

Примена дискретног ауторегресивно – кросрегресивног модела покретног просека за прогнозу дневних вредности издашности врела Мокра и Дивљана

Бранислав Петровић, Вељко Мариновић



Дигитални репозиторијум Рударско-геолошког факултета Универзитета у Београду

[ДР РГФ]

Примена дискретног ауторегресивно – кросрегресивног модела покретног просека за прогнозу дневних вредности издашности врела Мокра и Дивљана | Бранислав Петровић, Вељко Мариновић | Записници Српског геолошког друштва | 2021 ||

<http://dr.rgf.bg.ac.rs/s/repo/item/0005995>

Дигитални репозиторијум Рударско-геолошког факултета Универзитета у Београду омогућава приступ издањима Факултета и радовима запослених доступним у слободном приступу. - Претрага репозиторијума доступна је на www.dr.rgf.bg.ac.rs

The Digital repository of The University of Belgrade Faculty of Mining and Geology archives faculty publications available in open access, as well as the employees' publications. - The Repository is available at: www.dr.rgf.bg.ac.rs

Бранислав Петровић¹, Вељко Мариновић¹

Branislav Petrović¹, Veljko Marinović¹

**ПРИМЕНА ДИСКРЕТНОГ АУТОРЕГРЕСИВНО – КРОСРЕГРЕСИВНОГ
МОДЕЛА ПОКРЕТНОГ ПРОСЕКА ЗА ПРОГНОЗУ ДНЕВНИХ ВРЕДНОСТИ
ИЗДАШНОСТИ ВРЕЛА МОКРА И ДИВЉАНА**

**APPLICATION OF THE DISCRETE AUTOREGRESSIVE – CROSS-
REGRESSIVE MOVING AVERAGE MODEL FOR PREDICTING THE DAILY
DISCHARGE VALUES OF MOKRA AND DIVLJANA SPRINGS**

ОРИГИНАЛНИ НАУЧНИ РАД – TRAVAIL SCIENTIFIQUE – RESEARCH PAPER

Апстракт. Аутокорелациона и кроскорелациона анализа временских серија падавина и истицања подземних вода карстних врела Мокра и Дивљана (Сува планина, ЈИ Србија) извршена је ради формирања стохастичког ауторегресивно-кросрегресивног модела (ARCR) и прогнозе дневних вредности издашности. Будући да је тешко предвидети просторну дистрибуцију подземних вода у оквиру карстног хидрогеолошког система услед постојања хетерогености и анизотропности карстне издани (тј. кречњачких стена у овом случају), апликативност детерминистичких модела је минимизирана, па је примена стохастичког модела у овом случају учинковитија. Овим моделом могуће је дати краткорочну прогнозу истицања подземних вода на карстном врелу, са одговарајућим интервалом сигурности. Анализом примењеног модела установљено је да су периоди високих и средњих вода добро симулирани, док су највеће осцилације у периоду рецесије (ниске воде). Да би се овај проблем донекле амортизовао, извршена је трансформација бруто падавина помоћу филтера линеарног покретног просека (енгл. *moving average - MA*). На постојећи ARCR модел примењен је прозор покретног просека од 40 дана, који генерално одговара меморији карстног хидрогеолошког система израчунатог применом аутокорелационе функције. На тај начин креиран је модификовани ARCR-MA модел на коме се уочава да су велике и средње воде добро симулиране, док су у периоду ниских вода дневне вредности издашности боље симулиране у односу на основни ARCR модел.

Кључне речи: карстно врело, стохастички модел, анализа временских серија, ауторегресивно-кросрегресивни модел (ARCR)

Abstract: Autocorrelation and cross-correlation analysis of time series of precipitation and groundwater discharge were carried out and a stochastic autoregressive – cross-regressive model (ARCR) was formed in order to forecast daily discharge values of Mokra and Divljana karst springs (Suva planina Mt., SE Serbia). The heterogeneity and anisotropy of karst aquifers (i.e. limestone in this case), makes application of deterministic models for forecasting of spring discharge difficult, since it is practically impossible to predict the spatial distribution of groundwater within the karst hydrogeological system. This model gives a short-term forecast of groundwater discharge at a karst spring with a given confidence level. The analysis of the applied

¹ Центар за хидрогеологију карста, Департман за хидрогеологију, Рударско-геолошки факултет, Универзитет у Београду, Ђушина 7, 11000 Београд; Е-mail: branislav.petrovic@rgf.bg.ac.rs
Centre for Karst Hydrogeology, Department of Hydrogeology, Faculty of Mining and Geology, University of Belgrade, Djušina 7, 11000 Belgrade

model showed that the high and average water periods are well simulated, while the largest oscillations are in the recession period (low water period). In order to amortize this problem to some extent, gross precipitation was transformed using a moving average filter (MA). A 40-day moving average window was applied to the existing ARCR model, which generally corresponds to the memory of a karst hydrogeological system calculated using the autocorrelation function. In this way, a modified ARCR-MA model was created, which shows that high and average water periods are generally well simulated, while in the low waters period, daily discharge values are more realistically simulated if compared with ARCR model.

Key words: karst spring, stochastic model, time series analysis, autoregressive – cross-regressive model (ARCR)

УВОД

Карст прекрива нешто више од 14% Земљине површине, које није покривено вечитим ледом и снегом (STEVANOVIĆ, 2019). Имајући у виду да карст може акумулирати значајне количине подземних вода одличног квалитета, карстне издани представљају један од важнијих ресурса питке воде. Процена је да око 9% светске популације користи карстне подземне воде за пиће (STEVANOVIĆ, 2019). Међу њима се налази и становништво Србије, будући да је око 20% подземних вода које се користе у водоснабдевању становништва, управо из карстних издани, а да Србија располаже са око $600 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{god}$, односно $19 \text{ m}^3/\text{s}$ карстних подземних вода као потенцијалних експлоатационих резерви (STEVANOVIĆ, 1995; POLOMČIĆ & STEVANOVIĆ, 2011).

Иако се чини да ова количина воде може подмирити све потребе, најчешћи проблем код карстних подземних вода јесте сезонска флукуација квалитета и квантитета током хидролошке године. Кише јаког интензитета и поплавни таласи могу утицати на погоршање квалитета карстних подземних вода (у највећој мери мутноће и микробиолошких карактеристика), док сезонске осцилације нивоа и резерви подземних вода у карсту могу угрозити локално водоснабдевање. Из тих разлога, дугорочно или краткорочно предвиђање осцилација квалитативних и квантитативних карактеристика карстних подземних вода је вишеструко корисно. Са аспекта квантитета подземних вода, најважније је предвидети екстремне (минималне и максималне) вредности истицања карстних врела.

За разлику од интергрануларних издани, код којих је израда хидродинамичких модела одређеним софтверским пакетима постала правило, то код карстних издани (још увек) није случај. Наиме, имајући у виду хетерогеност и анизотропност карстне издани формиране у кречњацима и другим растворљивим стенама, применљивост детерминистичких модела је минимална, будући да је практично немогуће предвидети просторну дистрибуцију подземних вода у оквиру карстног хидрогеолошког система. Бројни ранији покушаји са *EPM* (енгл. *Equivalent Porous Media*) моделима или трансформацијама *FeFlow* компоненти нису дали задовољавајуће резултате у пракси. Последњих година апликације *USG* (енгл. *Unstructured Grid*) компоненти дају наду да ће се у будућности успешније моделирати и карстна издан (PANDAY et al. 2013; KREŠIĆ, 2013; KREŠIĆ & PANDAY, 2017). Из ових разлога, у случају симулације истицања карстних врела Мокра и Дивљана примењен је ауторегресивно – кросрегресивни модел (*ARCR*), којим је могуће дати краткорочну прогнозу истицања карстног врела, уз одговарајући интервал сигурности.

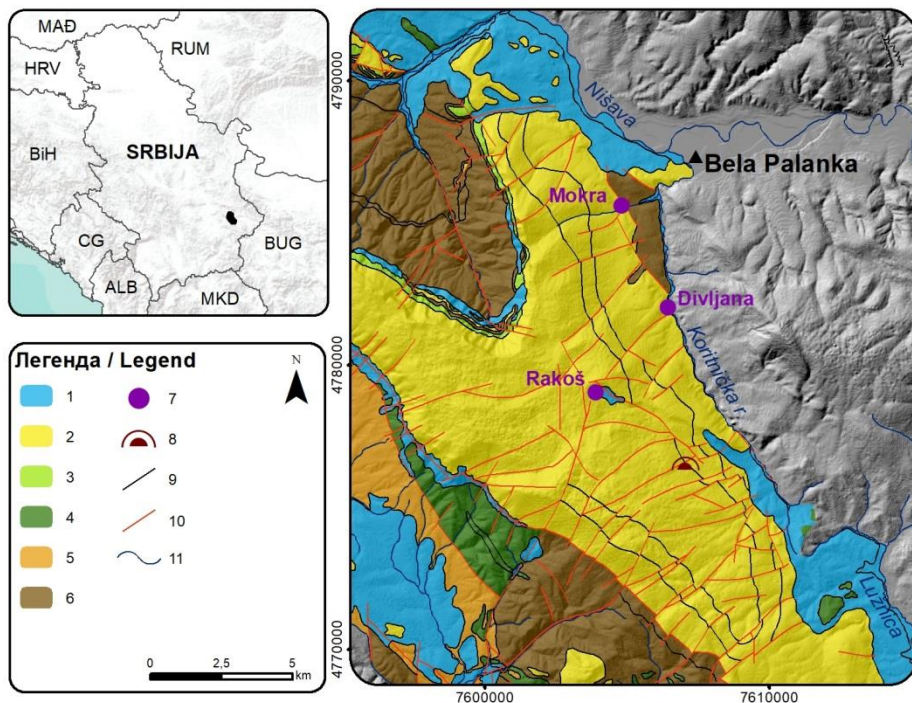
МАТЕРИЈАЛИ И МЕТОДЕ

Опште карактеристике истражног подручја

Сува планина се налази у југоисточној Србији, око 10 km југоисточно од Ниша, и део је дугачког европског планинског лука Карпато-Балканида. Карстна врела Мокра и Дивљана, за које је креиран модел истицања, налазе се на територији Општине Бела Паланка, у подножју источних падина Суве Планине (Слика 1). Сува планина је са севера и северозапада ограничена реком Нишавом која се пробила кроз Сићевачку клисуру, са истока и југоистока Коритничком реком, са југа реком Лужницом, док је са запада ограничена са неколико мањих речних токова. Геолошка грађа Суве планине је комплексна и последица је вишеструких тектонских догађаја, који су довели до настанка антиклинале правца пружања северозапад – југоисток и каснијег издизања њеног северозападног дела (VULIĆ et al, 1971). Издизање антиклинале довело је до еродовања повлатних карбонатних седимената горњојурске и доњокредне старости и откривања језгра антиклинале које је изграђено од девонских и пермских кластичних седимената. Антиклинала Суве планине је у целини деформисана уздужним и попречним раседима, нарочито њен СЗ део. Карбонатни седименти, најчешће кречњаци различитог степена чистоће и доломити, изграђују крила антиклинале, чији пад слојева је ка североистоку и југозападу.

На истражном подручју издвојени су сви типови издани, као и хидрогеолошки комплекс и условно безводни делови терена (Слика 1) (PETROVIĆ, 2014, 2020; PETROVIĆ & MARINOVIĆ, 2018). Збијени тип издани формиран је у седиментима квартарне и неогене старости и углавном има локални значај. Пукотински тип издани формиран је у магматским стенама и седиментним кластичним стенама, и такође, има само локални значај. Хидрогеолошки комплекс издвојен је у стенама неогене старости, изграђеним од шљункова, пескова, глина често у вертикалној смени. Тектонски склоп и чистоћа кречњака утицали су и на степен карстификације карбонатних стена доњотријаске, горњојурске и доњокредне старости, па се у оквиру њих могу издвојити карстно – пукотински и карстни тип издани. Сувопланински карстни масив дренира се искључиво преко извора и врела у подножју планине, насталих на контакту са водонепропусним стенама (PETROVIĆ, 2014, 2020). Постоји само неколико слабих извора на самом масиву (нпр. Ракош чесма, 1260 m.n.m.), па отуда и потиче име планине.

Континуална мерења издашности врела Мокра и Дивљана су у надлежности *JKП „Naissus“* од момента када су оба врела захваћена за водоснабдевање града Ниша. Према новијим подацима (2015 – 2018. година), минималне издашности на врелу Мокра јављају се на самом крају лета и почетком јесени, када је септембра 2018. године минимална издашност износила 69 l/s. Слични подаци су прикупљени и са врела Дивљана, где је минимална издашност била 75 l/s, измерена септембра 2016. године. Максималне вредности издашности уочене су у зимском периоду (новембар – децембар) и на самом крају зиме/почетку пролећа (март). На врелу Мокра максимум је био децембра 2017. године, када је количина воде која је истицала из врела износила 4062 l/s, док је на врелу Дивљана максимум од 6491 l/s измерен, такође, у децембру 2017. године.



Слика 1. Упрошћена хидрогеолошка карта истражног простора; Легенда: 1 – Збијени тип издани; 2 – Карстни тип издани; 3 – Карстно-пукотински тип издани; 4 – Пукотински тип издани; 5 – Хидрогеолошки комплекс; 6 – Условно-безводни терени; 7 – Карстно врело; 8 – Пећина; 9 – Геолошка граница; 10 – Расед; 11 – Речни ток

Figure 1. Simplified hydrogeological map of the study area; Legend: 1 – Intergranular aquifers; 2 – Karst aquifers; 3 – Karst-fissure aquifers; 4 – Fissure aquifers; 5 – Hydrogeological complex; 6 – Conditionally impervious rocks; 7 – Karst spring; 8 – Cave; 9 – Geological boundary; 10 – Fault; 11 – River

Краћи теоријски приказ стохастичке анализе временских серија

Временска серија подразумева уређени низ података у времену. Оне могу бити непрекидне, када се податак може забележити у ма ком интервалу (што је генерално случај са истицањем сталних карстних врела), односно непрекидне, код које се опсервације бележе у истим временским интервалима (нпр. часовно или дневно) (КОВАЧИЋ, 1995), што је случај са падавинама. Сврха анализирања временских серија огледа се у дефинисању узрока појаве, предвиђања понашања временске серије у будућем периоду, односно контролисања временске серије манипулацијом параметара који условљавају њену појаву.

Стохастичка анализа временских серија подразумева процес описан статистичким параметрима, при чему такав опис представља вероватноћу појаве једног од могућих стања процеса (КРЕШИЋ, 1991). Основна одлика је да је стохастички модел одређен са вероватноћом појаве у времену t на основу познавања претходног стања у времену $t_0 < t$, док је код детерминистичког модела, процес са сигурношћу дефинисан у времену t на основу познавања претходног стања у времену $t_0 < t$.

Први корак при стохастичком моделирању јесте анализа стохастичких особина сваке временске серије која ће се користити при формирању модела, за шта се користи аутокорелациона функција, која описује сукцесивне чланове једне исте временске серије (тј. зависне или независне променљиве) и утврђује њену зависност и периодичности (КРЕШИЋ, 1991). Са друге стране, друга функција која се користи у

стохастичкој анализи је кроскорелациона функција, која подразумева одређивање међусобне зависности две случајне променљиве од којих је једна зависна (нпр. издашност врела), а друга независна (нпр. падавине) променљива (КРЕШИЋ, 1991).

За симулацију истицања карстних врела Мокра и Дивљана примењени су ауторегресивни (*AR*), кросрегресивни (*CR*) и ауторегресивно – кросрегресивни (*ARCR*) модели. *AR* модели се користе за генерисање синтетичких низова независних временских серија, а у извесним случајевима могу служити и за издавање краткорочних (1-2 дана) прогноза (КРЕШИЋ, 1991). Помоћу ових модела успоставља се линеарна регресиона зависност између чланова низа исте временске серије. Тако, не могу се самостално користити за нпр. моделирање издашности врела, будући да не укључују улаз у систем, тј. падавине. За симулацију издашности карстних подземних вода, могу се користити и *CR* модели, где се поред зависно променљиве X_t (у овом случају протицаја врела) уводи и независно променљива Y_t , и то за 1, 2, ... n претходних дана, тј. $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-n}$.

За симулацију и краткорочну прогнозу истицања карстних подземних вода најбоље резултате даје комбиновани ауторегресивно – кросрегресивни (*ARCR*) модел који у себе укључује *AR* и *CR* модел. *ARCR* модели припадају групи мултиваријантних модела временских серија (КРЕШИЋ, 2010) и свде се на вишеструку линеарну регресију. Међутим, овај модел као улаз узима бруто падавине и даје исти тежински фактор свим вредностима падавина, тј. изједначава утицај дужих и интензивнијих летњих падавина, док не узима у обзир нпр. повећану евапотранспирацију и дефицит влаге у несатурисаној зони (у рецесионом периоду) и друге факторе који током летњих месеци додатно утичу на ефективну инфилтрацију карстне издани (КРЕШИЋ, 2010). Да би се овај проблем донекле амортизовао потребна је примена једноставних математичких операција које укључују филтрирање бруто падавина и њихову атенуацију. То се може постићи трансформацијом бруто падавина помоћу филтера линеарног покретног просека (енгл. *moving average filter - MA*) (КРЕШИЋ, 2010). Поменути филтер трансформише бруто падавине на основу унапред задатог прозора покретног просека, који се изражава у данима. Генерално гледано, примена овог филтера донекле смањује коефицијент вишеструке регресије *ARCR* модела. Међутим, позитивни ефекти се огледају у бољим резултатима у рецесионом периоду, док су у периоду прихрањивања издани резултати прилично слични као са бруто падавинама.

РЕЗУЛТАТИ И ДИСКУСИЈА

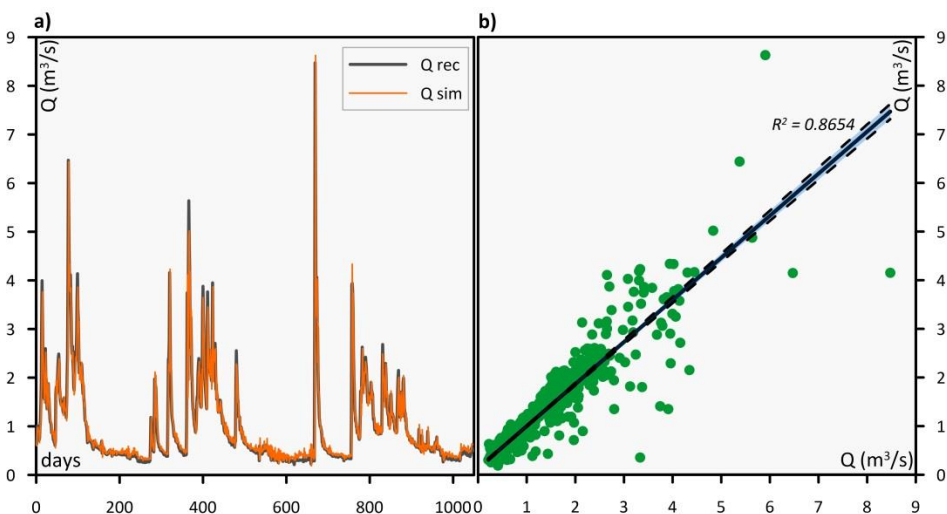
Стохастичко моделирање примењено је на временске серије истицања карстних подземних вода врела Мокра и Дивљана и падавина са кишомерне станице Ниш у периоду 2015 – 2017. год. Ради поузданије анализе и формирања модела, карстна врела Мокра и Дивљана су посматране као једна тачка истицања, тако што су у анализи коришћене сумиране вредности истицања. Мокра и Дивљана чине исти карстни хидрогеолошки систем, док интерну делинеацију подсливова није било могуће поуздано одредити у овом тренутку.

Аутокорелација података истицања подземних вода показује да је меморија система око 43 дана, након чега случајна променљива постаје независна. С друге стране, аутокорелација падавина показује меморију система од само 2 дана, што је разумљиво узимајући у обзир случајну природу ове променљиве. Кроскорелограм приказује реакцију крупних карстних канала са кашњењем од само једног дана, док

статистички утицај падавина на истицање карстних подземних вода на врелима Мокра и Дивљана постоји до 6. дана. Што се тиче примене *AR* и *CR* модела, коефицијенти ауторегресивног модела крећу се од 0,8913 за ред модела 1 до 0,9015 за ред модела 10, што је последица дугорочне меморије. Супротно томе, коефицијенти кросрегресивног модела су ниски и крећу се од 0,1753 за ред модела 1 до 0,5411 за ред модела 10. Коефицијенти комбинованог ауторегресивно-кросрегресивног модела (*ARCR*) варирају у распону од 0,9150 за ред модела 1 до 0,9229 за ред модела 10. Валидност модела не расте значајно са повећањем реда модела, на основу коефицијената корелације модела. Стога Крешић (2010) наводи да, када је временски низ добро аутокорелисан, ред модела 1 или 2 (некада и до 4) даје сасвим задовољавајуће резултате у хидрогеолошкој пракси, што је и искоришћено за симулацију режима истицања карстних врела Мокра и Дивљана.

Периоди високих и средњих вода генерално су добро симулирани, док се највеће разлике измерених и симулираних вредности јављају током периода ниских вода. У тим периодима, приметан је „шум“, као последица нефилтрираних улазних сигнала. Трансформација бруто падавина извршена је применом филтера покретног просека од 40 дана, што генерално одговара меморији карстног хидрогеолошког система израчунатој помоћу аутокорелативне функције (Сл. 2а). Према томе, модел са филтрираним бруто падавинама јасно показује боље подударане симулираних и осматраних података дренарања не само у периоду прихрањивања карстног система, већ и у периоду рецесије.

У циљу провере бонитета модела извршена је корелација очитаних и симулираних података дневних издашности на врелима за период 2015 – 2017. година (Сл. 2б). Са поменутих дијаграма се види да је коефицијент корелације висок $R^2 = 0,8654$, тј. R (Мокра и Дивљана) = 0,9303, што указује на добро слагање измерених и симулираних вредности. Такође, у табели 1 дата је анализа варијанси модела и резидуала у тзв. *ANOVA* табели, која тестира модел преко F коефицијента који следи Фишерову расподелу. Како би се потврдио бонитет регресионог модела, F вредност мора бити већа од вредности за одабрани интервал поверења α , који обично износи 0,05, као у овом случају. Будући да је вредност F за одабрани интервал поверења 1,94 (према статистичким таблицама), а срачуната F статистика регресионог модела је већа од 10, може се закључити да је модел добар.



Слика 2. а) Упоредни дијаграм измерених (Q_{rec}) и симулираних (Q_{sim}) сумарних вредности издашности оба врела Мокра и Дивљана применом *ARCR* модела са филтером линеарног покретног просека; б) Корелација измерених и симулираних вредности истицања карстних врела Мокра и Дивљана применом *ARCR-MA* модела

Figure 2. a) Comparative diagram of recorded (Q_{rec}) and simulated (Q_{sim}) summarized discharge data for both karst springs Mokra and Divljana by applying *ARCR-MA* model; b) Correlation of recorded (Q_{rec}) and simulated (Q_{sim}) summarized discharge data of karst springs Mokra and Divljana by applying *ARCR-MA* model

Табела 1. *ANOVA* табела анализе варијанси модела и резидуала за сумарну издашност карстних врела Мокра и Дивљана. Легенда: СК – сума квадрата; БСС – број степени слободe; СВСК – средње вредности суме квадрата

Table 1. *ANOVA* table, analyses of variance of model and residuals for summarized discharge of Mokra and Divljana karst springs. Legend: СК – sum of squares; БСС – number of degrees of freedom; СВСК – mean values of sum of squares

Компонента	СК	БСС	СВСК	$\sqrt{\text{СВСК}}$	<i>F</i> статистика	<i>F</i> таблична вредност за $\alpha = 0,05$
Модел	340	8	35,560	5,963	17,672	1,94
Резидуал	290	356	0,114	0,337	$\sqrt{\text{SSKM}}$	
Укупно	50	364	0,935	0,967	$\sqrt{\text{SSKR}}$	

ЗАКЉУЧАК

Стохастичка анализа извршена је за временске серије истицања карстних врела Мокре и Дивљане, као и за падавине са кишомерне станице Ниш за период 2015 – 2017. године. Такође, као временске серије истицања ових врела коришћена је њихова сумарна вредност, будући да се ради о јединственом карстном хидрогеолошком систему са неколико тачака истицања, од којих су врела Мокра и Дивљана најзначајније. У оквиру стохастичке анализе, временске серије су анализирани применом функција аутокорелације и кроскорелације, док је симулација режима истицања извршена применом ауторегресивно-кросрегресивног модела (*ARCR*), односно ауторегресивно – кросрегресивног модела са трансформисаним падавинама помоћу филтера линеарног покретног просека (*ARCR-MA*), као улазног сигнала.

Узимајући у обзир велике разлике између симулираних и измерених вредности истицања у рецесионом периоду употребом *ARCR* модела, на податке о падавинама примењен је филтер линеарног покретног просека како би се побољшао симулациони модел. Трансформисани *ARCR-MA* модел дао је много боље резултате у периоду ниских вода, док су резултати симулације готово исти у периодима високих и средњих вода. Осим показатеља бонитета модела, у циљу еталонирања модела, неопходно је исти проверити са подацима који нису ушли у прорачун. Другим речима *ARCR-MA* модел је искоришћен за симулирање података истицања врела за период јануар – децембар 2018. године, ради поређења са стварно измереним подацима. Симулација је показала добро поклапање измерених и прогнозираних вредности истицања подземних вода на карстним врелима Мокра и Дивљана, уз коефицијент корелације од $R = 0,95$. Овај симулациони модел може дати релативно поуздану краткорочну прогнозу дневних истицања карстних врела Мокре и Дивљане.

Захвалности. Раг је подржан средствима Министарства науке, просвете и технолошког развоја Србије, Пројекат ОН176022. Аутори се захваљују и ЈКП „Наисус“ на уступљеним подацима.

APPLICATION OF THE DISCRETE AUTOREGRESSIVE – CROSS-REGRESSIVE MOVING AVERAGE MODEL FOR PREDICTING THE DAILY DISCHARGE VALUES OF MOKRA AND DIVLJANA SPRINGS

INTRODUCTION

Karst covers a significant part of the Earth's surface, covering > 14% of ice-free land (STEVANOVIĆ, 2019). Bearing in mind that karst can accumulate considerable amounts of high-quality groundwater, one must admit that karst aquifers represent one of the valuable drinking water resources. It is estimated that about 9% of the world's population uses groundwater from karst as water supply source (STEVANOVIĆ, 2019). Among them is the population of Serbia, considering that Serbia has about $600 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{y}$ or $19 \text{ m}^3/\text{s}$ of karst groundwater as potential exploitation reserves, while about 20% of groundwater used for water supply is from karst aquifers (STEVANOVIĆ, 1995; POLOMČIĆ & STEVANOVIĆ, 2011).

Although it seems that this amount of water can meet all needs, the most common problem with karst groundwater is the seasonal fluctuation of quality and quantity in the course of hydrological year. Heavy rains and floods can affect the deterioration of karst groundwater quality (mostly turbidity and microbiological characteristics), while seasonal oscillations of karst groundwater levels and reserves can jeopardize local water supply as well. For these reasons, long-term or short-term prediction of oscillations of qualitative and quantitative characteristics of karst groundwater would be useful in many ways. From the aspect of groundwater quantity, the most important thing is to predict the extreme values of karst springs - minimum and maximum discharge.

Unlike intergranular aquifers, where the application of hydrodynamic models has become the rule due to existence of excellent software packages, this (still) is not the case with karst aquifers. Having in mind the heterogeneity and anisotropy of karstification of limestones and other soluble rocks, the applicability of deterministic models is minimal since it is practically impossible to predict the spatial distribution of caverns and channels within the karst hydrogeological system. Numerous previous attempts with EPM (Equivalent Porous Media) models or transformations of FeFlow components did not give satisfactory results in practice. In recent years, applications of the USG (Unstructured Grid) components have given hope that the karst aquifers will be more successfully modelled in the future (PANDAY et al. 2013; KREŠIĆ, 2013; KREŠIĆ & PANDAY, 2017). For these reasons, for the prediction of discharges of Mokra and Divljana karst springs, the autoregressive-crossregressive model (ARCR), which makes it possible to give a short-term forecast of karst spring outflow with an appropriate confidence interval, was applied.

MATERIALS AND METHODS

General characteristics of the study area

Suva planina Mt is located in south-eastern Serbia, about 10 km southeast of Niš, and is a part of the Carpatho-Balkanides – a long European mountain range. The Mokra and Divljana karst springs, for which a stochastic model was created, are located on the territory of the municipality of Bela Palanka, at the eastern foothill of Suva planina Mt. (Fig. 1). Suva planina Mt is bordered on the north and northwest by the Nišava river, which streams

through the Sićevačka gorge, by the Koritnica river on the east and southeast, by the Lužnica river on the south, while on the west it is bordered by several smaller rivers. The geological structure of Suva planina Mt is complex and is a consequence of multiple tectonic events, which led to the formation of the anticline of the northwest-southeast direction and the later uplift of its northwestern part (VUJISIĆ et al, 1971). The uplift of the anticline led to the erosion of the overlying carbonate sediments (Upper Jurassic and Lower Cretaceous age) and the exposure of the anticline core in the north-western area, which is built by clastic Devonian and Permian sediments. The anticline of Suva planina Mt is completely deformed by longitudinal and transverse faults, especially its NW part. Carbonate sediments, commonly limestones (and dolomites) of various degrees of purity, form the limbs of the anticline that dip towards the northeast and southwest.

All aquifer types were determined on the study area (Fig. 1), as well as the hydrogeological complex and impervious rocks (PETROVIĆ, 2014, 2020; PETROVIĆ & MARINOVIĆ, 2018). The intergranular aquifer is formed locally in Quaternary and Neogene sediments. The fissured aquifer was formed in igneous rocks and sedimentary clastic rocks, having only local significance. The hydrogeological complex is formed in rocks of Neogene age, built of gravel, sand, and clay in vertical alternation. Karstification degree of the carbonate rocks of the Lower Triassic, Upper Jurassic and Lower Cretaceous age was influenced by the tectonic pattern and limestone purity, so karst-fissure or karst aquifer types can be found. Karst aquifers of Suva planina Mt are discharged mainly through springs at the foothills of the mountain, emerging at the contact of karstified and impervious rocks (PETROVIĆ, 2014, 2020). There are only a few rather small springs on the mountain itself (i.e. Rakoš česma spring, 1260 m.a.s.l), hence the name of the mountain ("Suva" means "dry").

Continuous measurements of the springs' discharge are under the jurisdiction of PUC "Naissus" from the moment when both springs were tapped for the water supply of the city of Niš. According to recent data (2015-2018), the minimum discharge at the Mokra spring are recorded at the very end of summer and in the beginning of autumn, so the minimum discharge for 2015 – 2018 period was 69 l/s recorded in September 2018. Similar data were collected from the Divljana spring, where the minimum discharge was 75 l/s, measured in September 2016. Maximum values are recorded in the winter period (November-December) and at the very end of winter/beginning of spring (March). The maximum discharge value at the Mokra spring was 4062 l/s, measured in December 2017, while the maximum value at the Divljana spring, was 6491 l/s, recorded in December 2017.

A brief theoretical background of stochastic time series analysis

A time series means an ordered array of data over time. They can be continuous, when the data can be recorded at any interval (which is generally the case with the discharge of a permanent karst springs), or discontinuous, in which observations are recorded at the same time intervals (e.g. hourly or daily) (KOVAČIĆ, 1995), which is the case with precipitation. The purpose of time series analysis is to define the cause of the occurrence, predict the behaviour of the time series in the future, and control the time series by manipulating the parameters that cause its occurrence.

Stochastic analysis implies a process described by statistical parameters, where such a description represents the probability of occurrence of one of the possible states of the process (KREŠIĆ, 1991). Its basic feature is that the stochastic model is determined with

the probability of occurrence in time t based on knowledge of the previous state at time $t_0 < t$, while in the deterministic model the process is defined with certainty in time t based on knowledge of the previous state at time $t_0 < t$.

The first step in stochastic modelling is to analyse the stochastic properties of each time series that will be used in the model, for which the autocorrelation function is used. The autocorrelation function implies describing successive members of the same time series (i.e. dependent or independent variables), determining its dependence and periodicity (KREŠIĆ, 1991). On the other hand, second function that is utilized for modelling is cross-correlation that involves determining the interdependence of two random variables, one of which is dependent (i. e. spring discharge) while the other is independent (i. e. precipitation) variable (KREŠIĆ, 1991).

Autoregression (AR), cross-regression (CR) and the development of a combined autoregressive-cross-regressive (ARCR) models were applied to simulate the discharge of Mokra and Divljana karst springs. AR models are used to generate synthetic arrays of independent time series, and in some cases, they can also give a short-term (1-2 days) forecasts (KREŠIĆ, 1991). Using these models, a linear regression dependence is established between the members of the same time series. Thus, they cannot be used independently for modelling the spring discharge, since they do not include the input signal to the system, i. e. precipitation. In addition to the autoregressive model, cross-regression - CR models can also be used for simulation, where except the dependent variable X_t (in this case the spring discharge), the independent variable Y_t is included also, for $1, 2, \dots, n$ of the previous days, i. e. $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-n}$.

For the simulation and short-term forecast of karst groundwater discharge, a combined autoregressive-cross-regressive (ARCR) model, which includes the AR and CR models, gives the best results. ARCR models belong to the group of multivariate time series models (KREŠIĆ, 2010) implying multiple linear regression. However, this model takes gross precipitation as input and gives the same weight factor to all precipitation values, i. e. equalizes the influence of longer and more intense summer rainfalls, while at the same time does not take into account increased evapotranspiration and moisture deficit in the unsaturated zone (in the recession period) and other factors that during the summer months further affect the effective infiltration into the karst aquifer (KREŠIĆ, 2010). To amortize this problem to some extent, it is necessary to apply simple mathematical operations that include filtering gross precipitation and their attenuation. This can be achieved by transforming gross precipitation using a linear moving average filter (KREŠIĆ, 2010). This filter transforms the gross precipitation based on a predefined moving average window, which is expressed in days. In general, the application of this filter somewhat reduces the multiple regression coefficient of the ARCR model. However, the positive effects are reflected in better results in the recession period, while in the period of higher infiltration the results of the model are quite like those of model with gross precipitation.

RESULTS AND DISCUSSION

Stochastic modelling was applied to time series of the Mokra and Divljana karst spring discharge and precipitation from the rain station Niš in the period 2015 – 2017. For the sake of more reliable analysis and modelling, the Mokra and Divljana karst springs were considered as one discharge point, hence the summarized values of discharge were used in the analysis. The Mokra and Divljana karst springs form the same karst

hydrogeological system, while the internal delineation of the sub-catchments could not be reliably determined at this time.

Autocorrelation of groundwater discharge data shows that the system memory is about 43 days, after which the random variable becomes independent. On the other hand, the autocorrelation of precipitation shows the system memory of only 2 days, which is understandable considering the randomness of this variable. The cross-correlogram shows the reaction of large karst channels with a delay of only one day, while the statistical influence of precipitation on the discharge of the Mokra and Divljana karst springs exists until the 6th day. Regarding the application of AR and CR models, the coefficients of the autoregressive model range from 0.8913 for the 1st model order to 0.9015 for the 10th order, which is a consequence of long-term memory. In contrast, the coefficients of the cross-regression model are low and range from 0.1753 for the 1st order to 0.5411 for the 10th order. The coefficients of the combined autoregressive-cross-regressive model (ARCR) vary from 0.9150 for the 1st order to 0.9229 for the 10th order. Model validity does not increase significantly with increasing of the model order, based on model correlation coefficients. Therefore, KREŠIĆ (2010) states that, when the time series is well autocorrelated, the model order of 1 or 2 (sometimes up to 4) gives quite satisfactory results in hydrogeological practice, which was used to simulate the regime of the Mokra and Divljana karst springs.

Periods of high and average waters are generally well simulated, while the largest differences of measured and predicted values are in low water periods. During these periods, noise is noticeable, because of unfiltered input signals. To avoid these problems, a linear moving average filter (MA) was applied to precipitation values. The 40-day moving average window was applied to the existing ARCR model, which generally corresponds to the memory of the karst hydrogeological system calculated using the autocorrelation function (Fig. 2a). Therefore, the model with filtered gross precipitation clearly shows a better match between the simulated and recorded discharge data not only during the recharge period of the karst system, but also during the recession period.

In order to test the goodness of the model, a correlation was made between the recorded and simulated data of daily discharge at the springs for the period 2015 - 2017 (Fig. 2b). Fig.2b shows that the correlation coefficient for the karst springs is high $R^2 = 0.8654$, i. e. $R = 0.9303$, which indicates a good fit between the recorded and simulated values. Also, Table 1 provides an analysis of model variances and residuals in the so-called ANOVA table, which tests the model via the F coefficient that follows the Fisher distribution. In order to confirm the goodness of the regression model, the F value must be greater than the value for the selected confidence interval α , which is usually 0.05, as in this case. Since the value of F for the selected confidence interval is 1.94 (according to statistical tables), and the calculated F statistics of the regression model is greater than 10, it can be concluded that the model is good.

CONCLUSIONS

Stochastic analysis was performed for time series of the Mokra and Divljana karst springs and precipitation from the rain station Niš for the period 2015 – 2017. Also, the summary value of springs' discharge was used as a time series, since it is a unique karst hydrogeological system with several discharge points, out of which the Mokra and Divljana springs are the most significant. Within the stochastic analysis, time series were analysed using autocorrelation and cross-correlation functions, while the simulation of

discharge was performed using an autoregressive-cross-regressive model (ARCR), i. e. autoregressive-cross-regressive model with transformed precipitation using a linear moving average filter (ARCR-MA) as an input signal.

Considering the large differences between the simulated and recorded values of the discharge in the recession period using the ARCR model, a linear moving average filter was applied to the precipitation data to improve the simulation model. The transformed ARCR-MA model gave much better results in the low water period, while the simulated values are almost the same in the high and average water periods. In addition to the indicators of the goodness of the model, it is necessary to compare the results with the discharge data that were not included in the model creation, in order to calibrate the model. In other words, the ARCR-MA model was used to simulate spring discharge data for the period January – December 2018, for comparison with the measured data. The simulation showed a good match between the measured and simulated values of groundwater discharge of the Mokra and Divljana karst springs, with the coefficient of correlation of $R = 0.95$. This simulation model can give a relatively reliable short-term forecast of daily discharge values of the Mokra and Divljana karst springs.

***Acknowledgments.** The research was carried out using the funds provided by the Ministry of Education, Science and Technological Development through the project No. 176022. Authors express their gratitude to PUC „NAISSUS“ for provided data.*

LITERATURA – REFERENCES

- KOVAČIĆ, Z., 1995: *Analiza vremenskih serija*; univerzitetski udžbenik, Ekonomski fakultet u Beogradu, p. 347
- KREŠIĆ, N., 1991: *Kvantitativna hidrogeologija karsta, sa elementima zaštite podzemnih voda*, Naučna knjiga, Beograd, p. 192
- KREŠIĆ, N., 2010: *Modeling*; In: Groundwater hydrology of springs: Engineering, Theory, Management, and Sustainability (Kresic N. & Stevanovic Z. (Eds)), Butterworth-Heinemann – Elsevier, USA, pp. 165-230
- KREŠIĆ, N., 2013: *Water in Karst – Management, Vulnerability and Restoration*, McGraw Hill, United States of America, pp. 708
- KREŠIĆ, N. & PANDAY, S., 2017: *Numerical groundwater modelling in karst*; In: Parise, M., Gabrovsek, F., Kaufmann, G. & Ravbar, N. (Eds) *Advances in Karst Research: Theory, Fieldwork and Applications*. Geological Society, London, Special Publications, 466
- PANDAY, S., LANGEVIN, C.D., NISWONGER, R.G., IBARAKI, M. & HUGHES, J.D., 2013: *MODFLOW-USG Version 1: an Unstructured Grid Version of MODFLOW for Simulating Groundwater Flow and Tightly Coupled Processes Using a Control Volume Finite-difference Formulation*. US Geological Survey, Techniques and Methods, 6-A45.
- PETROVIĆ, B., 2014: *Osnovne karakteristike izdanskog toka karstnih voda Svrljiških planina i Suve planine*, Zbornik radova XVI kongresa geologa Srbije „Optimalno istraživanje i održivo korišćenje geoloških resursa“, Donji Milanovac, ISBN: 978-86-86053-14-5, pp. 340-346
- PETROVIĆ, B., 2020: *Intrinsic groundwater vulnerability assessment by multiparameter methods, a case study of Suva Planina Mountain (SE Serbia)*. Environ Earth Sci 79, 85. <https://doi.org/10.1007/s12665-020-8825-8>
- PETROVIĆ, B. & MARINOVIĆ, V., 2018: *Analysis of discharge conditions of Mokra and Divljana karst springs (SE Serbia)*; In: Review of the Bulgarian Geological Society, vol. 79, part 3; National Conference with international participation “GEOSCIENCES 2018”, Bulgarian Geological Society, Sofia, Bulgaria, p. 147 – 148
- VUJISIĆ, T., NAVALA, M., KALENIĆ, M., HADŽI-VUKOVIĆ, M., ANĐELKOVIĆ, J., KRSTIĆ, B., RAKIĆ, B., 1971: *OGK SFR Jugoslavije list Bela Palanka K 34-33 tumač i karta, R=1:100.000*, autori karte: Vujisić T., Navala M., Kalenić M., Krstić B., Maslarević Lj., Marković B., Buković J., Savezni geološki zavod (SGZ), Beograd, p. 69
- STEVANOVIĆ, Z., 1991: *Hidrogeologija karsta Karpato-Balkanida istočne Srbije i mogućnosti vodosnabdevanja*, Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd, p. 245
- STEVANOVIĆ, Z., 1995: *Karstne izdanske vode Srbije - korišćenje i potencijalnost za regionalno vodosnabdevanje*, Monografija: *Vodni mineralni resursi litosfere Srbije*, Monograf. Pos. izd. RGF (ed. Z. Stevanović), Beograd, str.77-119
- STEVANOVIĆ, Z., 2019: *Karst waters in potable water supply: a global scale overview*. Environmental Earth Science. Springer, 78: 662; <https://doi.org/10.1007/s12665-019-8670-9>