*errors*), које хармонике се користе (ортонормиране или обичне - *norm*), третман Земљиних плима при оцени коефицијената модела (*tide_system*). Поред наведених параметара могуће је у заглављу врло често наћи и интернет адресу на којој се налазе готово сви релевантни подаци о моделу. На приказаном делу модела података GOCO03s у заглављу за *url* модела дата је адреса www.goco.eu.

2.3 Референтни нормални потенцијал и усаглашавање коефицијената глобалног модела

Reference potential and the scale difference

У циљу примене израза од (1.80) до (1.84) неопходно је претходно усвојити нормални потенцијал, који је, како је већ напоменуто, у потпуности дефинисан усвајањем 4 релевантна параметра. Сагласно препорукама међународног сервиса за ротацију и референтне системе Земље (Earth Rotation and Reference Systems Service - IERS) (Petit & Luzum, 2010) данас се још увек усвајају параметри нормалног поља Геодетског референтног система 1980 (Geodetic Reference System 1980 - GRS80) Moritz (1984).

Нормално поље система GRS80 дефинисано је на основу следећих бројних вредности:

- средњи полупречник Земље у равни екватора³

$$a = 6378137 \text{ m},$$

- геоцентрична гравитациона константа Земље (укључујући атмосферу)

$$GM = 3986005 \cdot 10^8 \text{ m}^3\text{s}^{-2},$$

- динамички фактор облика Земље⁴

$$J_2 = 108263 \cdot 10^{-8},$$

- угаона брзина Земљине ротације

$$\omega = 7292115 \cdot 10^{-11} \text{ rad s}^{-1}.$$

³У циљу приказивања што једноставнијих израза параметри за Нормалну Земљу означени су исто као и параметри одређени за планету Земљу.

⁴Параметар J_2 само је друга ознака за параметар $-C_{20}$.

Увидом у основне податке из заглавља модела GOCO03s следи да су, при оцени коефицијената модела, добијене и оцене за геоцентричну гравитациону константу и полупречник Земље у равни екватора које имају следеће вредности:

- средњи полупречник Земље у равни екватора

$$a^{\text{GOCO03s}} = 6378136.3 \text{ m},$$

- геоцентрична гравитациона константа Земље

$$GM^{\text{GOCO03s}} = 3986004.415 \cdot 10^8 \text{ m}^3\text{s}^{-2}.$$

У циљу добијања функционала аномалијског потенцијала у односу на нивоски елипсоид система GRS80 неопходно је оцене коефицијената усагласити применом следеће релације (Gruber et al., 2010):

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{C}_{nm}^{ELL} \\ \bar{S}_{nm}^{ELL} \end{array} \right\} = \left(\frac{GM^{\text{GOCE03s}}}{GM} \right) \left(\frac{a^{\text{GOCE03s}}}{a} \right) \left\{ \begin{array}{c} \bar{C}_{nm}^{\text{GOCE03s}} \\ \bar{S}_{nm}^{\text{GOCE03s}} \end{array} \right\}, \quad (2.3)$$

где су $\bar{C}_{nm}^{\text{GOCE03s}}$ и $\bar{S}_{nm}^{\text{GOCE03s}}$ ортонормирани коефицијенти модела GOCO03s, а \bar{C}_{nm}^{ELL} и \bar{S}_{nm}^{ELL} ортонормирани коефицијенти који се односе на параметре (константе) нивоског елипсоида референтног система GRS80. Након усаглашавања једначина од (1.80) до (1.84) могуће је, коришћењем ортонормираних хармоника и коефицијената, записати у облику (Gruber et al., 2010)⁵:

$$N = \frac{GM}{r\gamma_0} \sum_{n=0}^{N_{max}} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(t), \quad (2.4)$$

$$\delta g = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^{N_{max}} (n+1) \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(t), \quad (2.5)$$

$$\Delta g = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^{N_{max}} (n-1) \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(t), \quad (2.6)$$

$$\xi = \frac{GM}{ar\gamma_0} \sum_{n=0}^{N_{max}} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \frac{\partial \bar{P}_{nm}(t)}{\partial \theta}, \quad (2.7)$$

$$\eta = -\frac{GM}{ar\gamma_0 \sin \theta} \sum_{n=0}^{N_{max}} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n [-m\Delta \bar{C}_{nm} \sin m\lambda + m\Delta \bar{S}_{nm} \cos m\lambda] \bar{P}_{nm}(t), \quad (2.8)$$

⁵За сумирање по степену може се кренути од $n=2$. Погледај футноту 5 у Глава 1. Код аномалија убрзања неће постојати хармонике првог реда, чак кад оне постоје и код аномалијског потенцијала (због члана $(n-1)$), тако да сумирање по степену може поћи од 1. Од којег степена ће кренути сумирање зависи од хипотеза које се усвоје. Ако се усвоји хипотеза да је маса Нормалне Земље једнака маси Земље и хипотеза да се координатни почетак поклапа са тренутним центром масе Земље сумирање може поћи од 2.

где су:

$$\begin{aligned}\Delta\bar{C}_{nm} &= \bar{C}_{nm}^{ELL}, \\ \Delta\bar{S}_{nm} &= \bar{S}_{nm}^{ELL}, \\ \Delta\bar{C}_{n0} &= \bar{C}_{n0}^{ELL} - \bar{C}_{n0}^U, \quad (n = 2, 4, 6, 8), \\ \Delta\bar{C}_{00} &= \bar{C}_{00}^{ELL} - 1.\end{aligned}$$

2.4 Глобални модели и третман плима тела Земље

Global models and permanent tides

При одређивању коефицијената глобалног модела утицај плима тела Земље могуће је третирати на различите начине. У практичним и научним применама посебно се издвајају три врсте приступа, што доводи до три различита модела⁶:

- **tide-free** модели, они модели код којих су директни и индиректни⁷ утицаји Сунца и Месеца моделирани и елиминисани при оцени коефицијената модела,
- **zero** модели код којих су директни утицаји Сунца и Месеца моделирани и елиминисани при оцени коефицијената модела, али индиректни ефекти су и даље присутни,
- и **mean** модели код којих нема посебног моделирања нити елиминације плимских ефеката.

Који ће се од три наведена модела (система) користити у значајној мери зависи од тога са којим се подацима глобални модел комбинује (Makinen & Ihde, 2007):

- тренутно важеће IAG резолуције из 1983. године препоручују zero систем за гравитационо поље и његове параметре,
- у погледу 3D позиционирања препоручени систем је tide-free,
- за сва гравиметријска мерења и даље се препоручује zero систем,
- регионални модели геоида су наслеђивали tide-free систем из глобалних модела, али се данас често одређују у zero систему,
- у сателитској алтиметрији користе се mean глобални модели,
- ...

Без обзира са којим моделом се расположе могуће је извршити трансформацију једног модела у други (Petit & Luzum, 2010).

У оквиру овог уџбеника у свим приказаним прорачунима коришћен је tide-free модел и то за све примењене глобалне моделе.

⁶...или три различита система у којима је модел одређен.

⁷Деформације тела чврсте Земље које настају због плимских утицаја.

Одређивање аномалија убрзања применом глобалних модела

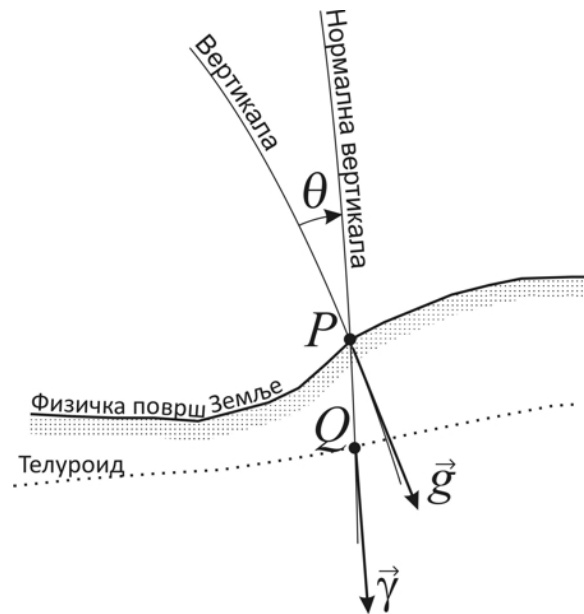
Gravity anomaly determination by global geopotential models

Прегледом ICGEM интернет стране, у делу где се налази списак расположивих модела, може се уочити да је први публиковани модел из 1966. године (Lundquist & Veis, 1966). Модел је публикован под именом SE1, а његов степен је 15. Коефицијенти модела одређени су коришћењем само сателитских података. Коришћењем модела овако ниског степена добијају се аномалије убрзања које су приближно једнаке аномалијама које се односе на геоид али и аномалијама слободног ваздуха. Након, условно речено овог *првог модела*, ређају се модели са степеном од 24,...,8,...,180, а тек 1986. године публикован је први модел степена 360 (Rapp & Cruize, 1986). Модел под именом OSU86 креиран је коришћењем алтиметријских података, терестрички одређених аномалија и претходно постојећег модела GEML2 (Lerch et al., 1982). Коришћењем овог модела могуће је одредити аномалије убрзања у било којој тачки планете Земље, али како су при оци којефицијената коришћене аномалије убрзања одређене на физичкој површи Земље (претходно нису извршене било какве редуције интензитета убрзања) следи да ће применом (2.6) бити одређене аномалије слободног ваздуха.

Аномалије слободног ваздуха у теорију одређивања поља Земљине теже увео је Молоденски (Molodensky, 1958). Аномалија слободног ваздуха је по дефиницији разлика интензитета реалног и нормалног убрзања:

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q, \quad (3.1)$$

при чему се g_P односи на физичку површ Земље, а γ_Q на телуроид (Слика 3.1)¹.



Слика 3.1: Вектори реалног и нормалног убрзања на физичкој површи Земље и телуроиду

¹На слици је са θ означен угао одступања вертикале Молоденског

3.1 Одређивање аномалије убрзања применом глобалних модела

Gravity anomaly determination by global geopotential models - one point example

За потребе одређивања аномалије убрзања применом израза (2.6) и коефицијената неког од глобалних модела, у произвољној тачки на физичкој површи Земље или у простору ван Земље, потребно је имати на располагању *само* геодетске координате (B, L, h) те тачке у односу на Геодетски референтни систем GRS80². Геодетске координате је релативно једноставно приказати у виду геоцентричних правоуглих координата (x, y, z) (Hofmann-Wellenhof et al., 1997), а коришћењем израза (1.31) могу се одредити и инверзне релације:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \\ \lambda &= \arctan \frac{y}{x}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

и тако одредити сферне координате тачке.

Након одређивања сферних координата применом израза (2.6) директно се добија вредност аномалије убрзања Δg . Примера ради:

- геодетске координате неке тачке P у Србији имају следеће вредности:

$$\begin{aligned}B &= 43^\circ.3834421, \\ L &= 19^\circ.6379885, \\ h &= 497.442 \text{ m},\end{aligned}$$

- у односу на ITRS89 из трансформације следи:

$$\begin{aligned}x &= 4373088.2353 \text{ m}, \\ y &= 1560454.5491 \text{ m}, \\ z &= 4358900.9760 \text{ m},\end{aligned}$$

- а њене сферне координате су:

$$\begin{aligned}r &= 6368589.8621 \text{ m}, \\ \theta &= 46^\circ.8086235, \\ \lambda &= 19^\circ.6379885.\end{aligned}$$

За вредност аномалије убрзања у тачки P применом модела GOCO03s и једначине (2.6) добија се вредност од 74.34 mgal.

²Могуће је одабрати било које друго нормално поље за које постоји физичко оправдање за примену глобалног модела.

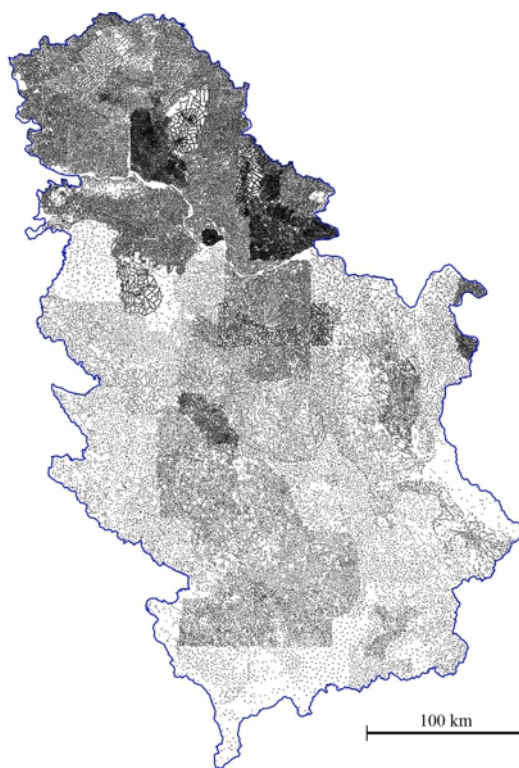
3.2 Терестрички подаци на локалном подручју

Terrestrial data in the local area

Поступак одређивања аномалије убрзања у потпуности је исти без обзира да ли се рачунања односе на само једну тачку, као у претходном поглављу, или за низ тачака.

У практичним применама глобални модел се најчешће примењује на неком локалном подручју³, при чему се под локалним подручјем подразумева територија, примера ради, површине 10 km x 10 km, подручје неког града, региона или целе државе.

У циљу илустрација одређивања на локалном подручју, у оквиру овог уџбеника, коришћен је гравиметријски премер Србије чији је распоред тачака приказан на слици 3.2 (Odalović et al., 2012). Гравиметријски премер садржи више од 90000 тачака, при чему су у свакој тачки познате координате тачке у односу на GRS80, а убрзање Земљине теже је дато у односу на међународни гравиметријски референтни систем базиран на Међународној мрежи убрзања Земљине теже из 1971 (International Gravity Standardization Network 1971 - IGSN71) (Odalović, 2010).



Слика 3.2: Распоред тачака гравиметријског премера Србије

Сви примери у циљу илустрације, у овом и наредним поглављима, дати су само

³Поступак је у потпуности исти ако се модел примењује за подручје целе планете или континента. Евентуални начин промене поступка рачунања може бити само у непосредној близини полова тела Земље (Gottlieb, 1993; Pines, 1973).

за подкуп гравиметријског премера који се састоји од 4083 тачке, које су релативно правилно распоређене по читавој територији Србије (Слика 3.3). Основни разлог за издвајање подкупа је скраћивање потребног времена рачунања применом глобалних модела (посебно модела високог степена).



Слика 3.3: Распоред тачака дела гравиметријског премера Србије

С обзиром на чињеницу да се у свакој тачки гравиметријског премера располаже са координатама и убрзањем могуће је срачунати вредности аномалија слободног ваздуха у свим тачкама подручја.

За рачунања аномалија слободног ваздуха примењен је израз (3.1), при чему се g_P односи на мерену вредност убрзања, а γ_Q на нормално убрзање у одговарајућој тачки на телуриду (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$\gamma_Q = \gamma_0 \left[1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 B) H_Q^N + \frac{3}{a^2} (H_Q^N)^2 \right], \quad (3.3)$$

где је H_Q^N нормална висина тачке Q (елипсоидна висина тачке Q која се налази на телуриду), f спљоштеност елипсоида и где је

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}. \quad (3.4)$$

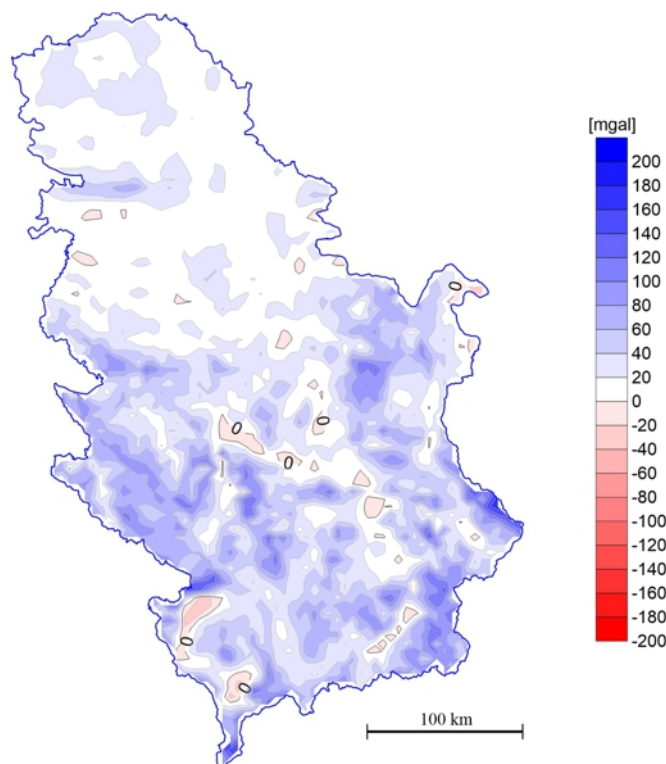
Општи облик површи аномалија слободног ваздуха приказан је на наредној слици, а основни статистички подаци одређивања аномалија дати су у табели 3.1.

Сви основни статистички подаци, који се односе на скупе који следе из прорачуна, у оквиру овог уџбеника су следећи: n број елемената скупа, Min минимални елемент скупа, Max максимални елемент скупа, SV средња вредност,

$$SV = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n x_i, \quad (3.5)$$

при чему је x_i i -ти елемент скупа и SD стандардна девијација,

$$SD = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - SV)^2}. \quad (3.6)$$



Слика 3.4: Општи облик површи аномалија слободног ваздуха (јединице mgal, еквидистанца 20 mgal)

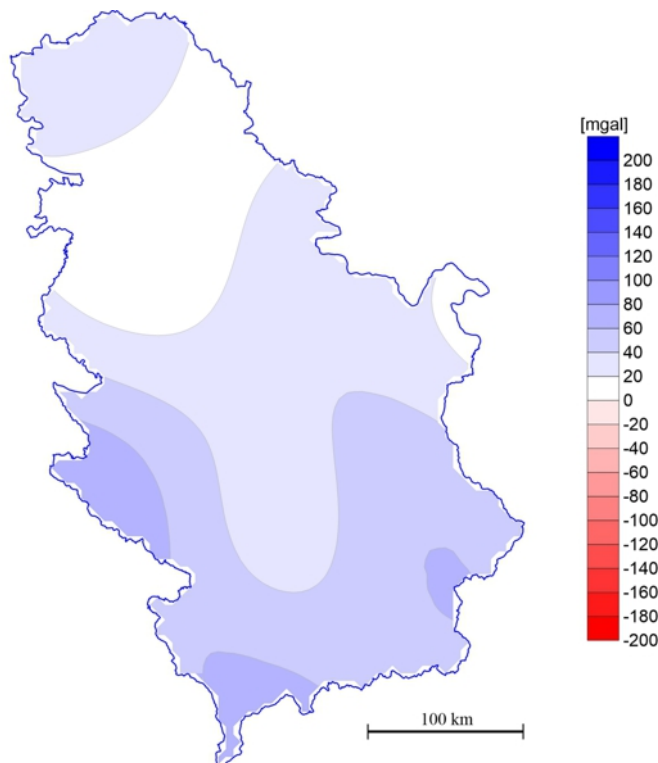
Табела 3.1: Основни статистички подаци Δg ($n=4083$)

Параметар	Min	Max	SV	SD
Δg [mgal]	42.31	209.14	33.19	29.03

3.3 Примена глобалних модела на локалном подручју

Gravity anomaly determination in local areas

Применом (2.6) и глобалног модела GOCO03s, у свим тачкама подручја, добијају се аномалије убрзања чији је општи облик површи приказан на слици 3.5, са основним статистичким подацима скупа аномалија које су дате у табели 3.2.



Слика 3.5: Општи облик аномалија убрзања одређених применом модела GOCO03s (јединице mgal, еквидистанца 20 mgal)

Табела 3.2: Основни статистички подаци $\Delta g^{\text{GOCO03s}}$ ($n=4083$)

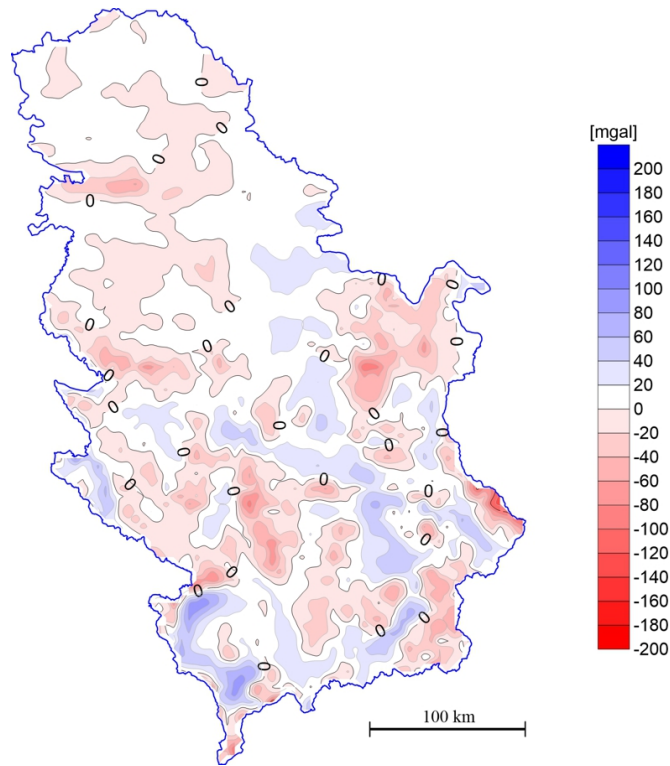
Параметар	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>SV</i>	<i>SD</i>
$\Delta g^{\text{GOCO03s}}$ [mgal]	6.00	74.94	35.56	16.77

Одређена два скупа аномалија у потпуности су довољна за проверу квалитета глобалног модела GOCO03s на територији Србије.

Формирањем разлика,

$$R^{\Delta g^{\text{GOCO03s}} - \Delta g} = \Delta g^{\text{GOCO03s}} - \Delta g, \quad (3.7)$$

за све тачке скупа, могуће је приказати општи облик површи разлика (Слика 3.6) и срачунати основне статистичке податке (Табела 3.3).



Слика 3.6: Општи облик разлика $R^{\Delta g^{GOCO03s}} - \Delta g$ (јединице mgal, еквидистанца 20 mgal)

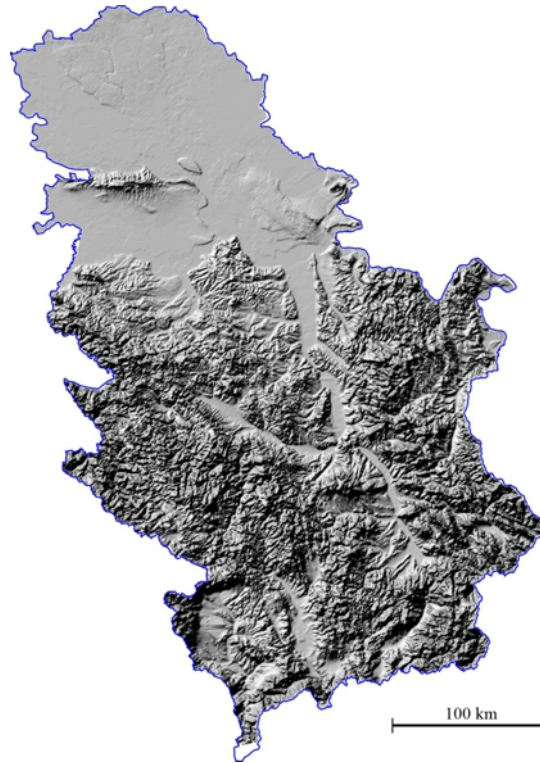
Табела 3.3: Основни статистички подаци разлика $R^{\Delta g^{GOCO03s}} - \Delta g$ ($n=4083$)

Параметар	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>SV</i>	<i>SD</i>
$R^{\Delta g^{GOCO03s}} - \Delta g$ [mgal]	-142.20	94.95	2.40	25.54

Увидом у опши облик површи и приказане основне статистичке податке може се закључити следеће:

- у северном делу Србије применом модела GOCO03s добијају се негативне разлике $R^{\Delta g^{GOCO03s}} - \Delta g$ и разлике чији је интензитет близак нули,
- идући од севера ка југу појављују се позитивне и негативне вредности разлика, а и интензитет разлика значајно се повећава у истом смеру,
- средња вредност разлика је свега 2.40 mgal, али стандардна девијација је значајна и износи 25.54 mgal.

За основни разлог појављивања наведених разлика, као и за њихов распоред, може се навести постојање и распоред топографских маса на територији Србије (Слика 3.7)⁴, али и степен глобалног модела, односно *резолюција* глобалног модела.



Слика 3.7: Општи облик топографских маса на територији Србије

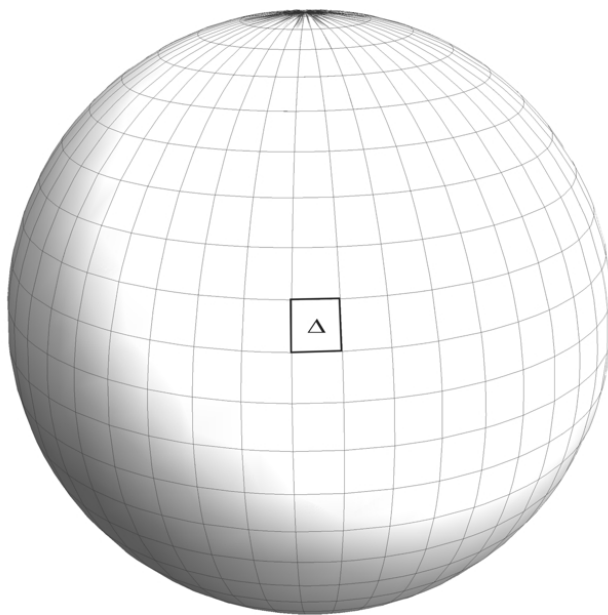
3.4 Резолуција глобалног модела

The resolution of the global models

За потребе дефинисања резолуције глобалног модела физичка површ планете Земље дели се на квазиквадрате Δ , применом меридијана и паралела (Слика 3.8) (Sanso, 2013). Стране квазиквадрата (Δ_i) могуће је третирати као разлику географских координата, односно као делове лукова меридијана и паралела, примера ради, дужине 0.5° . Ако се обезбеди скуп података такав да је његовим коришћењем могуће одредити средњу вредност неког функционала аномалијског потенцијала⁵ за свако подручје Δ на планети Земљи, за такав скуп података усваја се да има резолуцију од $0.5^\circ \times 0.5^\circ$. Ако се такви подаци искористе у циљу одређивања коефицијената неког глобалног модела, за тако добијени модел усваја се да је управо те резолуције, $0.5^\circ \times 0.5^\circ$.

⁴Упоредњем садржаја слика 3.4 и 3.7 лако је уочити зависност аномалија слободног ваздуха у односу на распоред топографских маса.

⁵Најчешће аномалија слободног ваздуха.



Слика 3.8: Подела физичке површи Земље на квазиквадрате Δ

У нумеричком погледу резолуцију глобалног модела могуће је приближно одредити из максималног степена модела N_{max} на основу релације

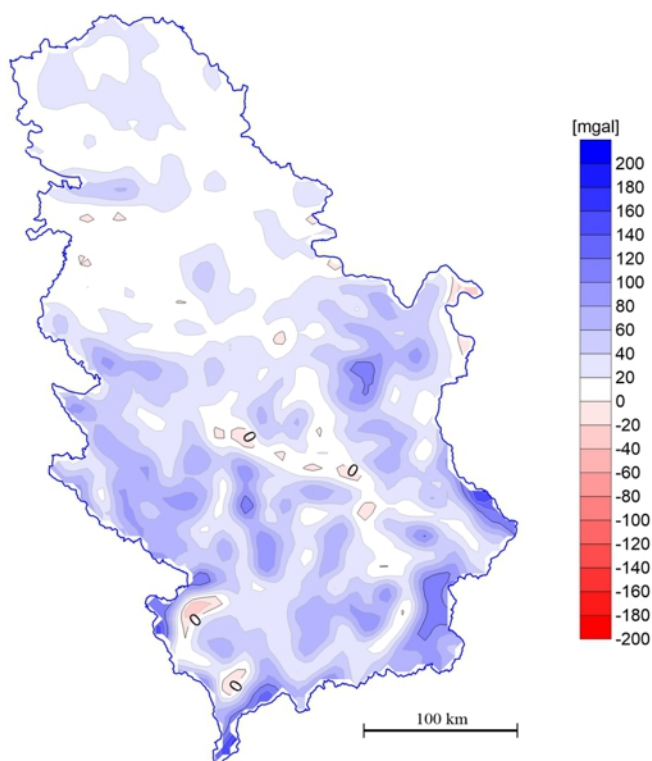
$$\Delta_i \approx \frac{360^\circ}{2N_{max}}. \quad (3.8)$$

Модел GOCO03s има максимални степен $N_{max}=250$, па из претходне релације следи да је резолуција модела 0.72° , што је приближно једнако сферној дистанци ψ од 80 km на географској ширини екватора. За низ различитих максималних степена модела резолуције модела приказане су у наредној табели.

Табела 3.4: Однос резолуције и степена глобалног модела

Степен	Резолуција	Растојање	Степен	Резолуција	Растојање
N_{max}	Δ_i	ψ	N_{max}	Δ_i	ψ
[-]	[Степени]	[km]	[-]	[Степени]	[km]
2	90	10002	360	0.5	56
50	3.6	400	500	0.36	40
100	1.8	200	1000	0.18	20
200	0.9	100	2000	0.09	10
250	0.72	80	5000	0.04	4
300	0.6	67	10000	0.02	2

Резолуција модела има велики значај посебно у одређивању аномалија убрзања. Примера ради, применом глобалног модела Earth Gravitational Model (EGM2008) (Pavlis et al., 2012) који је степена 2190, добија се значајно боља апроксимација аномалија слободног ваздуха на територији Србије. Резолуција модела је око 5 лучних минута у оба правца (правац север-југ, правац исток-запад), односно око 9.1 km на географској ширини екватора. Општи облик аномалија одређених применом EGM2008 приказан је на наредној слици, а њихови основни статистички подаци дати су у табели 3.5. Упоредом слика 3.9 и 3.4 може се уочити далеко већа сличност општих облика површи од апроксимације која следи из примене модела GOCO03s (Слика 3.5).



Слика 3.9: Општи облик аномалија убрзања одређених применом модела EGM2008 (јединице mgal, еквидистанца 20 mgal)

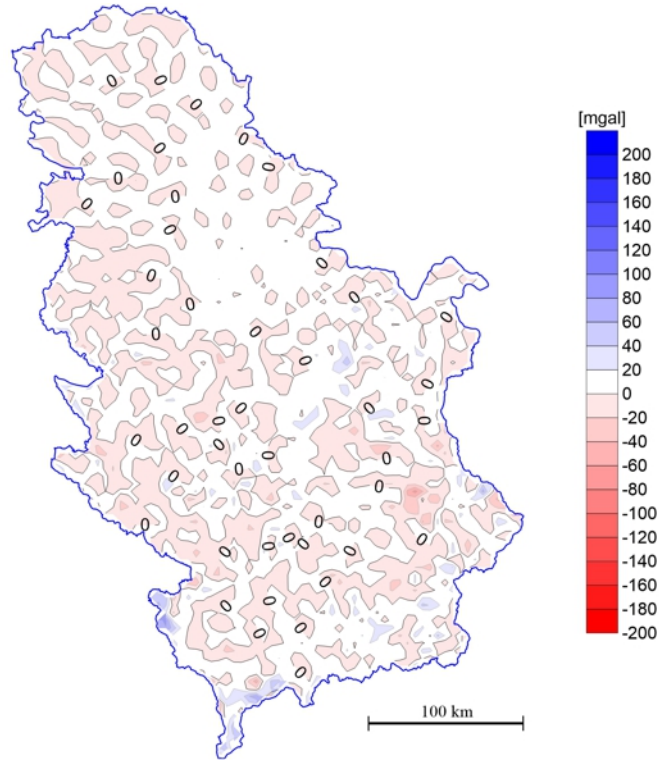
Табела 3.5: Основни статистички подаци $\Delta g^{\text{EGM2008}}$ ($n=4083$)

Параметар	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>SV</i>	<i>SD</i>
$\Delta g^{\text{EGM2008}}$ [mgal]	-42.23	173.57	34.76	26.79

Сличност површи и квалитет апроксимације једноставније је уочити, односно показати, формирањем скупа разлика $R^{\Delta g^{\text{EGM2008}} - \Delta g}$ и креирањем њихове графичке пред-

ставе, праћене са основним статистичким подацима (Слика 3.10 и табела 3.6). Резултати показују да се аномалије убрзања одређене применом EGM2008 разликују од аномалија слободног ваздуха за 1.56 mgal, са стандардном девијацијом од 14.73 mgal.

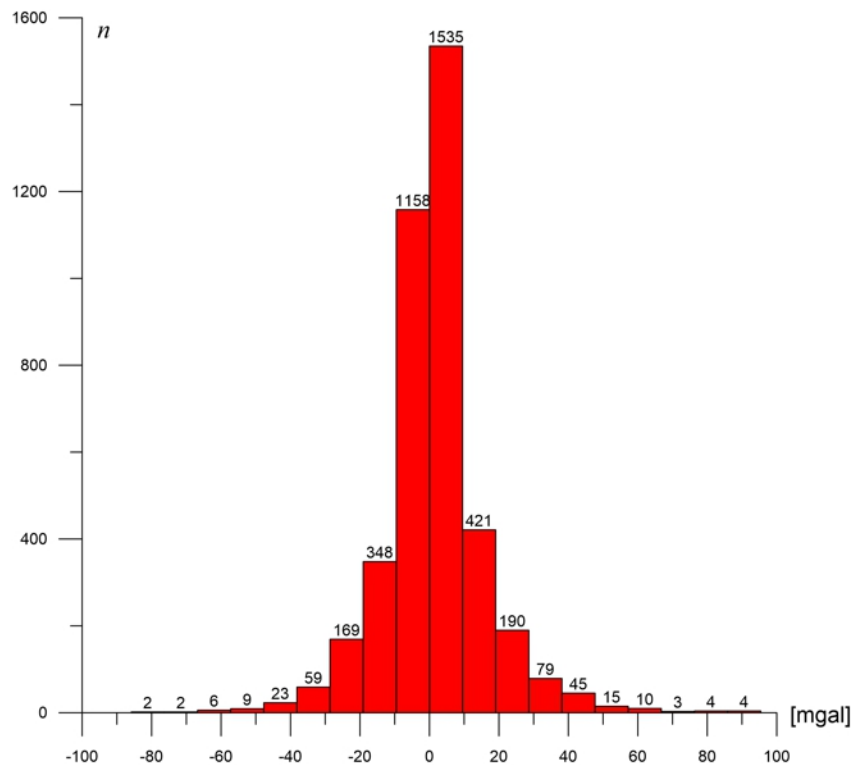
Са хистограма разлика $R^{\Delta g^{\text{EGM2008}} - \Delta g}$ који је приказан на слици 3.11 може се уочити да је 85% разлика груписано око вредности 0 mgal са распонем од ± 20 mgal.



Слика 3.10: Општи облик разлика $R^{\Delta g^{\text{EGM2008}} - \Delta g}$ (јединице mgal, еквидистанца 20 mgal)

Табела 3.6: Основни статистички подаци разлика $R^{\Delta g^{\text{EGM2008}} - \Delta g}$ ($n=4083$)

Параметар	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>SV</i>	<i>SD</i>
$R^{\Delta g^{\text{EGM2008}} - \Delta g}$ [mgal]	-82.40	98.81	1.56	14.73



Слика 3.11: Хистограм разлика $R^{\Delta g^{EGM2008}} - \Delta g$

Поред свега наведеног о резолуцији модела посебно битно је напоменути следеће: *резолуција модела у општем случају не мора бити показатељ квалитета модела.*

Као што је напоменуто при дефинисању резолуције, резолуција модела једнака је резолуцији података који се користе при одређивању коефицијената модела. Код модела EGM2008 имплицитно следи да су при одређивању коефицијента модела коришћени подаци са резолуцијом од 5'x 5', односно следи да је за сваки квазикадрат од 5'x 5' била позната средња вредност неког функционала аномалијског потенцијала (у случају EGM2008 коришћење су аномалије слободног ваздуха).

Међутим, у реалним условима није у потпуности могуће обезбедити податке за сваки квазикадрат из низа разлога:

- аномалије слободног ваздуха нису одређиване у свим подручјима тела Земље. Постоје државе које немају детаљне гравиметријске премере.
- На територији мора и океана (великих језера) аномалије су одређиване применом алтиметријских мерења. Аномалије одређене на овај начин нису истог квалитета као и аномалије на континенталним деловима тела Земље.
- Аутори модела (без обзира на постојање резултата мерења) нису располагали резултатима опажања аномалија слободног ваздуха у току одређивања коефицијената самог модела.

- У циљу формалног испуњења резолуције података често се прибегава одређивању аномалија слободног ваздуха применом предикције на оним деловима тела Земље на којима се не располаже резултатима опажања. Такви подаци свакако нису истог квалитета као и подаци добијени из резултата мерења.
- ...

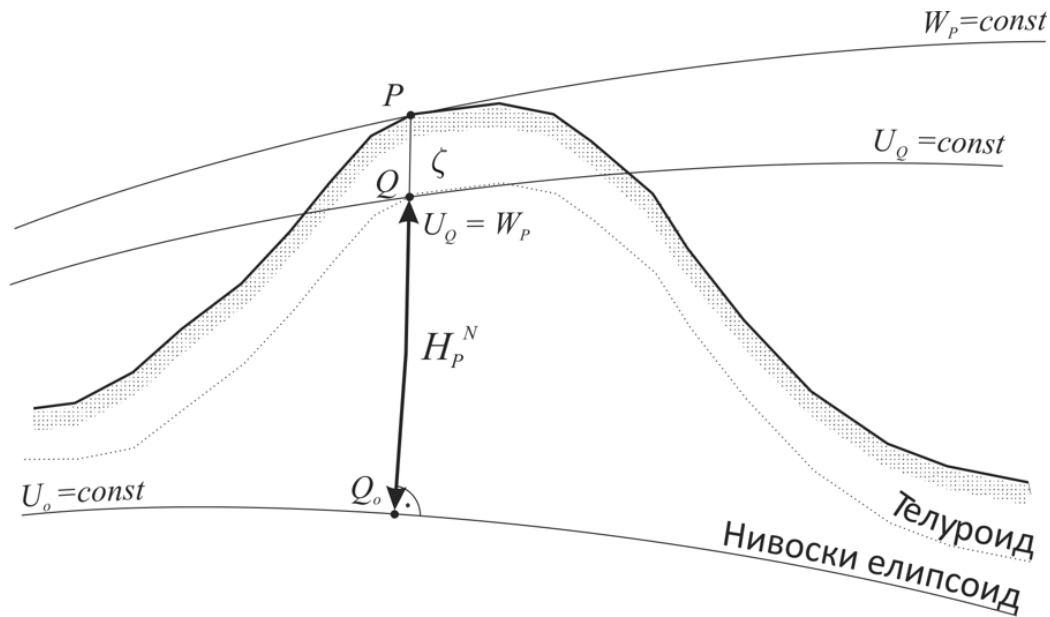
Из свих наведених разлога следи да се квалитет глобалног модела, на неком локалном подручју, може одредити тек након примене глобалног модела и упоређења добијених резултата са терестрички одређеним вредностима функционала аномалијског потенцијала, наравно са релевантног локалног подручја.

Одређивање аномалија висина применом глобалних модела

Anomaly height determination by global geopotential models

Једначина (2.4) може се користити само у циљу приближног одређивања ундулација геоида (Gruber et al., 2010), а основни разлог је непостојање било каквих редукција и третмана топографских маса пре оцене коефицијената глобалног модела. Из наведеног разлога следи да се применом глобалних модела директно одређују аномалије висине.

Аномалија висине у тачки P , коју је такође дефинисао Молоденски, у геометријском смислу представља одсечак нормалне вертикале од тачке P до тачке Q (Слика 4.1), при чему је тачка Q , на нормалној вертикали тачке P , одабрана тако да је задовољен услов $U_Q = W_P$.



Слика 4.1: Телуриод, нормална висина (H_P^N) и аномалија висине (ζ)

Израз за рачунање аномалије висине у било којој тачки на планети Земљи може се приказати у облику:

$$\zeta = \frac{GM}{r\gamma} \sum_{n=0}^{N_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n [\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(t). \quad (4.1)$$

Једина разлика између (2.4) и (4.1) је у присуству γ у (4.1) које се односи на телуриод, док се у (2.4) γ_0 односи на елипсоид.

Нормално убрзање γ одређује се применом (3.3), а вредност нормалног убрзања γ_0 могуће је одредити применом формуле Сомилјанија (Heiskanen & Moritz, 1967) или применом Формуле за нормално убрзање 1980 (Moritz, 1984).

4.1 Одређивање аномалије висина применом глобалних модела

One point example

Као и у случају одређивања аномалија убрзања (Поглавље 3.1), у овом поглављу дат је нумерички пример одређивања аномалије висине само у једној тачки, применом израза (4.1) и глобалног геопотенцијалног модела GOCO03s.

Управо за тачку дату у примеру поглавља 3.1 за аномалију висине добија се вредност од $\zeta=47.46$ m.

4.2 Терестрички подаци на локалном подручју

Terrestrial data in the local area

Аномалија висине тачке P , која се налази на физичкој површи Земље, може се одредити применом израза (Odalović, 2010):

$$\zeta = h - H_N, \quad (4.2)$$

где су h и H^N елипсоидна и нормална висина тачке P , респективно.

Елипсоидне висине данас је релативно једноставно одредити применом глобалних навигационих сателитских система (Global Navigation Satellite Systems - GNSS), а нормалне висине су један од стандардних система висина који следе из реализације мреже нивелмана високе тачности, најчешће мреже нивелмана високе тачности једне државе.

На територији Србије, седамдесетих година прошлог века, развијена је мрежа нивелмана високе тачности (НВТ) у виду дела мреже нивелмана високе тачности СФРЈ (Социјалистичке Федеративне Републике Југославије) (Слика 4.2) (Odalović et al., 2016). При реализацији мреже висине свих репера одређене су у систему геопотенцијалних кота, ортометријских, нормалних и сфероидних висина. У циљу одређивања аномалије висине било којег репера мреже потребно је применом GNSS додатно одредити елипсоидне висине репера.

Почетком овог века завршена је и Референтна мрежа Србије (SREF) (Слика 4.3) сачињена од око 800 тачака које су стабилизване у Земљиној кори. Све координате ове мреже одређене су применом само GNSS. За потребе одређивања аномалија висина потребно је за тачке референтне мреже додатно одредити нормалне висине, везивањем за мрежу (НВТ).

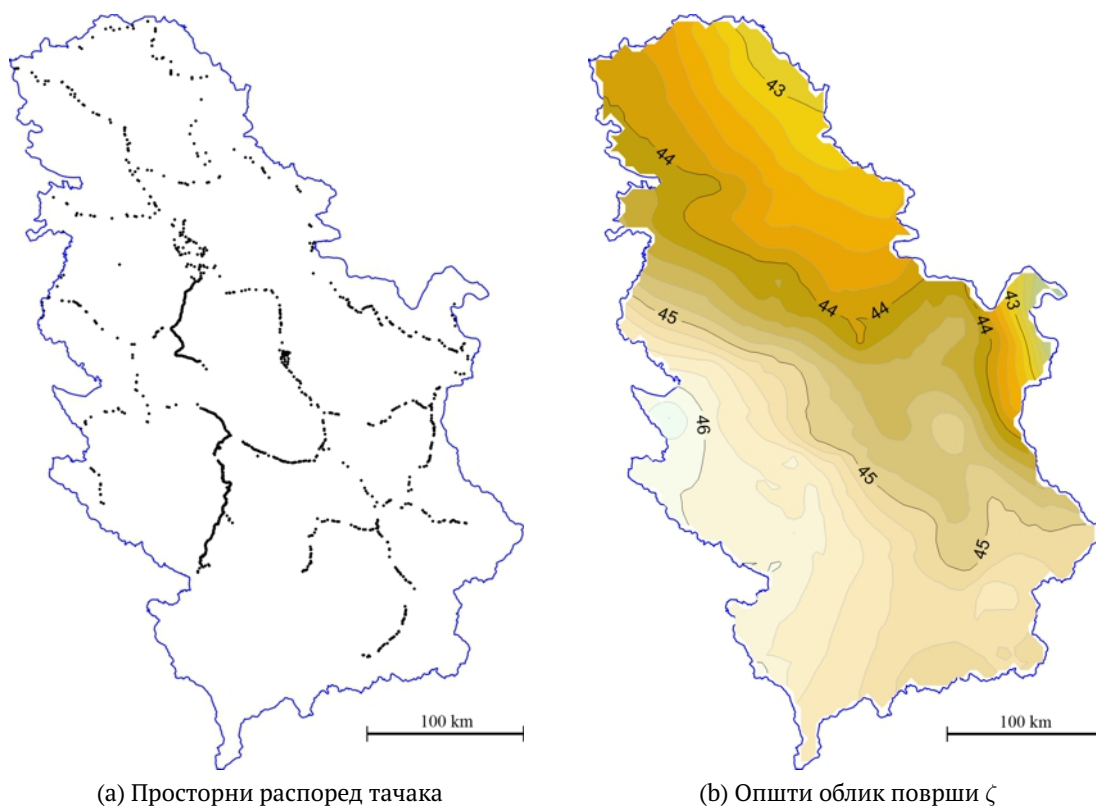


Слика 4.2: Мрежа нивелмана високе тачности СФРЈ



Слика 4.3: Просторни распоред тачака Референтне мреже Србије (SREF)

У оквиру редовних активности Републичког геодетског завода Србије, у периоду од 2001. до 2007. године, одређене су елипсоидне висине репера НВТ2 и нормалне висине референтних тачака и на тај начин обезбеђено је 1073 вредности аномалија висина на територији Србије одређених применом (4.2). Просторни распоред репера и тачака у којима је одређена аномалија висине приказан је на слици 4.4 заједно са општим обликом површи аномалија висина, а основни статистички подаци дати су у табели 4.1.



Слика 4.4: Графички прикази терестрички одређених аномалија висина (јединице m, еквилистанца 0.20 m)

Табела 4.1: Основни статистички подаци ζ ($n=1073$)

Параметар	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>SV</i>	<i>SD</i>
ζ [m]	42.33	46.41	44.66	0.84

На основу приказаних резултата може се уочити да је распон аномалија висина 4.08 m, као и то да су минималне вредности у северо-источном делу Србије, близу границе са Румунијом, а максималне вредности на централно-западном делу у непосред-

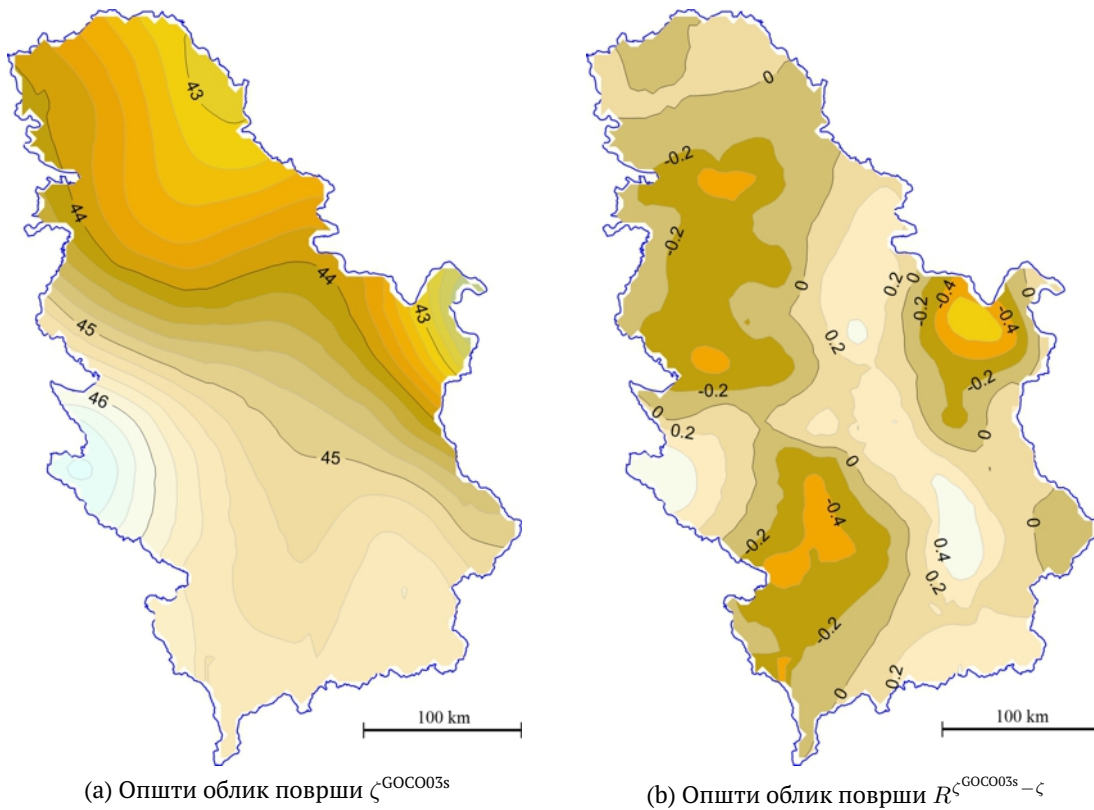
ној околини границе са Босном и Херцеговином.

Распон од 4.08 m није дефинитивна максимална разлика аномалија висина на територији Србије, већ само она која следи на основу скупа од 1073 терестрички одређене аномалије висина. Транслацијом аномалија висина по нормали, заменом места са нормалним висинама, долази се до површи квазигеоида (Odalović, 2010), па се може рећи да је на слици 4.4 (b) приказан општи облик квазигеоида на територији Србије.

4.3 Примена глобалних модела на локалном подручју

Height anomaly determination in local areas

На скупу од 1073 тачке примењена је једначина (4.1) и глобални модел GOCO03s, а добијени резултати одређивања аномалија висина и њихових разлика са терестрички одређеним аномалијама приказани су на слици 4.5 и табели 4.2.



Слика 4.5: Графички прикази резултата одређених применом модела GOCO03s (јединице m, еквидистанца 0.20 m)

Табела 4.2: Основни статистички подаци ζ^{GOCO03s} и $R^{\zeta^{\text{GOCO03s}}-\zeta}$ ($n=1073$)

Параметар	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>SV</i>	<i>SD</i>
ζ^{GOCO03s} [m]	42.35	46.61	44.60	0.85
$R^{\zeta^{\text{GOCO03s}}-\zeta}$ [m]	-0.81	0.61	-0.06	0.28

На основу датих приказа може се уочити следеће:

- модел GOCO03s подједнако добро апроксимира аномалије висина на територији Србије и у равним деловима (северни део Србије), као и у пределима са израженим топографским масама (јужни део Србије),
- распон аномалија висина одређених применом модела од 4.26 m свега је 18 центиметара различит од распона терестрички одређених аномалија,
- при чему је распон разлика 1.42 m,
- средња вредност разлика аномалија висина достиже вредности од свега 6 центиметара,
- али са стандардном девијацијом од 28 центиметара,
- брзина промене разлика указује да постоје подручја у Србији у којима модел достиже константне разлике са терестрички одређеним аномалијама висина (готово да нема промена површи разлика у одређеним правцима на растојањима и већим од 100 km),
- али постоје и подручја са променама и до 80 центиметара на растојању од 100 km.

4.4 Аномалије висина и резолуција модела

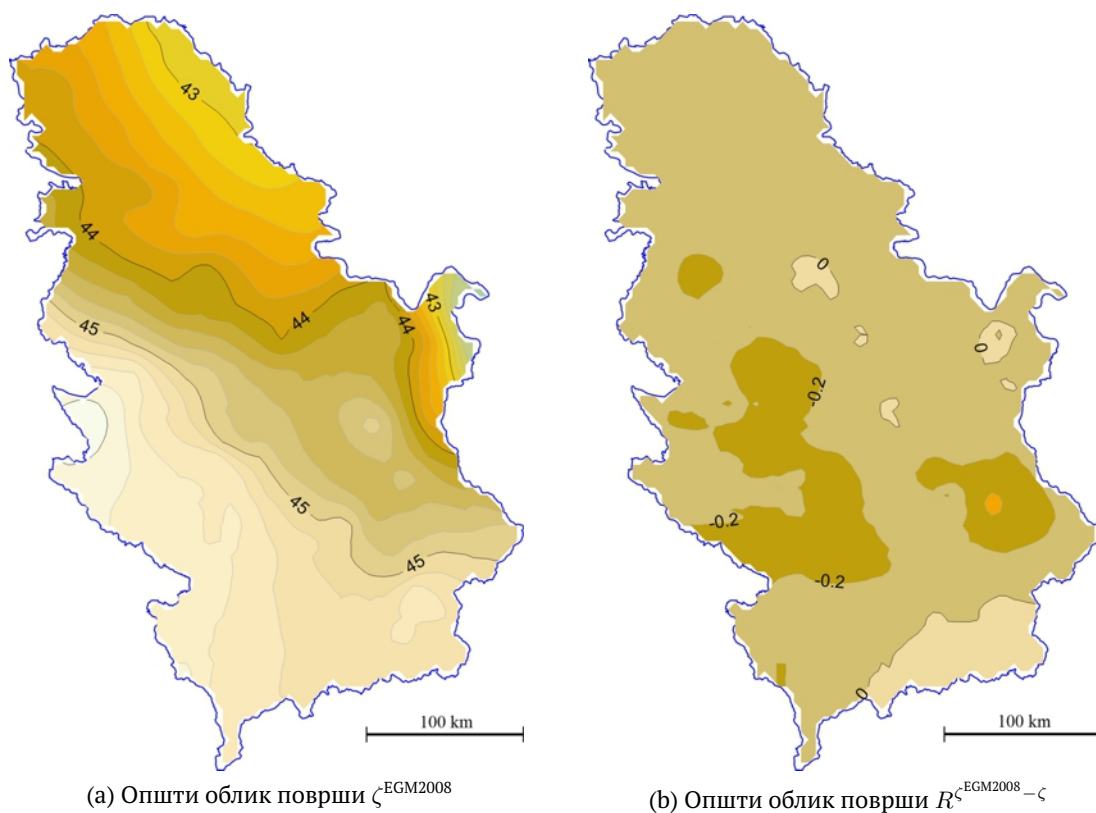
Height anomaly and the global model resolution

У циљу приказа утицаја резолуције глобалног модела у поступку одређивања аномалија висина примељен је и модел EGM2008, а као и у претходном случају, релевантни подаци су приказани на слици 4.6 и табели 4.3.

Оно што се може једнозначно уочити из приказаних резултата је следеће:

- распон аномалија висина одређених применом EGM2008 је 3.91 m, односно за 16 cm различит од терестрички одређених аномалија висина,
- распон разлика је свега 66 cm, што практично значи да се моделом могу апроксимирати аномалије висина чија је тачност сигурно већа од 70 cm,
- и то са средњом вредношћу од 13 cm

- и стандардном девијацијом од 10 cm.



Слика 4.6: Графички прикази резултата одређених применом модела EGM2008 (јединице m, еквидистанца 0.20 m)

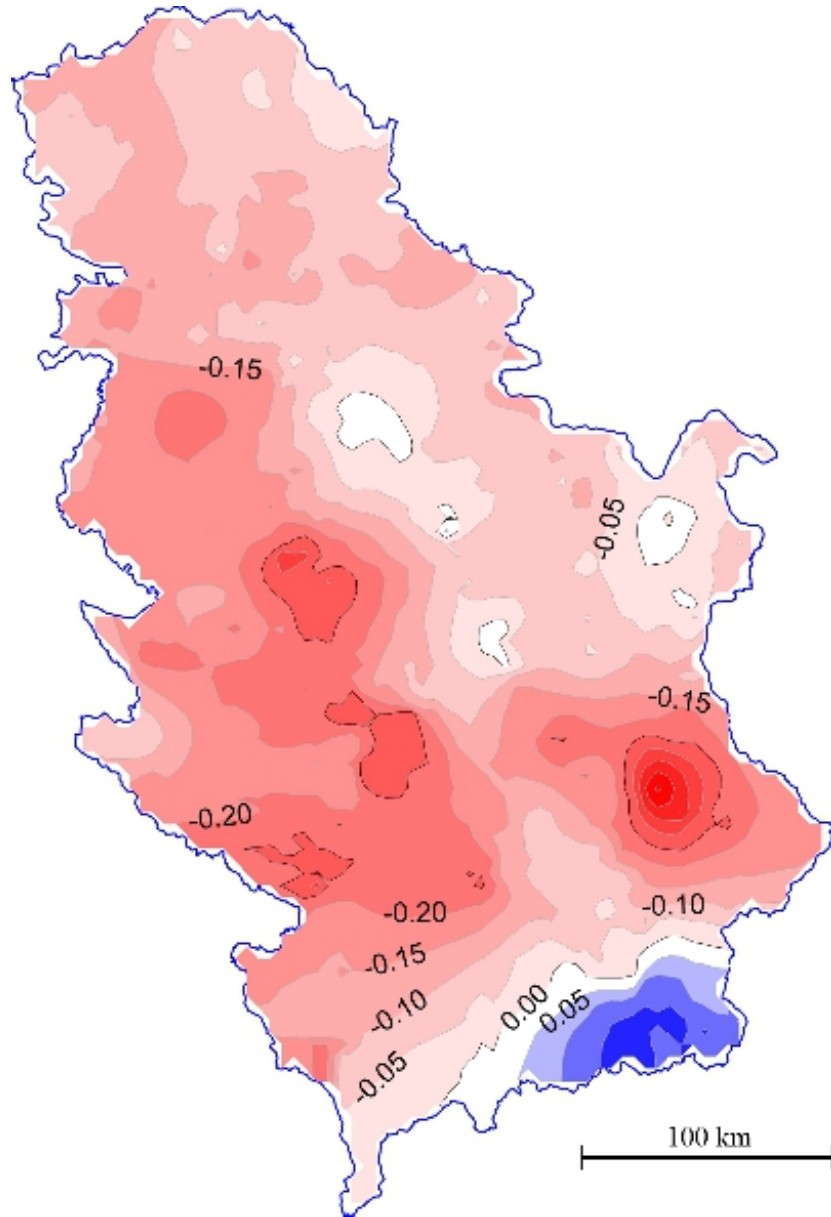
Табела 4.3: Основни статистички подаци $\zeta^{EGM2008}$ и $R^{\zeta^{EGM2008}-\zeta}$ ($n=1073$)

Параметар	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>SV</i>	<i>SD</i>
$\zeta^{EGM2008}$ [m]	42.28	46.19	44.52	0.78
$R^{\zeta^{EGM2008}-\zeta}$ [m]	-0.49	0.17	-0.13	0.10

Приказ површи разлика дат је у таквом облику да се директно може поредити са разликама аномалија висина које се постижу применом модела GOCO03s (боје и еквидистанца приказа међусобно су усклађене). Из тог разлога може се стећи утисак, само на основу графичког приказа, да се моделом EGM2008 могу апроксимирати аномалије висина у потпуности на целој територији Србије. За растојања до неких 100 km у било ком делу Србије, у релативном смислу то и јесте случај. Аномалије висина одређене

са EGM2008 разликују се од терестричких аномалија са распоном од маскимално 40 cm што практично износи 4 cm по километру растојања, што и јесте више него довољно за практичне радове, **али на растојању од 100 km.**

Да би се у што већој мери уочиле апсолутне разлике између аномалија висина одређених применом EGM2008 и терестричких аномалија висина дат је приказ опште површи разлика $R^{\zeta^{\text{EGM2008}}-\zeta}$ на наредној слици, независно од опште површи разлика $R^{\zeta^{\text{GOC005s}}-\zeta}$.



Слика 4.7: Општи облик површи $R^{\zeta^{\text{EGM2008}}-\zeta}$ (јединице m, еквидистанца 0.05 m)

Поред свега наведеног посебно интересантно је навести следеће ([Odalović et al., 2016](#)):

исти резултати одређивања аномалија висина могу се добити применом модела EGM2008 само коришћењем (првих) коефицијената до закључно степена 1181.

Коришћење осталих коефицијената модела мења вредности аномалије висина на нивоу унутар 1 cm.

**Одређивање поремећајног убрзања
и угла одступања вертикале
применом глобалних модела**

Gravity disturbance and the deflection of the vertical determination by global models

5.1 Одређивање поремећајног убрзања

Gravity disturbance

Поремећајно убрзање одређено на основу коефицијената глобалних модела, при-
меном (2.5), односи се на разлику вектора убрзања Земљине теже и нормалног убрзања
у истој тачки на физичкој површи Земље (Слика 5.1).

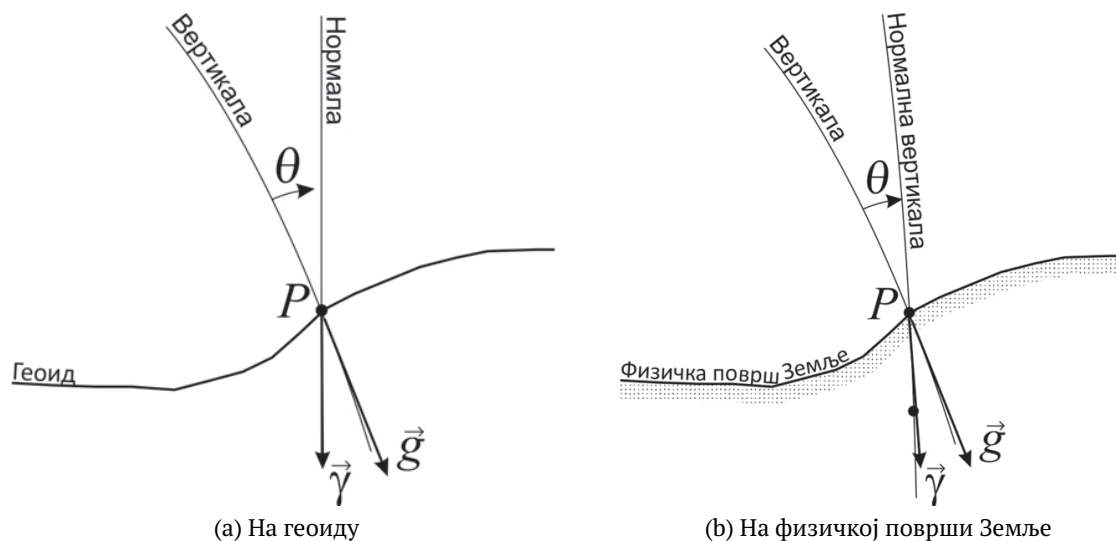
Историјски посматрано предност при одређивању геоида је давана концепту пуног
упоређења Нормалне и реалне Земље, путем креирања разлике вектора који доводи
до аномалија убрзања и решавања трећег проблема граничних вредности.

Данас је применом GNSS далеко једноставније одредити елипсоидне висине тачака у
односу на одређивање њихових нормалних или ортометријских висина и срачунати
поремећајно убрзање применом релације:

$$\delta g = g_P - \gamma_P, \quad (5.1)$$

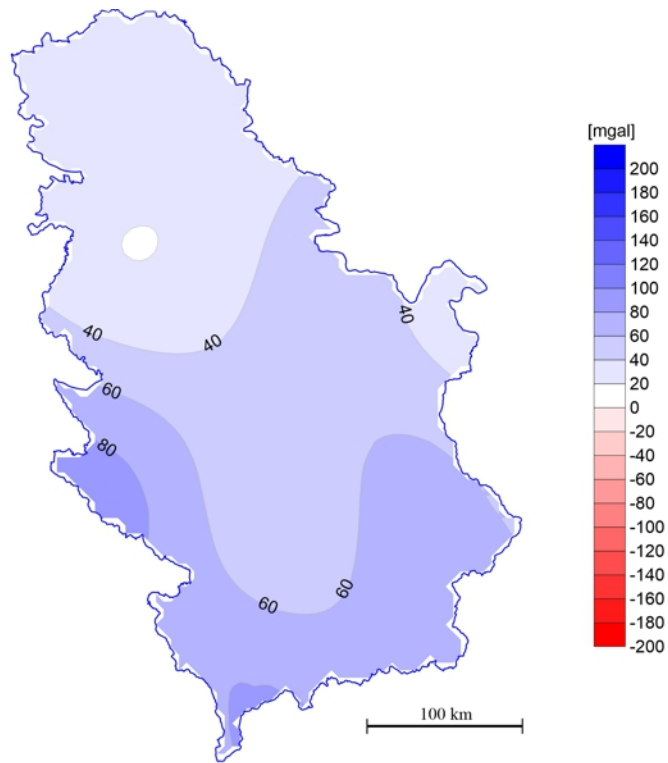
где је γ_P вредност која се може одредити на основу (3.3) при чему је вредност нормалне
висине потребно заменити елипсоидном висином h .

Овакав приступ доводи до одређивања референтних геодетских површи применом ре-
шавања другог проблема граничних вредности теорије потенцијала, односно решава-
њем Нојмановог проблема.



Слика 5.1: Вектори реалног и нормалног убрзања

У циљу илустрације одређивања поремећајног убрзања применом глобалног мо-
дела GOCO03s искоришћени су исти подаци као и у случају одређивања аномалија убр-
зања, без обзира на чињеницу да висине тачака које су коришћене у прорачунима нису
елипсоидне. Подаци ових прорачуна приказани су на слици 5.2 и табели 5.1.



Слика 5.2: Општи облик површи поремећајног убрзања (јединице mgal, еквидистанца 20 mgal)

Табела 5.1: Основни статистички подаци $\delta g^{\text{GOCO03s}}$ ($n=4083$)

Параметар	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>SV</i>	<i>SD</i>
$\delta g^{\text{GOCO03s}}$ [m]	19.48	89.24	49.28	16.99

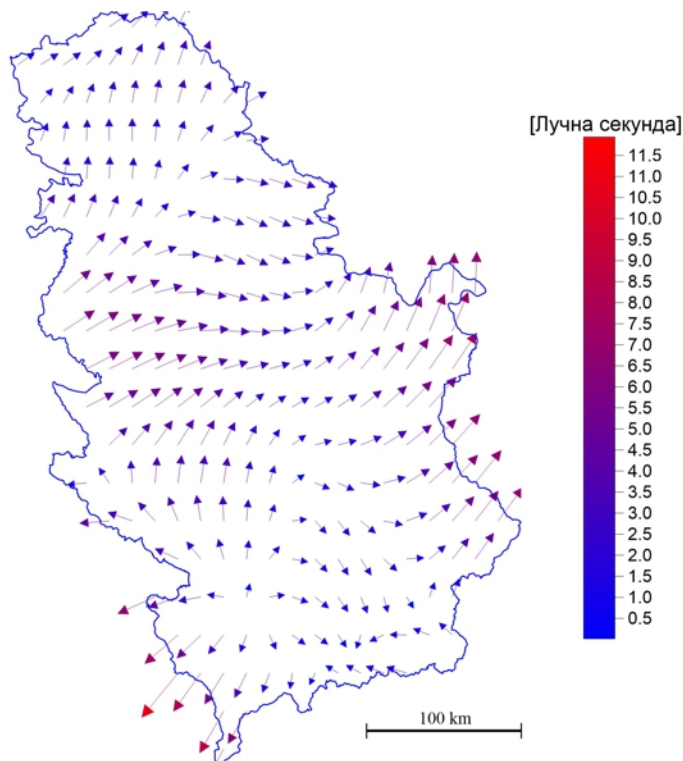
У погледу резолуције важе исти закључци као и код одређивања аномалија убрзања. Применом модела високих резолуција одредиће се боља апроксимација поремећајног убрзања.

У циљу масовне примене поремећајног убрзања мора се обезбедити гравиметријски премер такав да се за сваку тачку гравиметриског премера одреде и елипсоидне висине тачака.

5.2 Одређивање компоненти одступања вертикале

Deflection of the vertical

У циљу илустрације одређивања компоненти одступања вертикала на неком локалном подручју искоришћени су подаци као и у случају аномалија убрзања и поремећајног убрзања. Примењене су једначине 2.7 и 2.8 при чему је, као и у претходним случајевима, коришћено γ уместо γ_0 . Илустрације компоненти су дате на једном графичком приказу у облику вектора одступања на слици 5.3, а основни статистички подаци дати су у табели 5.2.



Слика 5.3: Векторски приказ угла одступања вертикале (јединице лучна секунда)

Табела 5.2: Основни статистички подаци ξ^{GOCO03s} и η^{GOCO03s} ($n=4083$)

Параметар	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>SV</i>	<i>SD</i>
ξ^{GOCO03s} ["]	-7.22	5.33	1.38	1.95
η^{GOCO03s} ["]	-10.67	6.86	1.27	2.12

Боје на приказу вектора су дате да би се додатно утицало на утисак интензитета вектора, а смер вектора је дефинисан комбинацијом знака компоненти одступања вертикала.

Варијансе степена и грешке варијанси степена глобалних модела

Degree Variances and Error Degree Variances of the global geopotential models

6.1 Варијансе степена и грешке варијанси степена

Degree Variances and Error Degree Variances

Степене варијансе и грешке степених варијанси су величине које омогућавају да се процени квалитет глобалног модела или боље рећи међусобно упореди квалитет глобалних модела, сагласно оценама тачности коефицијената које следе при одређивању коефицијената глобалног модела.

Изрази путем којих се рачунају степене варијансе и грешке степених варијанси, респективно, су следећи:

- аномалијски потенцијал,

$$\sigma_n^2(T) = \left(\frac{GM}{R}\right)^2 \left(\frac{a}{R}\right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} + \Delta\bar{S}_{nm}), \quad (6.1)$$

$$\sigma_n^2(\epsilon_T) = \left(\frac{GM}{R}\right)^2 \left(\frac{a}{R}\right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\sigma_{\Delta\bar{C}_{nm}} + \sigma_{\Delta\bar{S}_{nm}}), \quad (6.2)$$

- аномалије убрзања,

$$c_n^2(\Delta g) = (n-1)^2 \left(\frac{GM}{R^2}\right)^2 \left(\frac{a}{R}\right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} + \Delta\bar{S}_{nm}), \quad (6.3)$$

$$c_n^2(\epsilon_{\Delta g}) = (n-1)^2 \left(\frac{GM}{R^2}\right)^2 \left(\frac{a}{R}\right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\sigma_{\Delta\bar{C}_{nm}} + \sigma_{\Delta\bar{S}_{nm}}), \quad (6.4)$$

- аномалије висина/ундулација геоида,

$$c_n^2(N) = \left(\frac{GM}{\gamma a}\right)^2 \left(\frac{a}{R}\right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} + \Delta\bar{S}_{nm}), \quad (6.5)$$

$$c_n^2(\epsilon_N) = \left(\frac{GM}{\gamma a}\right)^2 \left(\frac{a}{R}\right)^{2n} \sum_{m=0}^n (\sigma_{\Delta\bar{C}_{nm}} + \sigma_{\Delta\bar{S}_{nm}}), \quad (6.6)$$

где је

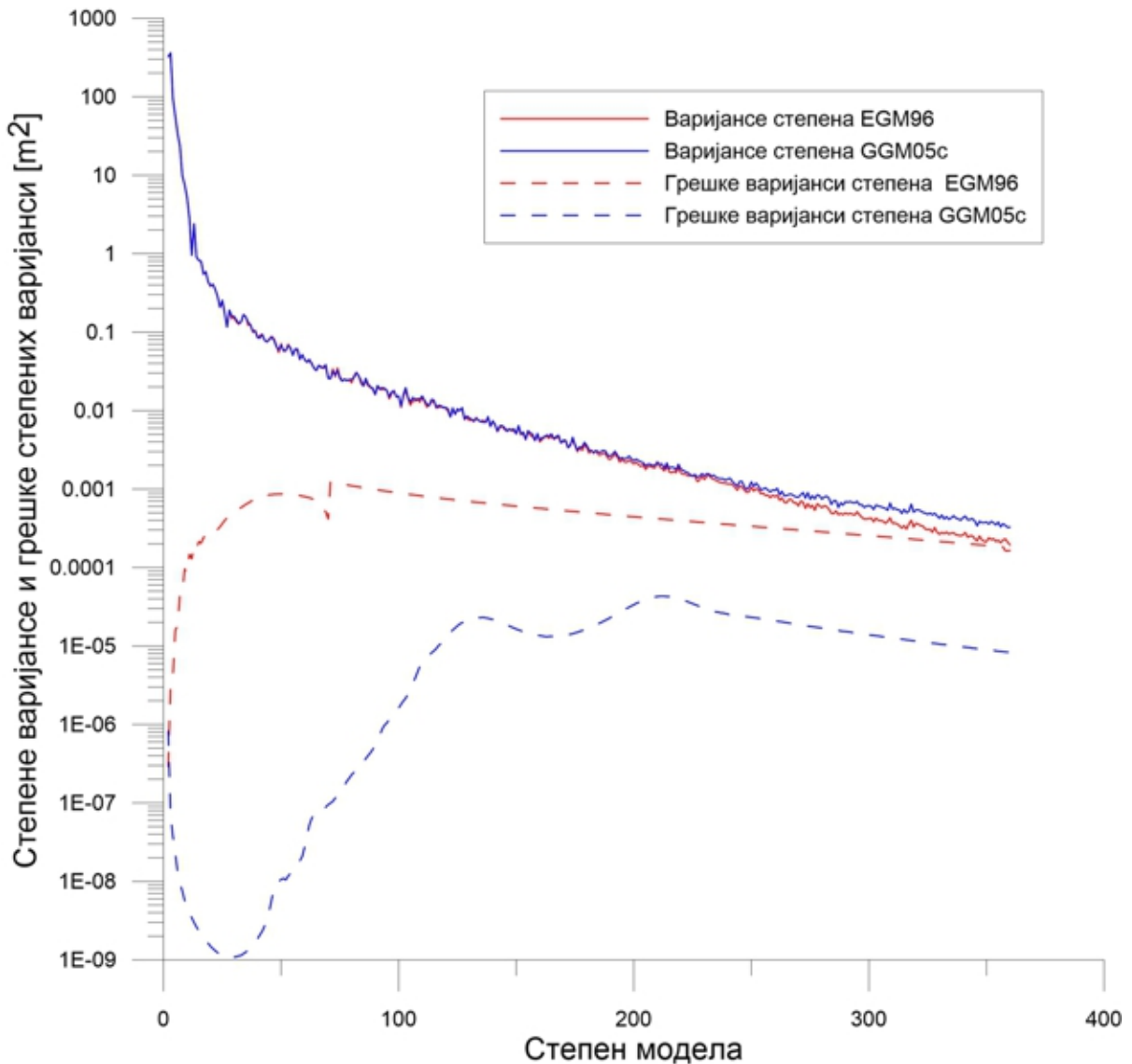
$$\gamma = \frac{GM}{a^2}. \quad (6.7)$$

6.2 Примена за моделе EGM96 и GGM05c

Degree Variances and Error Degree Variances of the global models EGM96 and GGM05c

На слици 6.1 приказане су степене варијансе и грешке степених варијанси за моделе EGM96 и GGM05c, срачунате управо применом приказаних израза (6.5) и (6.6). Како је модел GGM05c публикован у zero-tide систему претходно је трансформисан у tide-free систем додавањем вредности $4.2 \cdot 10^{-9}$ на коефицијент степена 2 и реда 0 (Ries et al., 2016).

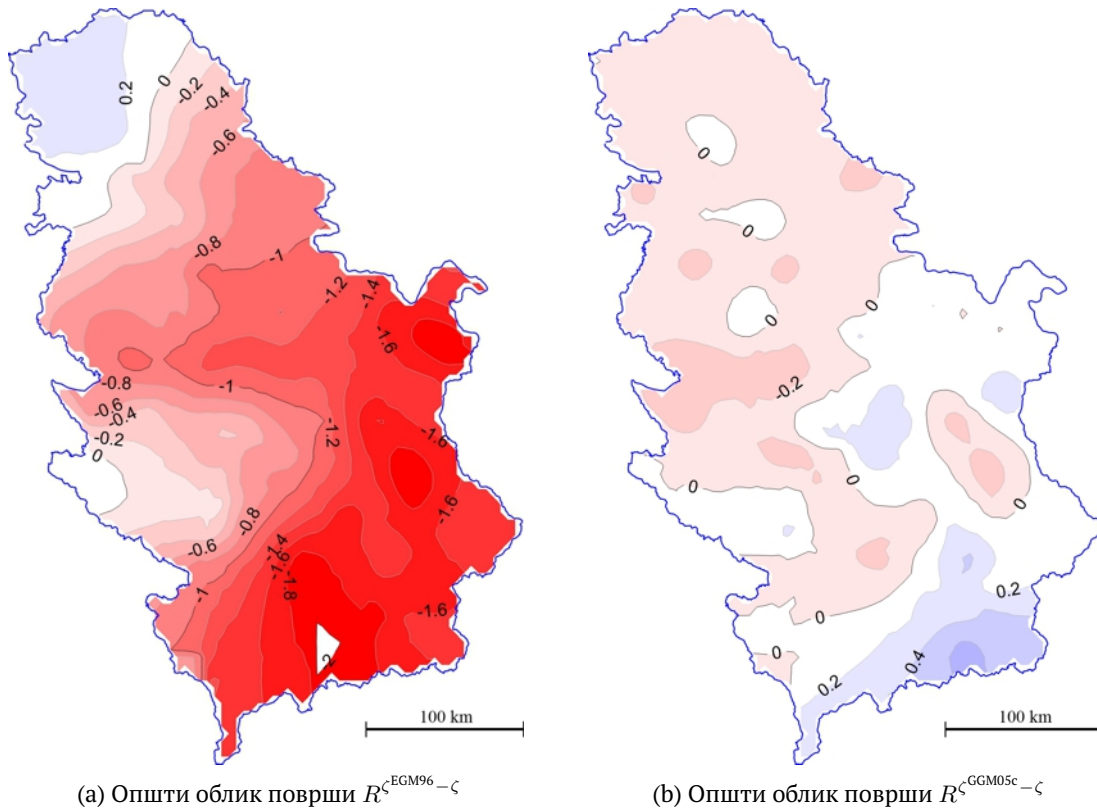
Са слике је могуће уочити да су грешке степених варијанси ундулација геоида модела GGM05c значајно по интензитету мање од грешки степених варијанси модела EGM96, што је и очекивани резултат јер су оцене тачности коефицијената модела апроксимативно калибрисане (Ries et al., 2016).



Слика 6.1: Степене варијансе и грешке варијанси степена аномалија висина/ундулација геоида одређене на основу података модела EGM96 и GGM05c

Да модел GGM05c у значајној мери боље апроксимира квазигеоид на територији Србије од модела EGM96 може се уочити тек из резултата одређивања самих аномалија висина применом наведених модела. Графички прикази разлика аномалија висина

одређених применом модела и терестрички одређених аномалија висина приказани су на слици 6.2, а основни статистички подаци у табели 6.1. Стандардна девијација скупа разлика $R^{\zeta \text{GGM05c} - \zeta}$ је 3 пута мања од стандардне девијације скупа разлика $R^{\zeta \text{EGM96} - \zeta}$, при чему је распон скупа разлика $R^{\zeta \text{GGM05c} - \zeta}$ за 1.37 m мањи у односу на распон скупа разлика $R^{\zeta \text{EGM96} - \zeta}$.



Слика 6.2: Графички прикази разлика $R^{\zeta \text{EGM96} - \zeta}$ и $R^{\zeta \text{GGM05c} - \zeta}$ (јединице m, еквидистанца 0.20 m)

Табела 6.1: Основни статистички подаци $R^{\zeta \text{EGM96} - \zeta}$ и $R^{\zeta \text{GGM05c} - \zeta}$ ($n=1073$)

Параметар	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>SV</i>	<i>SD</i>
$R^{\zeta \text{EGM96} - \zeta}$ [m]	-2.03	0.38	-0.87	0.59
$R^{\zeta \text{GGM05c} - \zeta}$ [m]	-0.41	0.63	0.01	0.18

Глобални модели и дефиниције функционала

Global geopotential models and definitions of linear functionals of the anomalous field

7.1 Аномалија убрзања

Gravity anomaly

На основу релације (1.16) за интензитет убрзања Земљине теже може се писати:

$$g_p = |\nabla W_P| = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2}. \quad (7.1)$$

Са друге стране за нормално убрзање важи (1.53) па следи да је његов је његов интензитет дефинисан са:

$$\gamma = |\nabla U| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}. \quad (7.2)$$

Овакве релације између вектора убрзања и релевантних потенцијала омогућавају да се аномалија убрзања директно прикаже као разлика интензитета (3.1) и да се избегне сферна апроксимација дефинисана изразом (1.77). За потребе оваквих прорачуна неопходно је имати прве изводе потенцијала по координатним осама геоцентричног координатног система.

Узимајући у обзир релације (7.3) између парцијалних извода потенцијала по правоуглим координатама и парцијалних извода потенцијала по сферним координатама:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial W}{r\partial\theta}, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{r\sin\theta\partial\lambda}, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial r}, \quad (7.3)$$

као и реални потенцијал у облику који је дат са (2.1) (ограничавајући сумирање само до максималног степена) за прве парцијалне изводе реалног потенцијала следе редом релације:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= -\frac{GM}{ra} \sum_{n=0}^{N_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \frac{\partial \bar{P}(t)}{\partial \theta} - \omega^2 r \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{GM}{r \sin \theta a} \sum_{n=0}^{N_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (-m\bar{C}_{nm} \sin m\lambda + m\bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}(t), \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= -\frac{GM}{ra} \sum_{n=0}^{N_{max}} (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}(t) + \omega^2 r \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Исте релације дефинисане изразима (7.3) дате за реални потенцијал важе и за нормални потенцијал. За нормални потенцијал дефинисан изразом (2.2) (са сумирањем само до 8. степена) следе редом први парцијални изводи:

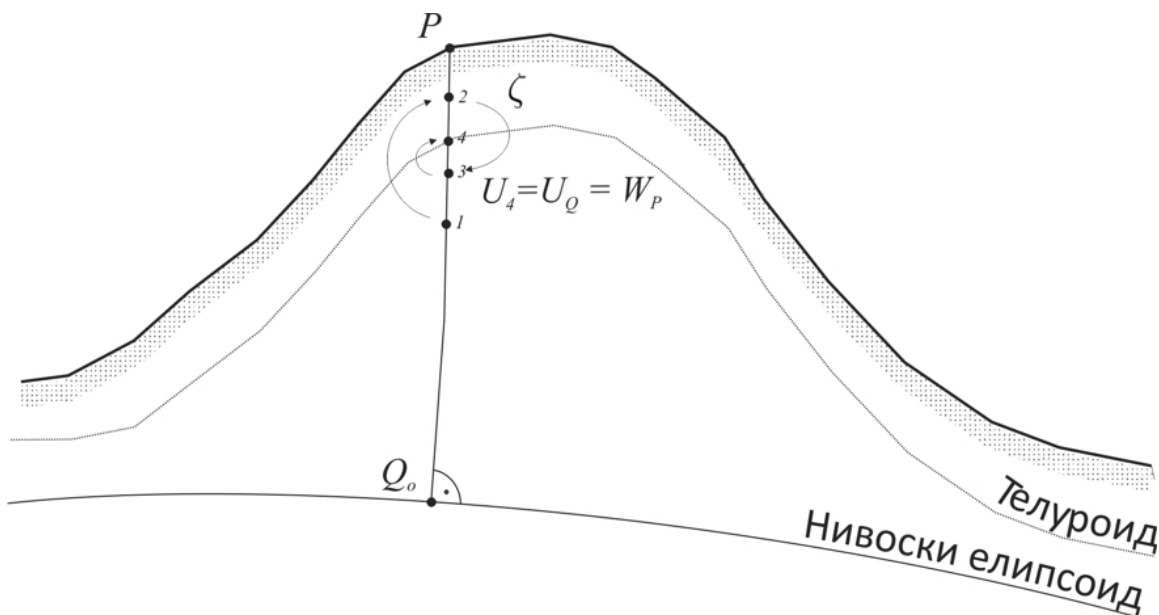
$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{GM}{ra} \sum_{n=0(2)}^8 \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \bar{C}_n^U \frac{\partial \bar{P}(t)}{\partial \theta} - \omega^2 r \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{GM}{ra} \sum_{n=0(2)}^8 (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \bar{C}_n^U \bar{P}_n(t) + \omega^2 r \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (7.5)$$

7.2 Аномалија висина Height anomaly

Аномалија висине такође се може одредити применом глобалног модела сагласно њеној дефиницији. Поступак одређивања кратко је описан у следећим алинејама (Слика 7.1) под условом да је унапред дефинисана дозвољена разлика реалног и нормалног потенцијала $(W - U)_{max}$ у процесу одређивања саме аномалије висине.

1. Применом израза (2.1) срачуна се вредност реалног потенцијала у тачки P (бројна вредност W_P). Наравно, сумирање се завршава на N_{max} .
2. На нормалној вертикали (нормали) тачке P одабере се произвољна тачка 1 чије су координате $(x, y, z)_1$. Користе се коефицијетни закључно до $n=8$.
3. Применом (2.2) срачуна се вредност нормалног потенцијала у тачки 1 (бројна вредност U_1).
4. Срачуна се разлика $R = W_P - U_1$.
5. Ако је испуњен услов $R < (W - U)_{max}$ тачка 1 се усваја за тачку Q , у супротном бира се нова тачка (на слици тачка 2) и одређују се њене координате.
6. Поступак одабира¹ нове тачке понавља се све док се не задовољи дефинисан услов.

На слици је тачка 4 приказана као решење које задовољава услов. Рачунањем растојања од тачке 4 до тачке P финално се рачуна аномалија висине ζ тачке P .



Слика 7.1: Поступак одређивања тачке Q

¹У циљу убрзања процеса одабирања адекватне тачке која задовољава услов могуће је користити неку од нумеричких метода одређивања минимума (максимума), примера ради Њутнову метода сечица.

За потребе одређивања компоненти одступања вертикала разматрају се њихове дефиниције (Heiskanen & Moritz, 1967) које се у математичком смислу своде на релације:

$$\xi = \Phi - B, \quad \eta = (\Lambda - L) \cos B. \quad (7.6)$$

Компоненте одступања вертикале, користећи (2.1) и (2.2), релативно је једноставно одредити водећи рачуна о везама између природних координата и правоуглих геоцентричних координата (Heiskanen & Moritz, 1967):

$$\Phi = \arctan \left(\frac{-\frac{\partial W}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2}} \right), \quad (7.7)$$

$$\Lambda = \arctan \left(\frac{\frac{\partial W}{\partial y}}{\frac{\partial W}{\partial x}} \right), \quad (7.8)$$

и финално

$$B = \arctan \left(\frac{-\frac{\partial U}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}} \right). \quad (7.9)$$

Аномалије висина одређене применом дефиниција функционала аномалијског потенцијала и аномалија добијених по формулама у претходним поглављима разликују се, на територији Србије, за вредности које су испод десетхиљадитог дела милиметра. Без обзира на наведене разлике велики број аутора даје предност једначинама приказаним у оквиру овог поглавља у односу на релације приказане у претходном делу текста (Barthelmes, 2013; Gruber et al., 2010).

Прилагођавање глобалних модела

Tailoring of the global geopotential models

8.1 Теоријске основе прилагођавања модела

Theoretical background

Средњу вредност аномалије убрзања са неког подручја Земљине површи S , величине $\Delta B \times \Delta L$, могуће је применом глобалног модела одредити из израза (Weber & Zomorrodian, 1988):

$$\overline{\Delta g}_{GGM} = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=0}^{N_{max}} (n-1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \beta_n \sum_{m=0}^n [\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_{nm}(t), \quad (8.1)$$

где је β_n функција дефинисана изразом (Sjöberg, 1980):

$$\beta_n = \frac{1}{1 - \cos \psi_0} \int_{\cos \psi_0}^1 P_n(t) dt, \quad (8.2)$$

где су $P_n(t) = P_n(\cos \theta)$ Лежандрови полиноми:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n - 1)^n \quad (8.3)$$

и где је ψ_0 пречник кружног подручја на јединичној сфери σ .

Са друге стране средње вредности аномалија слободног ваздуха $\overline{\Delta g}$ могуће је одредити и применом терестричких опажања на посматраном подручју S .

Разлику наведених аномалија,

$$\delta = \overline{\Delta g} - \overline{\Delta g}_{GGM}, \quad (8.4)$$

могуће је приказати у облику сфернохармонијског реда при чему се прираштаји коефицијената могу приказати у облику:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{\bar{r}^2}{GM} \left(\frac{\bar{r}}{a}\right)^n \frac{1}{(n-1)\beta_n} \delta \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{array} \right\} \bar{P}_{nm}(t) d\sigma, \quad (8.5)$$

где је \bar{r} средњи геоцентрични радијус дела елипсоида који одговара делу подручју S на површи Земље.

Када се располаже са l разлика δ горњи израз може се представити у облику модификације,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^l \frac{\bar{r}_i^2}{GM} \left(\frac{\bar{r}_i}{a}\right)^n \frac{1}{(n-1)\beta_{n,i}} \delta_i \iint_{\Delta\sigma_i} \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{array} \right\} \bar{P}_{nm}(t) d\sigma. \quad (8.6)$$

Како је елемент сфере у сферним координатама $d\sigma = \sin \theta d\theta$, а свако $\Delta\sigma_i$ је ограничено са $\lambda_E, \lambda_W, \theta_S$ и θ_N следи (Paul, 1978):

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^l \frac{\bar{r}_i^2}{GM} \left(\frac{\bar{r}_i}{a}\right)^n \frac{1}{(n-1)\beta_{n,i}} \delta_i \int_{\lambda_{W_i}}^{\lambda_{E_i}} \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{array} \right\} d\lambda \int_{\theta_{N_i}}^{\theta_{S_i}} \bar{P}_{nm}(t) \sin \theta d\theta. \quad (8.7)$$

Овим путем добијени прираштаји коефицијената додати на вредност оригиналних чине нови скуп коефицијената,

$$\begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix}_T = \begin{Bmatrix} \delta \bar{C}_{nm} \\ \delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix}, \quad (8.8)$$

и могу се сматрати прилагођеним територији на којој су одређиване разлике δ .

Овим поступком, а у сагласности са величином елемента S који дефинише степен и ред модела, могуће је одредити коефицијенте већег степена и реда од степена и реда коефицијената оригиналног модела. Поред наведеног, а у циљу што бољег прилагођавања, поступак је могуће изводити у више наврата (у итерацијама), формирајући после сваког циклуса нове разлике, при чему је неопходно увести критеријум (или критеријуме) у циљу ограничења броја итерација.

8.2 Прилагођавање модела EGM96

Tailoring of the EGM96

У циљу илустрације прилагођавања модела у оквиру овог уџбеника искоришћен је сав расположиви материјал, односно 93830 аномалија слободног ваздуха и 1073 дискретне вредности аномалија висина, а прилагођени су коефицијенти модела EGM96. За први коефицијент који је у оквиру процеса прилагођавања био мењан усвојен је коефицијент степена 37 (Odalović, 2005).

Прилагођавање је извршено у следећим корацима:

1. срачунате су разлике аномалија висина добијене применом модела EGM96 и терестричких аномалија висина,

$$\Delta\zeta = \zeta^{EGM96} - \zeta, \quad (8.9)$$

2. цела територија Србије подељена је на подручја величине $5' \times 5'$,
3. за свако подручје срачуната је средња аномалија слободног ваздуха $\bar{\Delta}g$
4. и средња аномалија $\bar{\Delta}g_{EGM96}$ из глобалног модела EGM96 применом (8.1),
5. на основу (8.4) срачунате су вредности δ ,
6. применом нумеричке интеграције у изразу (8.7) срачунати су прираштаји коефицијената,
7. а затим и прилагођени коефицијенти применом (8.8),
8. коришћењем прилагођених коефицијената одређене су аномалије висина $\zeta^{EGM96,0}$ у 1073 тачке (0 је ознака итерације),
9. срачунате су 1073 разлике

$$\Delta\zeta^0 = \zeta^{EGM96,0} - \zeta, \quad (8.10)$$

10. средња вредност разлика,

$$\overline{\Delta\zeta^0} = \frac{1}{1073} \sum_{i=1}^n \Delta\zeta_i^0, \quad (8.11)$$

11. као и стандардна девијација разлика,

$$\sigma_{\Delta\zeta^0} = \sqrt{\frac{1}{1072} \sum_{i=1}^n (\Delta\zeta_i^0 - \overline{\Delta\zeta^0})^2}. \quad (8.12)$$

Извођењем поступака од 1 до 10 извршена је једна итерација. У случају да је после итерације испуњен услов $\sigma_{\Delta\zeta} \leq 1$ cm посматрана итерација је сматрана последњом.

У свакој наредној итерацији уведене су следеће промене:

- у кораку 4 средње аномалије су одређиване на основу прилагођених коефицијената модела из претходне итерације,
- у кораку 8 коришћени су прилагођени коефицијенти текуће итерације,
- а тако добијене вредности аномалија висина коришћене су за примену израза од (8.10) до (8.12).

Процес прилагођавања глобалног модела EGM96 извршен је у 6 итерација, а основни статистички подаци новодобијених (прилагођених) аномалија висина, из итерације у итерацију, приказани су у наредној табели. У првој врсти табеле приказани су основни статистички подаци скупа разлика добијеног коришћењем оригиналних коефицијената EGM96.

Табела 8.1: Основни статистички подаци $\Delta\zeta$ у итерацијама (број разлика 1073)

Разлике [m]	<i>Min</i>	<i>Max</i>	$\overline{\Delta\zeta}$	$\sigma_{\Delta\zeta}$	<i>Max - Min</i>
$\Delta\zeta = \zeta^{\text{EGM96}} - \zeta$	-2.03	0.38	-0.87	0.59	2.41
$\Delta\zeta^0 = \zeta^{\text{EGM96,0}} - \zeta$	-1.45	0.04	-0.69	0.27	1.50
$\Delta\zeta^1 = \zeta^{\text{EGM96,1}} - \zeta$	-1.28	0.01	-0.61	0.24	1.29
$\Delta\zeta^2 = \zeta^{\text{EGM96,2}} - \zeta$	-1.20	0.02	-0.58	0.23	1.22
$\Delta\zeta^3 = \zeta^{\text{EGM96,3}} - \zeta$	-1.16	0.02	-0.56	0.22	1.18
$\Delta\zeta^4 = \zeta^{\text{EGM96,4}} - \zeta$	-1.13	0.02	-0.55	0.22	1.15
$\Delta\zeta^5 = \zeta^{\text{EGM96,5}} - \zeta$	-1.11	0.02	-0.55	0.22	1.13

Из података датих у претходној табели може се уочити да је распон скупа аномалија висина $\Delta\zeta^5$ за 1.28 m мањи од распона скупа аномалија висина $\Delta\zeta$ и то са стандардном девијацијом која је за 37% мања од стандардне девијације скупа $\Delta\zeta$.

На приказани начин могуће је прилагодити било који глобални модел, при чему се ново добијени модел може користити само на територији са које су коришћени терестрички подаци у процесу прилагођавања.

Примена глобалних модела у процесу одређивања референтних геодетских површи

Geodetic reference surfaces and the global geopotential models

9.1 Физичка површ Земље, сфера, обртни елипсоид, геоид, нивоски елипсоид и квазигеоид

Physical surface of the earth, sphere, ellipsoid, ellipsoid of the revolution, geoid, level ellipsoid and quasigeoid

У циљу адекватне примене глобалних модела у поступку одређивања квазигеоида или геоида потребно је направити прецизну разлику између физичке површи тела Земље, сфере, елипсоида, нивоског елипсоида, геоида и квазигеоида.

Физичка површ Земље је, сагласно свим досадашњим предлозима и договорима, површ која раздваја чврсти и течни део тела Земље од њене атмосфере. Површ је, са друге стране сагласно свим математичким дефиницијама, у основи само скуп тачака, математичка фигура у простору.

Када би

- постојао неки изузетно напредан начин,
- да се одреде координате свих тачака физичке површи Земље
- и то у само једном тренутку времена,

тада би облик тела Земље био у потпуности одређен, и то само, као што је и наведено, у једном тренутку времена.

За визуелну представу свих тако одређених тачака, такође применом неког напредног компјутерског система, могло би се рећи да представља фигуру у простору која се најчешће назива *облик тела Земље*. Визуелна представа би наравно морала бити опет у некој одговарајућој размери.

Физичку површ Земље је веома тешко представити у математичком смислу, путем неких затворених или коначних једначина, тако да до сада не постоје једначине путем којих би било једноставно или барем сврсисходно представити њен облик.

Друга наведена површ у оквиру наслова овог поглавља је *сфера*. Сфера је прецизно дефинисана математичка површ која се мање или више користи као апроксимација физичке површи Земље и то већ више од 2000 година. Математичка једначина путем које се дефинише сфера је врло једноставна. У геоцентричним правоуглим координатама сфера полупречника R дефинисана је једначином:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R, \quad (9.1)$$

па је сагласно томе сферу релативно лако користити у циљу решавања проблема позиционирања или креирања картографских приказа. Данас се сфера која се користи у геодезији често назива *терестричком сфером*.

Пре више од 300 година Исак Њутн је предпоставио да се облик тела Земље може представити *обртним елипсоидом* и то због ефеката ротације Земље, односно због ефеката центрифугалне силе на тело које ротира. Већ готово 280 година елипсоид се и користи

управо за решавање проблема позиционирања и картографије, али и у астрономији, геофизици и другим сродним научним дисциплинама.

И сфера и обртни елипсоид коришћени су за потребе геометријског дефинисања физичке површи тела Земље.

Са друге стране, за фигуру у простору којом би се дефинисао облик тела Земље К. Ф. Гаус је 1827 године предложио затворену површ која је у свакој својој тачки управна на правац вектора Земљине теже и која се поклапа са површи дефинисаном средњим нивоом идеално мирних мора и океана. Како се око 73% физичке површи Земље налази под морима и океанима, усвајање управо њихове средње и идеално мирне површи природан је пут решавања проблема одређивања облика тела Земље. По предлогу немачког физичара Листинга из 1872. године, површ коју је дефинисао Гаус, назива се *геоид* (Moritz, 1990).

За разлику од ранијих предлога, сфере и обртног елипсоида, Гаусов предлог за облик тела Земље подразумева не само геометријски већ и физички приступ.

У којој мери је Гаусова идеја о начину дефинисања облика тела Земље имала значаја може се закључити из опште прихваћене дефиниције геодезије (Torge, 2001): геодезија је наука која се бави одређивањем фигуре и спољашњег гравитационог поља Земље и других небеских тела, праћењем њихових промена у времену, из резултата опажања предузетих на физичкој површи или у простору ван поменутих тела.

Прву прецизну математичку дефиницију геоида, као једне од нивоских површи реалног потенцијала, дао је Г. Г. Стокс 1849. године (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005) у облику једначине:

$$N_P = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma, \quad (9.2)$$

где је: N_P ундулација геоида у тачки P која се налази на физичкој површи Земље, R полупречник терестричке сфере, γ_0 вредност нормалног убрзања на површи нивоског елипсоида на нормали која је провучена кроз тачку P на нивоски елипсоид, σ јединична сфера, Δg убрзање Земљине теже, $S(\psi)$ Стоксова функција, ψ сферно растојање и $d\sigma$ елемент јединичне сфере.

Наведена Стоксова формула важи под следећим условима:

- ундулација геоида тачке P , која се налази на физичкој површи Земље, представља одсечак нормале тачке P од геоида до елипсоида,
- елипсоид је нивоска површ нормалног потенцијала или потенцијала теже Нормалне Земље,
- тело Земље мора бити круто тело,
- изнад површи геоида нема никаквих маса (ни чврсте ни течне Земље, нити Земљине атмосфере),

- шта више, изнад геоида нема никаквих тела у читавом простору,
- аномалије убрзања се односе на геоид и елипсоид као нивоску површ Нормалне Земље и познате су у свакој тачки геоида,
- центар елипсоида поклапа се са центром масе Земље (не неки референц елипсоид већ елипсоид као нивоска површ нормалне Земље).

Поред свега наведеног потребно је напоменути да је формула дата при апроксимацији елипсоида сфером, такозваној *сферној апроксимацији*, а не апроксимацији физичке површи Земље са сфером.

Оно што произилази из свега реченог, а битно је за ово поглавље, је следеће:

- геоид је нивоска површ реалног потенцијала, а не облик тела Земље,
- геоид је апстракција (као и нивоски елипсоид), другим речима геоид не постоји „у природи”,
- геоид је математички прецизно дефинисана површ која се може одредити само у дискретним вредностима
- и то тек када се дефинише неко идеално тело Земље, у овом случају тело Нормалне Земље и то у циљу њеног упоређења са реалном Земљом,
- нивоски елипсоид нема улогу математичке апроксимација физичке површи Земље у чисто геометријском смислу.

Све до средине прошлог века одређивање геоида био је једини пут који је коришћен при одређивању физичког облика Земље и то применом индиректног приступа. Индиректни приступ подразумева да се елипсоидне висине тачака могу одредити применом релације:

$$h = H^o + N, \quad (9.3)$$

при чему се ортометријске висине H^o могу одредити применом развијања мрежа нивелмана високе тачности, а ундулације геоида N применом формуле Стокса или астрогеодетским методама (Heitz & Tscherning, 1972). Стоксова формула подразумева да су аномалије убрзања познате на геоиду из ког разлога је неопходно вршити редукције интензитета резултата мерења убрзања Земљине теже (Odalović, 2010). Редукције доводе до појаве индиректног ефекта наког чега се применом Стоксове формуле долази до когеоида (Heiskanen & Moritz, 1967), а не геоида. Да би избегао редукције и одредио физичку површ тела Земље са оригиналним мерењима функционала аномалијског потенцијала, без било какве претходне обраде резултата мерења, Молоденски је предложио индиректни приступ у облику:

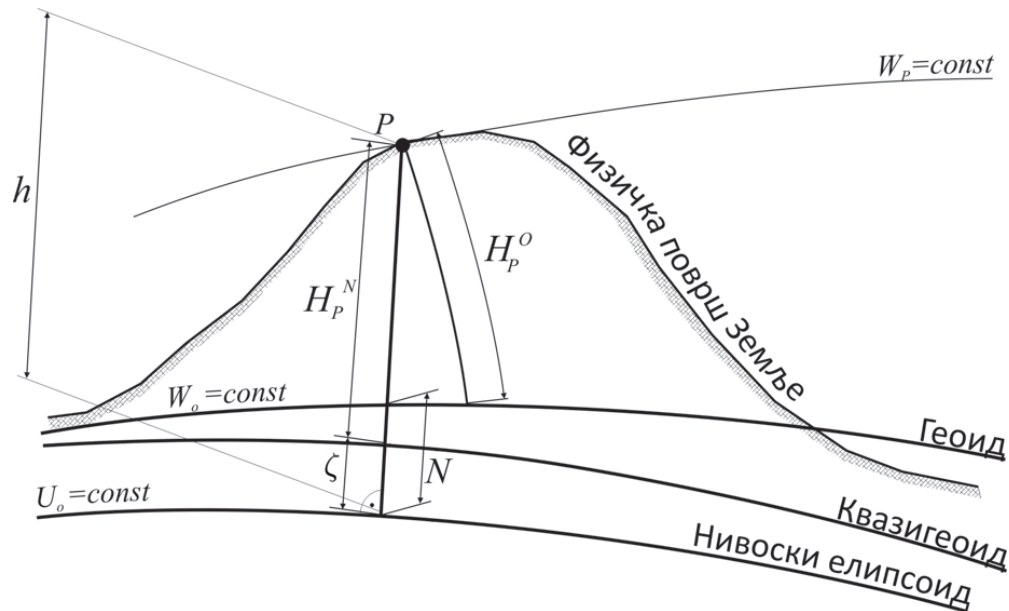
$$h = H^N + \zeta, \quad (9.4)$$

при чему се сада нормалне висине H^N могу одредити такође применом развијања мрежа нивелмана високе тачности, а аномалије висина ζ применом редова Молоденског (Moritz, 1980). Том приликом Молоденски је предложио и дефиниције функционала аномалијског потенцијала на физичкој површи Земље (Поглавља 3 и 4), а посебно

аномалије висина, нормалне висине и телуроид (Слика 4.1). У наредних десетак година значајна предност при одређивању физичке површи Земље давана је предлогу Молоденског и одређивању телуроида, односно аномалија висина, а уведена је једна једноставна трансформација која је довела до дефиниције *квазигеоида*. При дефиницији телуроида Молоденски је предложио да је нормална висина тачке P , која се налази на физичкој површи Земље, одсечак нормалне вертикале од елипсоида до телуроида која не доспева до саме тачке (Слика 4.1). У циљу потпуне сагласности са до тада прихваћеним концептима, нормалној висини тачке P и њеној одговарајућој аномалији висине замењена су места дуж нормалне вертикале и на тај начин сада нормална висина доспева до саме тачке. Скуп свих крајњих тачака аномалија висина чини геометријско место тачака, фигуру у простору, која је названа квазигеоид. Квазигеоид је очигледно и референтна површ нормалних висина (Слика 9.1).

Међутим, теорија физичке геодезије базирана је на аномалијском потенцијалу који је хармонијска функција у спољашњем простору и одговарајућим референтним површима (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005), а по дефиницији телуроид (квазигеоид) *није нивоска површ*.

Из свега наведеног једноставно је закључити да ни геоид ни квазигеоид не представљају облик тела Земље, већ апстракције које се користе у њеном одређивању, а данас су посебно значајани у геодетској пракси када се користе као референтне површи за рачунање висина неке тачке на физичкој површи Земље или у простору ван тела Земље, односно за рачунање ортометријских висина и нормалних висина.



Слика 9.1: Физичка површ Земље, геоид, квазигеоид, нивоски елипсоид, ортометријска (H_p^O), нормална (H_p^N) и елипсоидна висина (h), ундулација геоида (N) и аномалија висине (ζ)

9.2 Одређивање квазигеоида применом глобалних модела

Quasigeoid determination and global geopotential models

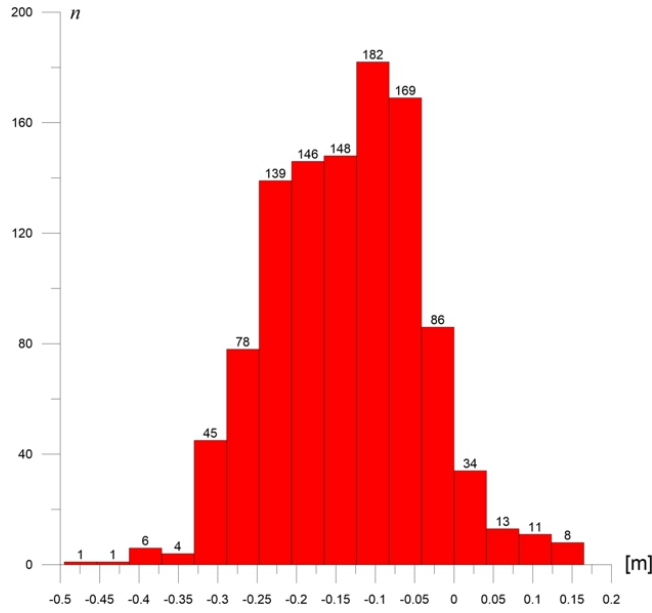
Одређивање квазигеоида је већ више пута приказано почев од поглавља 4. Приказана су одређивања квазигеоида применом модела GOCO03s, EGM2008 и GGM05c, као и поступак прилагођавања модела EGM96 за потребе одређивања квазигеоида. Сумарни приказ разлика одређених аномалија висина са терестричким аномалијама висина дат је у табели 9.1. Из табеле 9.1 може се уочити да се најбоља апроксимација терестричких аномалија висина постиже применом модела EGM2008, али са значајним распонем разлика од 0.66 m. У практичном смислу то значи следеће (хистограм на слици 9.2):

- апроксимација 1073 аномалије висина је одређена са средњом вредношћу од -13 cm
- и стандардном девијациом од свега 10 cm,
- али 765 аномалија висина биће одређене са разликом од ± 20 cm,
- а преосталих 308 биће одређене са разликом која је у распону 20 cm до 66 cm.

Да би се тачност одређивања аномалија висина повећала глобални модели се у циљу одређивања квазигеоида центиметарске тачности **морају комбиновати са додатним информацијама о пољу Земљине теже.**

Табела 9.1: Сумарни основни статистички подаци $\Delta\zeta$ у итерацијама при одређивању квазигеоида (број разлика 1073)

Разлике [m]	<i>Min</i>	<i>Max</i>	$\overline{\Delta\zeta}$	$\sigma_{\Delta\zeta}$	<i>Max - Min</i>
$R^{\zeta \text{GOCO03s} - \zeta}$	-0.81	0.61	-0.06	0.28	1.42
$R^{\zeta \text{EGM2008} - \zeta}$	-0.49	0.17	-0.13	0.10	0.66
$R^{\zeta \text{GGM05c} - \zeta}$	-0.41	0.63	0.01	0.18	1.04
$R^{\zeta \text{EGM96} - \zeta}$	-2.03	0.38	-0.87	0.59	2.41
$R^{\zeta \text{EGM96T} - \zeta}$	-1.11	0.02	-0.55	0.22	1.13



Слика 9.2: Хистограм разлика $R^{\zeta \text{EGM2008}} - \zeta$

9.3 Одређивање геоида применом глобалних модела Geoid determination and global geopotential models

Ундулације геоида могу се одредити применом глобалних модела тек након одређивања аномалија висина и то применом релације:

$$N = \zeta + \frac{\Delta g_B}{\bar{\gamma}} H^o, \quad (9.5)$$

где је Δg_B Бугеова аномалија у релеватној тачки, а $\bar{\gamma}$ средња вредност нормланог убрзања дуж нормалне висине.

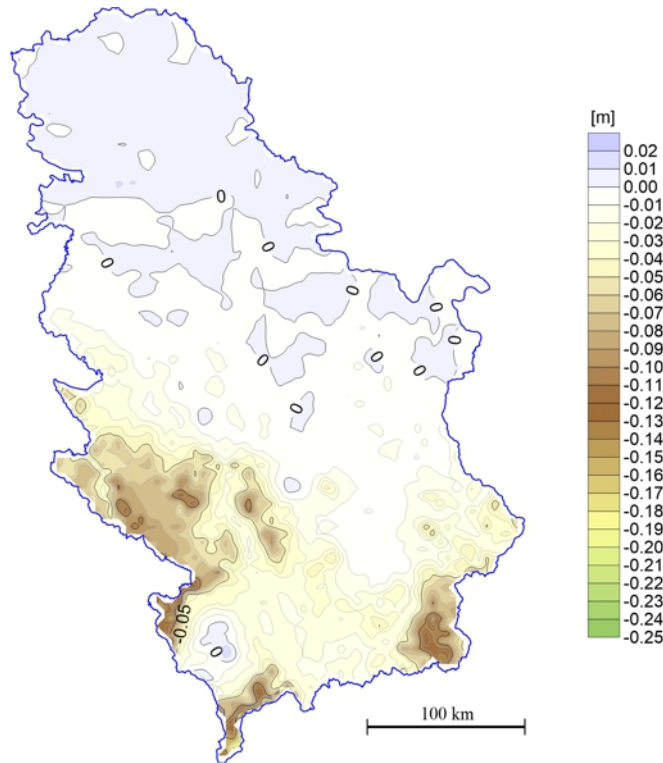
Средња вредност нормалног убрзања у тачки P дуж нормалне висине може се одредити из израз (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005):

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_P &= \frac{1}{H_P^N} \int_0^{H_P^N} \gamma \cdot dh \\ &= \gamma_0 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \gamma}{\partial H_P^N} \right)_0 H_P^N + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial (H_P^N)^2} \right)_0 (H_P^N)^2 + \dots \end{aligned} \quad (9.6)$$

при чему се γ_0 усваја за приближну вредност при развоју интеграла из претходне једначине у степени ред, а Бугеова аномалија се одређује без узимања у обзир теренске корекције:

$$\Delta g_B = g_P - 2\pi G \rho H_P^o + \frac{\partial \gamma}{\partial H_P^o} H_P^o - \gamma_0, \quad (9.7)$$

где је: g_P мерена вредност убрзања Земљине теже, ρ густина топографских маса за коју се најчешће усваја вредност од 2670 kg/m^3 , а H_P ортометријска висина тачке. На слици 9.3 дат је општи облик површи разлика геоида и квазигеоида одређених приказаним формулама у 143246 тачака релативно правилно распоређених на територији Србије (Odalović, 2008), а основни статистички подаци приказани су у табели 9.2.



Слика 9.3: Општи облик површи разлика геоида и квазигеоида (еквидистанца 1 cm)

Табела 9.2: Основни статистички подаци разлика геоида и квазигеоида ($n=143246$)

Параметар	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>SV</i>	<i>SD</i>
$N - \zeta$ [m]	-0.28	0.02	-0.02	0.03

9.4 Одређивање квазигеоида/геоида центиметарске тачности

Geoid and quasigeoid - centimeter accuracy solutions

Примена глобалних модела, у овом тренутку, у поступку одређивања квазигеоида или геоида центиметарске тачности само је део комбиноване методе која се најчешће

назива remove-restore методом.

Пре детаљног описа саме remove-restore методе неопходно је претходно дефинисати неколико основних појмова везаних за практично одређивање аномалија висина или ундулација као што су: карактеристике функционала аномалијског потенцијала и тачке мерења и тачке одређивања или предикције.

Сваки функционал t могуће је представити у облику збира *дуготаласне* (t'), *средњеталасне* (t'') и *краткоталасне* (t''') карактеристике:

$$t = t' + t'' + t''', \quad (9.8)$$

а свака од карактеристика подразумева одређен степен промене укупне вредности функционала.

Посебно, за аномалију висине/ундулацију геоида може се рећи следеће:

- промена дуготаласне карактеристике, при резолуцији од преко 50 km, мења укупну вредност аномалије висине/ундулације геоида на нивоу од неколико метара,
- промена средњеталасне карактеристике, при резолуцији од неколико десетина километара, мења укупну вредност на нивоу од неколико дециметара,
- а краткоталасна карактеристика, при резолуцији од неколико километара, подразумева промене укупне вредности од неколико центиметара.

Наведене карактеристике посматрају се и одређују у две групе тачака: тачке на којима су мерени функционали аномалијског потенцијала, односно тачке мерења и тачке на којима се одређују аномалије висина/ундулације геоида, односно тачке одређивања.

Концепт remove-restore при одређивању ундулације геоида, не улазећи у детаље око карактеристика, може се кратко описати на следећи начин.

- *Отклањање* - на бази познавања физичких особина функционала аномалијског потенцијала из резултата опажања отклони се онај део који је могуће релативно лако унапред математички моделирати,
- *Пресликавање* - из преосталог дела резултата опажања, а на бази теоријски дефинисаних веза између аномалијског потенцијала и његових функционала, одреде се аномалије висине/ундулације геоида
- *Враћање* - одређивање оног дела аномалија висина/ундулација геоида који настаје као последица дела резултата опажања који је елиминисан у фази отклањања и његово додавање на вредности које су одређене у фази пресликавања.

Не разматрајући сада на који начин се свака поједина карактеристика одређује (не улазећи у потпуно дефинисање неке од методологија) remove-restore метода може се описати на следећи начин (Слика 9.4):

1. У тачкама мерења функционала t аномалијског потенцијала одреде се дуготаласне карактеристике мереног функционала t' ,

2. а затим и краткоталасне карактеристике t''' .

3. Формирају се разлике

$$t'' = t - t' - t''', \quad (9.9)$$

које се често називају резидуалним функционалима (примера ради резидуалне аномалије, резидуалне компоненте одступања вертикале,...).

4. Применом теоријски дефинисаних веза f између функционала аномалијског потенцијала у тачкама одређивања одреди се онај део аномалија висина/ундулација геоида који одговара резидуалним функционалима:

$$t_R \xrightarrow{f} \zeta''/N'' = \zeta_R/N_R, \quad (9.10)$$

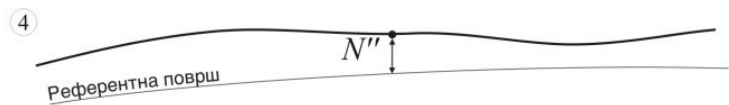
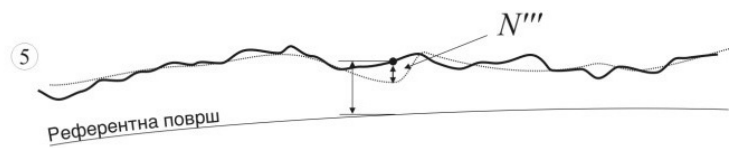
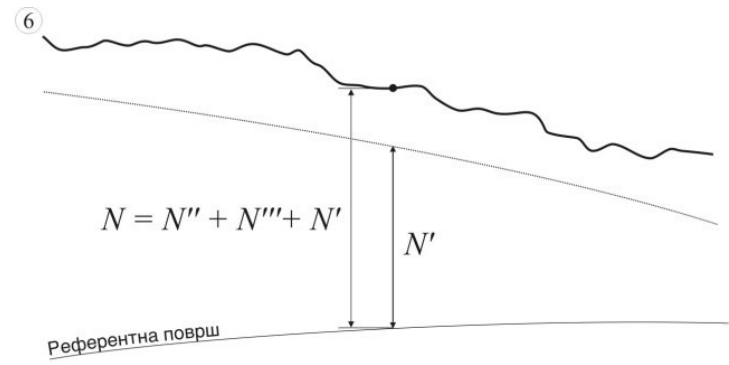
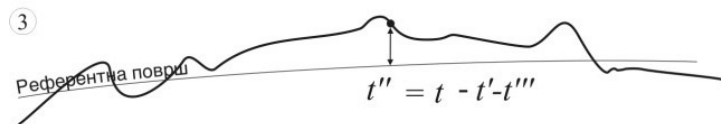
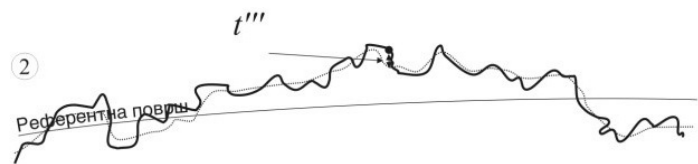
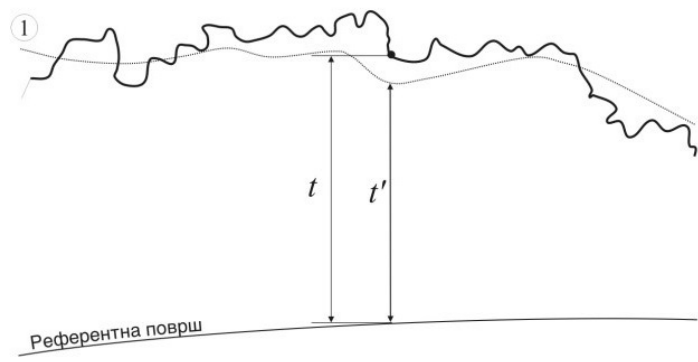
5. а затим се одређују краткоталасне карактеристике аномалија висина/ундулација геоида ζ'''/N''' ,

6. као и њене дуготаласне карактеристике, а укупна аномалија висина/ундулација геоида финално се добија у облику збира:

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_R + \zeta''' + \zeta', \\ N &= N_R + N''' + N'. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Описани поступак одређивања аномалија висина/ундулација геоида remove-restore методом важи у општем случају, а прецизно дефинисање њеног тока зависи од одабране методологије, односно скупа метода путем којих се одређују карактеристике функционала аномалијског потенцијала. Оно што је потребно напоменути је следеће: део отклањања remove-restore мора бити такав да се његовом применом обезбеде резидуалне вредности резултата опажања функционала аномалијског потенцијала, са следећим карактеристикама: резидуалне вредности би требало да имају средњу вредност која је приближно једнака нули, а стандардна девијација резидуалних вредности требало би да буде значајно мања од стандардне девијације резултата мерења. Другим речима, резидуалне вредности резултата морају испуњавати услов центрираности, а њихова површ мора бити погодна за пресликавање, односно предикцију.

У описаном поступку remove-restore методе применом глобалних модела одређују се дуготаласне карактеристике функционала аномалијског потенцијала.



Слика 9.4: Remove-restore метода

Литература

- Adam, D. (2002). Gravity measurement: Amazing grace. *Nature*, 416, 10–11.
- Barthelmes, F. (2013). *Definition of Functionals of the Geopotential and Their Calculation from Spherical Harmonic Models Theory and formulas used by the calculation service of the International Centre for Global Earth Models (ICGEM)*. Technical report, ICGEM.
- Barthelmes, F. (2014). *Global Models*, (pp. 1–9). Springer International Publishing.
- Gottlieb, R. G. (1993). *Fast Gravity, Gravity Partial, Normalized Gravity, Gravity Gradient Torque and Magnetic Field: Derivation, Code and Data*. Technical report, National Aeronautics and Space Administration, Lyndon B. Johnson Space Center, Houston, Texas.
- Gruber, T., Rummel, R., Abrikosov, O., & van Hees, R. (2010). *GOCE High Level Processing Facility, GOCE Level 2 Product Data Handbook, GO-MA-HPF-GS-0110, Issue 4, Revision 3*.
- Heiskanen, W. & Moritz, H. (1967). *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Co., San Francisco.
- Heitz, S. & Tscherning, C. C. (1972). Comparison of two methods of astrogeodetic geoid determination based on least squares prediction and collocation. *Tellus*, 24(3), 271–276.
- Hofmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H., & Collins, J. (1997). *Global Positioning System: theory and practice*. Springer-Verlag.
- Hofmann-Wellenhof, B. & Moritz, H. (2005). *Physical Geodesy*. Springer Vienna.
- Lerch, F. J., Klosko, S. M., & Patel, G. B. (1982). A refined gravity model from Lageos (GEM-L2). *Geophysical Research Letters*, 9(11), 1263–1266.
- Lundquist, C. A. & Veis, G. (1966). Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth. *SAO Special Report*, 200.
- Makinen, J. & Ihde, J. (2007). The Permanent Tide in Height Systems. In *Observing our Changing Earth, Proceedings of the 2007 IAG General Assembly, Perugia, Italy, July 2 - 13*.

- Molodensky, M. S. (1958). New methods of studying the figure of the earth. *Bulletin Géodésique (1946-1975)*, 50(1), 17–21.
- Moritz, H. (1980). *Advanced Physical Geodesy*. Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe.
- Moritz, H. (1984). Geodetic reference system 1980. *Bulletin géodésique*, 58(3), 388–398.
- Moritz, H. (1990). *The Figure of the Earth*. Herbert Winchmann Verlag, GmbH, Karlsruhe.
- Odalović, O., Drakul, M. T., Grekulović, S., Popović, J., & Joksimović, D. (2016). Chronology of the development of geodetic reference networks in Serbia. *Survey Review*, (pp. 1–11).
- Odalović, O. (2005). *Methodology of geoid determination of high resolution and centimeter accuracy in Serbia*. PhD thesis, University of Belgrade, Faculty of Civil Engineering.
- Odalović, O. (2008). *Preliminary geoid for Serbia*. Technical report, Republic Geodetic Authority, Belgrade, Serbia.
- Odalović, O. (2010). *Fizička geodezija*. Građevinski fakultet Univerziteta U Beogradu.
- Odalović, O., Grekulović, S., Joksimović, D., Todorović-Drakul, M., & Popović, J. (2016). Selection of the global geopotential model 2008 optimal degree for height anomalies determination. *INFORMATICS, GEOINFORMATICS AND REMOTE SENSING CONFERENCE PROCEEDINGS, SGEM 2016, VOL II*, (pp. 539–546).
- Odalović, O., Starčević, M., Grekulović, S., Burazer, M., & Aleksić, I. (2012). The establishment of a new gravity reference frame for Serbia. *Survey Review*, 44(327), 272–281.
- Paul, M. K. (1978). Recurrence relations for integrals of associated legendre functions. *Bulletin Géodésique*, 52(3), 177–190.
- Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., & Factor, J. K. (2012). The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978-2012)*, 117.
- Petit, G. & Luzum, B. (2010). *IERS Conventions (2010)*. Technical report, Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie.
- Pines, S. (1973). Uniform Representation of the Gravitational Potential and its Derivatives. *AIAA Journal*, 11, 1508–1511.
- Rapp, R. R. & Cruize, J. Y. (1986). *Spherical Harmonic Expansions of the Earth's Gravitational Potential To Degree 360 Using 30 Mean Anomalies*. Technical report, The Ohio State University Department of Geodetic Science and Surveying 1958 Neil Avenue Columbus, Ohio 43210-1247.
- Rebhan, H., Johannessen, J., Aguirre, M., & Tobias, A. (2000). The ESA gravity field and steady-state ocean circulation explorer mission: Impact on Solid Earth Physics. In R. Rummel, H. Drewes, W. Bosch, & H. Hornik (Eds.), *Towards an Integrated Global Geodetic Observing System (IGGOS)* (pp. 225–228). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

- Reigber, C., Lurh, H., & Schwintzer, P. (2003). *First CHAMP mission results for gravity, magnetic and atmospheric studies*. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Ries, J., Bettadpur, S., Eanes, R., Kang, Z., Ko, U., McCullough, C., Nagel, P., Pie, N., Poole, S., Richter, T., Save, H., & Tapley, B. (2016). The combined gravity model ggm05c. *GFZ Data Services*.
- Sanso, F. (2013). Mass reductions in geoid modeling. In geoid determination: Theory and methods. (eds. F. Sans and M.G. Sideris). *Springer*.
- Sjöberg, L. (1980). A recurrence relation for the β_n -function. *Bulletin Géodésique*, 54(1), 69–72.
- Torge, W. (2001). *Geodesy*. Walter de Gruyter, Berlin-New York.
- Vaniček, P. (1982). *Geodesy, the Concepts*. North-Holland Publishing Company - Amsterdam - New York - Oxford.
- Weber, G. & Zomorrodian, H. (1988). Regional geopotential model improvement for the Iranian geoid determination. *Bulletin géodésique*, 62(2), 125–141.

Лежандрове функције и полиноми

Legendre functions and polynomials

A.1 Лежандрове функције

Legendre functions

Лежандрове функције су дефинисане изразом:

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2-1)^n, \quad (\text{A.1})$$

где је $t = \cos \theta$ при чему је θ поларно растојање. Целобројне вредност n и за m називају се степеном и редом функције, респективно. Примера ради, за $n = 1$ и за $m = 1$ следи функција облика

$$P_{11}(t) = \frac{1}{2} (1-t^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d^2}{dt^2} (t^2-1) = (1-t^2)^{\frac{1}{2}} = (1-\cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} = \sin \theta. \quad (\text{A.2})$$

У наредној табели дате су Лежандрове функције редом до $n=3$ и за $m=3$.

Табела А.1: Лежандрове функције за $n, m = 1, \dots, 3$

n	m	$P_{nm}(t) = P_{nm}(\cos \theta)$
1	1	$\sin \theta$
2	1	$3 \sin \theta \cos \theta$
2	2	$3 \sin^2 \theta$
3	1	$\sin \theta (15 \cos^2 \theta - 3) / 2$
3	2	$15 \sin^2 \theta \cos \theta$
3	3	$15 \sin^3 \theta$

До израза за ортонормиране Лежандрове функције могуће је доћи применом (1.46).

A.2 Лежандрови полиноми

Legendre polynomials

Из (A.1) за $m = 0$ следи функција облика

$$P_n(t) = P_{n0}(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad (\text{A.3})$$

која се назива *Лежандров полином*. За $n=1$ следи Лежандров полином облика

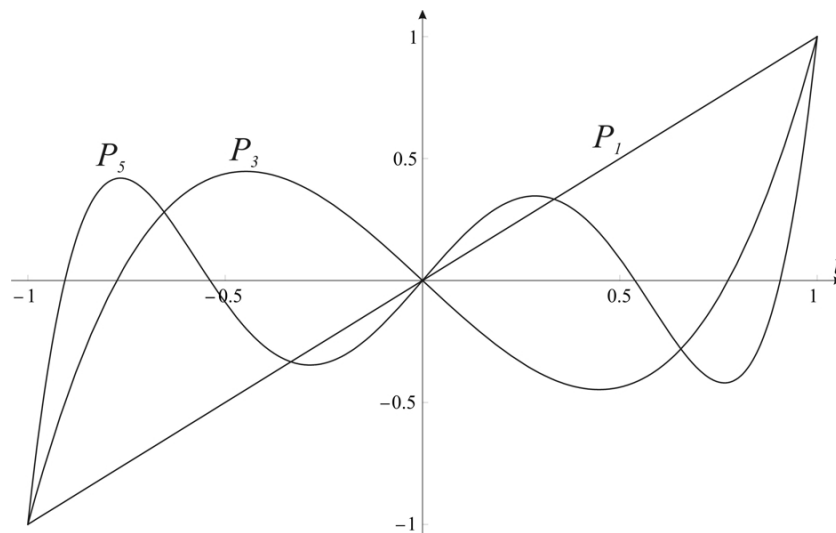
$$P_1(t) = P_{10}(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (t^2 - 1) = t = \cos \theta. \quad (\text{A.4})$$

У наредној табели дати су Лежандрови полиноми редом до 3. степена, а на сликама A.1 и A.2 графици функција полинома парних, односно непарних степена.

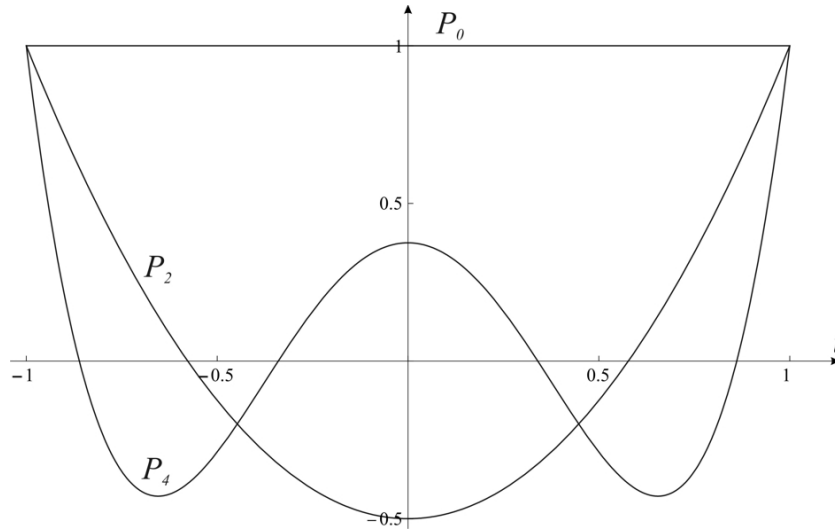
Табела A.2: Лежандрови полиноми за $n = 1, \dots, 3$

n	$P_n(t) = P_n(\cos \theta)$
0	1
1	$\cos \theta$
2	$(3 \cos^2 \theta - 1)/2$
3	$(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)/2$

До израза за ортонормиране Лежандрове полиноме могуће је доћи применом (1.45).



Слика A.1: Лежандрови полиноми за 1, 3 и 5



Слика А.2: Лежандрови полиноми за 0, 2 и 4

А.3 Рекурентне релације

Recurrence relations

Приказане једначине за Лежандрове функције и полиноме (А.1) и (А.3) могуће је примењивати само до одређеног степена n , због факторијела који је присутан у једначинама. Из тог разлога се у практичним применама користе рекурентне релације.

Код примене глобалних геопотенцијалних модела у геодезији готово искључиво се користе рекурентне релације са ортонормираним Лежанровим функцијама и полиномима, а у прорачунима у току израде овог уџбеника коришћене су следеће наведене релације.

Лежандреве функције:

- за $n = m$ и $n > 1$

$$\bar{P}_{nm}(\cos \theta) = W_1[m] \sin \theta \bar{P}_{n-1, m-1}, \quad (\text{A.5})$$

- за $n = m + 1$

$$\bar{P}_{nm}(\cos \theta) = W_2[m] \cos \theta \bar{P}_{m, m}, \quad (\text{A.6})$$

- за $n > m + 1$

$$\bar{P}_{nm}(\cos \theta) = W_3[n, m] (W_5[n] \cos \theta \bar{P}_{n-1, m} - W_4[n, m] \bar{P}_{n-2, m}) \quad (\text{A.7})$$

где су:

$$W_1[m] = \sqrt{\frac{2m+1}{2m}}, \quad (\text{A.8})$$

$$W_2[m] = \sqrt{2m+3}, \quad (\text{A.9})$$

$$W_3[n, m] = \sqrt{\frac{2n+1}{(n+m)(n-m)}}, \quad (\text{A.10})$$

$$W_4[n, m] = \sqrt{\frac{(n+m-1)(n-m-1)}{2n-3}}, \quad (\text{A.11})$$

$$W_5[n] = \sqrt{2n-1}, \quad (\text{A.12})$$

при чему су неколико првих ортонормираних Лежандрових функција дате са:

$$\bar{P}_{0,0} = 1, \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{P}_{1,0} = \sqrt{3} \cos \theta, \quad (\text{A.14})$$

$$\bar{P}_{1,1} = \sqrt{3} \sin \theta, \quad (\text{A.15})$$

$$\bar{P}_{2,0} = \frac{\sqrt{5}}{2} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (\text{A.16})$$

$$\bar{P}_{2,1} = \sqrt{15} \sin \theta \cos \theta. \quad (\text{A.17})$$

Први изводи Лежандрових функције по θ :

- за $n = m$ и $n > 1$

$$\bar{P}'_{nm}(\cos \theta) = W_1[m] \cos \theta \bar{P}_{n-1, m-1} + W_1[m] \sin \theta \bar{P}'_{n-1, m-1}, \quad (\text{A.18})$$

- за $n = m + 1$

$$\bar{P}'_{nm}(\cos \theta) = -W_2[m] \sin \theta \bar{P}_{m, m} + W_2[m] \cos \theta \bar{P}'_{m, m}, \quad (\text{A.19})$$

- за $n > m + 1$

$$\bar{P}'_{nm}(\cos \theta) = W_3[n, m] (W_5[n] (-\sin \theta \bar{P}_{n-1, m} + \cos \theta \bar{P}'_{n-1, m}) - W_4[n, m] \bar{P}'_{n-2, m}), \quad (\text{A.20})$$

Првих неколико чланова извода по θ може се одредити на основу израза од (A.13) до (A.17).