

# Ефикасност дистрибуције и коришћења природног гаса у домаћинствима; Natural gas distribution and domestic usage efficiency

Dejan Brkić



Дигитални репозиторијум Рударско-геолошког факултета Универзитета у Београду

[ДР РГФ]

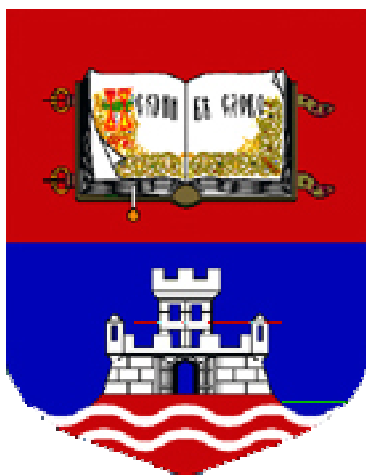
Ефикасност дистрибуције и коришћења природног гаса у домаћинствима; Natural gas distribution and domestic usage efficiency | Dejan Brkić | Универзитет у Београду | 2010-03-30 | |

<http://dr.rgf.bg.ac.rs/s/repo/item/0003940>

Дигитални репозиторијум Рударско-геолошког факултета Универзитета у Београду омогућава приступ издањима Факултета и радовима запослених доступним у слободном приступу. - Претрага репозиторијума доступна је на [www.dr.rgf.bg.ac.rs](http://www.dr.rgf.bg.ac.rs)

The Digital repository of The University of Belgrade Faculty of Mining and Geology archives faculty publications available in open access, as well as the employees' publications. - The Repository is available at: [www.dr.rgf.bg.ac.rs](http://www.dr.rgf.bg.ac.rs)

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
РУДАРСКО-ГЕОЛОШКИ ФАКУЛТЕТ



Докторска дисертација:

**ЕФИКАСНОСТ ДИСТРИБУЦИЈЕ И КОРИШЋЕЊА  
ПРИРОДНОГ ГАСА У ДОМАЋИНСТВИМА\***

Кандидат:

**мр Дејан Бркић**, дипл. инж. рударства

Београд, 2009.

\*Natural Gas Distribution and Domestic Usage Efficiency (превод наслова дисертације на енглески)

мр **Дејан Бркић**, дипл. инж. рударства

Докторска дисертација:

„Ефикасност дистрибуције и коришћења природног гаса у домаћинствима“

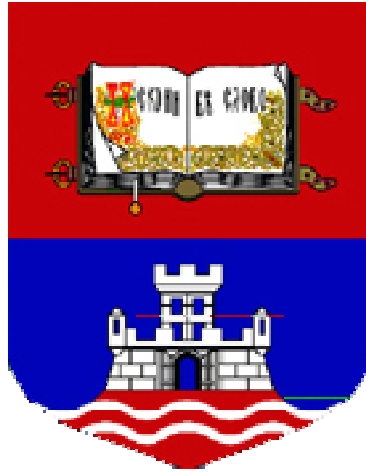
Универзитет у Београду, Рударско-геолошки факултет, Београд

Израду докторске дисертације финансијски подржало Министарство за науку и технолошки развој Републике Србије на основу уговора о стипендирању доктораната бр. 45 од 08.06.2006. године.

Одлуком научно-наставног већа Рударско-геолошког факултета Универзитета у Београду бр. 1/35 од 31.01.2006. године сходно члану 142. став 1 Статута Рударско-геолошког факултета Универзитета у Београду одобрена израда докторске дисертације.

Одлуком Стручног већа за рударске и геолошке науке Универзитета у Београду 04 бр. 14/1 од 19.04.2006. године сходно члану 123. Став 4. и члана 128. Закона о високом образовању („Службени гласник РС, бр 76/05“), члана 124. став 1. тачка 3. Статута Универзитета у Београду – пречишћен текст („Гласник Универзитета у Београду“, број 128/05) и чланова 8.-15. Правилника о стручним већима Универзитета у Београду - пречишћен текст („Гласник Универзитета у Београду“, број 124/05), а на захтев Рударско-геолошког факултета Универзитета у Београду бр. 1/46 од 03.02.2006. године дата сагласност на предлог теме докторске дисертације.

© Дејан Бркић, забрањено умножавање целине или ма ког дела ове дисертације без писмене сагласности аутора



# **Natural Gas Distribution and Domestic Usage Efficiency**

*/in Serbian/*

**by**

**Dejan Brkić, MSc in Petroleum Engineering**

**A dissertation submitted for the degree of PhD in technical  
sciences**

**University of Belgrade,  
Faculty of Mining and Geology  
Belgrade, Serbia, 2009.**





Ментор:

Др Тома Танасковић, дипл. инж. рударства

Редовни професор Рударско-геолошког факултета Универзитета у Београду

Чланови комисије за оцену и одбрану докторске дисертације:

1. Др Тома Танасковић, дипл. инж. рударства  
Редовни професор Рударско-геолошког факултета Универзитета у Београду
2. Др Веселин Баталовић, дипл. инж. рударства  
Редовни професор Рударско-геолошког факултета Универзитета у Београду
3. Др Душан Даниловић, дипл. инж. рударства  
Ванредни професор Рударско-геолошког факултета Универзитета у Београду
4. Др Мирољуб Аџић, дипл. инж. машинства  
Редовни професор Машинског факултета Универзитета у Београду

Одлуком научно-наставног већа Рударско-геолошког факултета Универзитета у Београду бр. 1/210 од 27.10.2009. године сходно члану 175. став 4 Статута Рударско-геолошког факултета Универзитета у Београду формирана је Комисија за оцену и одбрану предметне докторске дисертације у горе наведеном саставу.

## ПРЕДГОВОР

Аутор се током четири године рада на овој дисертацији посветио првенствено проблему протока природног гаса кроз цевоводе. Посебан научни допринос ове дисертације је постигнут на пољу оптимизације гасних дистрибутивних мрежа прстенастог типа<sup>1</sup>. Проблем оптималног начина коришћења природног гаса за потребе подмиривања грејних потреба становништва у градским условима је такође решаван<sup>2,3</sup>. Ипак главни део доктората се бави унапређењем самог система за дистрибуцију гаса. Да би се правилно приступило решавању овога проблема било је нужно проучити сам феномен протока природног гаса кроз цевоводе. Овај део дисертације обрађује одређена поглавља хидраулике, даје приказ одређених проблема у новом светлу. Даје се врло једноставан и оригиналан поступак за решавање Колбрукове једначине (Colebrook, 1937)<sup>4</sup>; односно једначине Колбрука и Вајта (Colebrook-White, 1939)<sup>5</sup> које су дате у имплицитном облику у односу на коефицијент трења. Колбрукова једначина и једначина Колбрука и Вајта су синоними, те је свеједно који се израз користи и у овој дисертацији се оба израза равномерно помињу, без разлике. Развијена је и експлицитна апроксимација ове једначине уз примену трансцендентне Ламберт  $W$  функције. Даје се такође препорука коју једначину протока од расположивих у бројној литератури применити сходно условима храпавости унутрашње површи цеви и брзине којом природни гас протиче кроз цевовод, било да је челични или од пластичног материјала (ПВЦ). Иако су најзначајнија истраживања у овој области обављена још крајем 19. и почетком 20. века (Reynolds, 1883)<sup>6</sup>, (Blasius, 1908)<sup>7</sup>, (Blasius, 1913)<sup>8</sup>, (Nikuradse, 1932)<sup>9</sup>, (Nikuradse, 1933)<sup>10</sup>, (Moody, 1944)<sup>11</sup>, (Renouard, 1952)<sup>12</sup>, итд, још се може дати значајан допринос у систематизацији постојећих једначина и одабиру најпогодније за услове струјања гаса у цевоводу имајући у виду да у нашој домаћој литератури постоји доста недоумица по том питању (видети докторску дисертацију Борислава С. Лилића са грађевинског факултета из 1956. године<sup>13</sup>). У најважнијем делу доктората дају се нове методе за оптимизацију гасних дистрибутивних мрежа са прстеновима. Прва истраживања из ове области хидраулике врше се тек у четвртој деценији 20. века, уз важну напомену да се у главним радовима у светској научној литератури из ове области разматрају првенствено водоводни системи. Истина, у градској гасоводној мрежи прстенастог типа, падови притисака су релативно мали тако да се

<sup>1</sup> Brkić, D. 2009. An Improvement of Hardy Cross Method Applied on Looped Spatial Natural Gas Distribution Networks. doi:10.1016/j.apenergy.2008.10.005 Applied Energy 86 (7-8) 1290-1300 (на енглеском)

<sup>2</sup> Brkić, D. 2009. Serbian gas sector in the spotlight of oil and gas agreement with Russia. Energy Policy 37 (5) 1925-1938 doi:10.1016/j.enpol.2009.01.031 (на енглеском)

<sup>3</sup> Brkić, D. 2008. Transportation: Serbian, Russian pipeline accord enhances European gas security. Oil & Gas Journal 106 (48) 52-54 (на енглеском)

<sup>4</sup> Colebrook, CF, White, CM. 1937. Experiments with fluid friction in roughened pipes. Proceedings of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical Sciences 161 (906) 367-381 (на енглеском)

<sup>5</sup> Colebrook, CF. 1939. Turbulent flow in pipes with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws. Journal of the Institution of Civil Engineers (London) 11 (4) 133-156 (на енглеском)

<sup>6</sup> Reynolds, O. 1883. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels. Philosophical Transactions of the Royal Society A 174 935-982. (на енглеском)

<sup>7</sup> Blasius, H. 1908. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung (The boundary layers in fluids with little friction, English translation in Technical Memorandum 1256; NACA, Washington 1950) (на енглеском и немачком)

<sup>8</sup> Blasius, H. 1913. Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Forschungs-Arbeit des Ingenieur-Wesens 131 (на немачком)

<sup>9</sup> Nikuradse, J. 1932. Gesetzmässigkeit der turbulenten Strömung in glatten Röhren. Ver Dtsch Ing-Forschungsh 356 (на немачком)

<sup>10</sup> Nikuradse, J. 1933. Strömungsgesetze in rauhen Röhren (Laws of fluid in rough pipes, English translation in Technical Memorandum 1292; NACA, Washington 1950) (на енглеском и немачком)

<sup>11</sup> Moody, LF. 1944. Friction factors for pipe flow. Transactions of ASME 66 (8) 671-684 (на енглеском)

<sup>12</sup> Renouard, P. 1952. Nouvelle méthode pour le calcul des réseaux maillés de conduites de gaz. Communication au Congrès du Graz. (на француском)

<sup>13</sup> Лилић, БС. 1958. Расподела протока у хидрауличким мрежама. Докторска дисертација одбрањена на Грађевинском факултету Универзитета у Београду 25. јуна 1956. (доступна и у виду истоимене монографске публикације, Београд 1958 у издању Универзитета у Београду) (на српском)

гас може посматрати као течност, тј. као нестишљив флуид (некомпресибилан), нпр. као вода или нафта; сличан проблем се јавља и при протоку ваздуха кроз вентилационе системе у зградама (Aynsley, 1997)<sup>14</sup>, односно у рудницима (Лилић и Кузмановић, 1993)<sup>15</sup>. Пионир у области прорачуна прстенстих мрежа је Харди Крос (Hardy Cross) који је 1936. објавио први рад из ове области хидраулике на енглеском говорном подручју (Cross, 1936)<sup>16</sup>. Руски научници из тога доба Андријашев (1932)<sup>17</sup> и Лобачев (1934)<sup>18</sup> такође дају своје доприносе. Даља унапређења су објављена тек у радовима из шездесетих и седамдесетих година 20. века у којима су описане методе развијене још увек првенствено за водоводне и делимично канализационе системе. У овој дисертацији су презентовани неки нови методи развијени током четворогодишњег истраживања или су прилагођени већ постојећи који се у свом изворном облику већ користе за водоводе. Ово прилагођавање се огледа првенствено у томе што је сваки постојећи метод преведен у матричну форму. Прорачуни су урађени у програму MS Excel. У нашим предузећима се данас углавном користе готови програмски пакети за прорачун прстенстих типа мрежа. Обично се у пројектима наводи да је проблем решен методом Харди Кроса без детаљнијих објашњења поступка прорачуна. Наиме сви методи који се користе за прстенстих мрежа се у домаћој литератури поистовећују са именом Харди Кроса. У докторату се даје нов приступ решавању проблема који за резултат има оптимизују пречника цеви у мрежи. Овакав инверзан приступ основном проблему је до сада ретко примењиван у пракси, посебно врло ретко у домаћој. Решење инверзног проблема може се сматрати изузетно важним доприносом унапређењу метода прорачуна чиме се уводи оптимизација на овом пољу. У нашој литератури, у уџбеницима хидраулике и механике флуида практично се нигде не посвећује пажња прорачунима прстенстих гасних мрежа, док за водоводне постоји ограничена литература. Трећи и не мање важан део доктората се тиче коришћења природног гаса у домаћинствима. Ову тему је аутор већ обрађивао у својој магистарској тези (Бркић, 2005)<sup>19</sup> као и монографију која је тим поводом издата (Бркић, 2006)<sup>20</sup>, с тиме да се овде дају и варијанте са различитим ефикасностима кућног гасног котла. У овом делу су поређене инвестиције у гасну дистрибутивну и топловодну дистрибутивну мрежу за различите типове урбаних насеља, узимајући случај да се домаћинсва у оба случаја греју применом радијаторског грејања.

Све гасоводне мреже које су обрађене у докторату раде са улазним притиском гаса од  $4 \cdot 10^5$  Pa abs.

Свако поглавље дисертације је покривено са најмање по једним радом категорије M21<sup>21,22</sup>, M22<sup>23</sup>, M23<sup>24,25,26,27</sup> или M25<sup>28</sup> који су реферисани у Science Citation Index Expanded (SCI) а у складу са

<sup>14</sup> Aynsley, RM. 1997. A resistance approach to analysis of natural ventilation airflow networks. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 67-68 711-719 (на енглеском)

<sup>15</sup> Лилић, Н, Кузмановић, Д. 1993. Математичко моделирање рудничких вентилационих мрежа. Рударско геолошки факултет Универзитета у Београду, Београд, ISBN 86-80887-14-5 (на српском)

<sup>16</sup> Cross, H. 1936. Analysis of flow in networks of conduits or conductors. Engineering Experimental Station University of Urbana 286 3–29 (на енглеском) - Занимљиво је да је овај рад и његов једини рад из ове области (ужа област интересовања Харди Кроса су биле грађевинске конструкције)

<sup>17</sup> Андријашев, ММ. 1932. Прорачун водоводних мрежа. Москва (на руском) – Харди Крос метода је на руском говорном подручју позната као метода М.М. Андријашева с тим да је ова метода донекле модификована о чему ће бити више речи у самој дисертацији

<sup>18</sup> Латшеников, АМ, Лобачев, ВГ. 1945. Хидраулика. Москва-Лењинград (на руском); постоји превод на српском: Марковић, Б.-преводац; Хидраулика. 1950. Београд /Научна књига (на српском)

<sup>19</sup> Бркић, Д. 2005. Одређивање граничних параметара употребе природног гаса у Београду. Магистарски рад Рударско-геолошки факултет, Београд (на српском)

<sup>20</sup> Бркић, Д. 2006. Природни гас као гориво за грејање. Задужбина Андрејевић библиотека Academia, Београд, ISBN 86-7244-562-7 (на српском)

<sup>21</sup> Brkić, D, Tanasković, TI. 2008. Systematic approach to natural gas usage for domestic heating in urban areas. Energy 33 (12) 1738-1753 doi:10.1016/j.energy.2008.08.009 (на енглеском)

критеријумима дефинисаним у „Правилнику о поступку и начину вредновања, и квантитативном исказивању научноистраживачких резултата истраживача“<sup>29</sup>. Овима је извршена верификација резултата које доноси дисертација у складу са највишим критеријумима који се користе данас у светској науци укључујући најстрожу научну рецензију. Ауторов фактор научне утицајности закључно са 17.11.2009 износи  $M=81,5$ .

Свака референца наведена у дисертацији даје се у пуном облику на крају текста у виду абecedног списка литературе (не азбучног иако је рад писан ћириличним писмом, из разлога што је већина референци са енглеског говорног подручја). Коришћен је Харвардски стил навођења изворне литературе, тј. у загради се уз презиме на латиничном писму даје и година објављивања цитираног рада. Уколико аутор има два или више радова објављених исте године уз годину се додаје мало латинично слово *a*, за други рад објављен исте године од истих аутора додаје мало латинично слово *b* и тако редом наредна слова абецедне. Имена аутора који су цитирани рад објавили на српском језику дају се у тексту ћириличним писмом док се имена аутора који су цитирани рад објавили на страном језику наводе у тексту транскрибована ћириличним писмом. За радове цитиране у тексту а писане на страним језицима обавезно је у загради дато име аутора у оригиналу заједно са годином објављивања рада. Уколико има више од два аутора, цитира се само први аутор с тим да додаје сентенца *et al* на латинском у значењу и остали, док се на крају дисертације наводе имена свих аутора без изузетка.

Аутор се унапред извињава за све неугодности које грешке које сигурно постоје у дисертацији могу да направе читаоцу. Где год се аутор позива на литерарне наводе, није згорег проверити тражени а цитирани податак у оригиналном тексту.

Сажетак се поред српског језика, којим је и писана ова дисертација и који је уједно и ауторов матерњи језик, упоредо даје на енглеском језику (*Abstract*), који аутор доста добро познаје, а ако не, познаје га бар у толикој мери да на овом језику (енглеском) може да објављује резултате својих истраживања у врхунским светским научним часописима.

У прилогу дисертације се даје одређени број нумеричких примера.

Аутор је током рада на овој дисертацији био стипендиста Министарства за науку и технолошки развој Републике Србије. Без ове подршке тешко да би дисертација могла бити завршена, посебно имајући у виду обим истраживања који је урађен. Аутор има задовољство да се захвали Министарству за науку и технолошки развој Републике Србије на дугогодишњем финансирању кроз магистарску и докторску стипендију.

---

<sup>22</sup> Brkić, D. 2009. Serbian gas sector in the spotlight of oil and gas agreement with Russia. *Energy Policy* 37 (5) 1925-1938 doi:10.1016/j.enpol.2009.01.031 (на енглеском)

<sup>23</sup> Brkić, D. 2009. An improvement of Hardy cross method applied on looped spatial natural gas distribution networks. *Applied Energy* 86 (7-8) 1290-1300 doi:10.1016/j.apenergy.2008.10.005 (на енглеском)

<sup>24</sup> Brkić, D. 2008. Transportation: Serbian, Russian pipeline accord enhances European gas security. *Oil & Gas Journal* 106 (48) 52-54 (на енглеском)

<sup>25</sup> Brkić, D. 2009. Solution of the implicit Colebrook-White equation using Excel. *Hydrocarbon Processing /in press/* (на енглеском)

<sup>26</sup> Brkić, D. 2009. New reformulation of Colebrook-White equation for flow friction based on Lambert-W function. *Hydrocarbon Processing /in press/* (на енглеском)

<sup>27</sup> Brkić, D. 2009. Gas distribution network hydraulic problem from practice, *Petroleum Science and Technology /in press/* (на енглеском)

<sup>28</sup> Brkić, D. 2009. Comments on "Settling velocities of particulate systems 15: Velocities in turbulent Newtonian flows", *International Journal of Mineral Processing* 92 (3-4) 201-202 doi: 10.1016/j.minpro.2009.03.010 (на енглеском)

<sup>29</sup> Службени гласник РС, број 38/2008 од 21 марта 2008. (на српском)

*Мајци Софији и сестри Катарини аутор дугује највећу захвалност на породичној подршци без које би бављење једним тако захтевним послом као што је научно-истраживачки рад било тешко замисливо.*

*Аутор је захвалан ментору Томи Танасковићу на дугогодишњој коректној сарадњи и конструктивним сугестијама у циљу побољшања квалитета дисертације.*

*Штампање коначне верзије доктората завршено 17.11.2009. године.*

*Аутор  
У Београду,  
новембра 2009.*

## САДРЖАЈ:

### ЕФИКАСНОСТ ДИСТРИБУЦИЈЕ И КОРИШЋЕЊА ПРИРОДНОГ ГАСА У ДОМАЋИНСТВИМА (Natural Gas Distribution and Domestic Usage Efficiency)

А. Увод.....	- 1 -
Б. Отпори протоку гаса у цевима .....	- 3 -
Б.1. Ламинарни режим .....	- 9 -
Б.2. Хидраулички 'гладак' режим .....	- 10 -
Б.3. Потпуно турбулентан режим.....	- 15 -
Б.4. Делимично турбулентан режим .....	- 16 -
Б.5. Експлицитне апроксимације Колбрукове једначине.....	- 20 -
Б.5.1 Модyjeва апроксимација .....	- 21 -
Б.5.2 Вудова апроксимација.....	- 21 -
Б.5.3 Екова апроксимација .....	- 21 -
Б.5.4 Јанова апроксимација.....	- 22 -
Б.5.5 Сваме-Јанова апроксимација.....	- 22 -
Б.5.6 Черчилова апроксимација.....	- 22 -
Б.5.7 Ченова апроксимација.....	- 22 -
Б.5.8 Роундова апроксимација.....	- 23 -
Б.5.9 Барова апроксимација.....	- 23 -
Б.5.10 Зигранг-Силвестрова апроксимација .....	- 23 -
Б.5.11 Хааландова апроксимација.....	- 23 -
Б.5.12 Сергидесова апроксимација .....	- 24 -
Б.5.13 Манадилијева апроксимација .....	- 24 -
Б.5.14 Апроксимација Ромеа, Роја и Монзона .....	- 24 -
Б.5.15 Сонад-Годарева апроксимација .....	- 24 -
Б.5.16 Рао-Кумарева апроксимација .....	- 25 -
Б.5.17 Апроксимација аутора - Бркићева апроксимација .....	- 25 -
Б.6. Ламберт W функција у хидраулици.....	- 26 -
Б.6.1 О Ламберт W функцији уопште.....	- 27 -
Б.6.2 Приближно решавање Ламберт W функције .....	- 27 -

Б.6.3 Егзактна математичка трансформација Прандтлове једначине у експлицитан облик помоћу Ламберт $W$ функције .....	- 29 -
Б.6.4 Егзактна математичка трансформација Колбрукове једначине у експлицитан облик помоћу Ламберт $W$ функције .....	- 31 -
Б.7. Решавање имплицитно задатих израза помоћу <i>MS Excel</i> -а (ver. 2007).....	- 32 -
Б.8. Падови притиска у цевоводима .....	- 36 -
Б.9. Реноарова једначина прилагођена за гасоводне системе .....	- 39 -
Б.10. Завршне напомене о протоку флуида кроз цевоводе .....	- 42 -
Б.11. Литературне напомене о протоку флуида кроз цевоводе .....	- 45 -
В. Дистрибуција гаса цевоводима; прорачун стационарне расподеле протока у задатој мрежи	- 49 -
В.1. Харди Крос метод (Single contour adjustment method).....	- 51 -
В.1.1 Одабир алгебарског знака за поправни проток .....	- 59 -
В.1.2 О просторности мрежа за дистрибуцију флуида .....	- 61 -
В.1.3. Модификовани Харди Крос метод (Simultaneous contour equation solution).....	- 67 -
В.1.4. Варијације Харди Крос метода; метод М.М. Андријашева.....	- 76 -
В.2. Метод чворова (The Node Method) .....	- 78 -
В.3. Обједињени метод чворова и петљи (The Node-Loop Method) .....	- 82 -
Г. Дистрибуција гаса цевоводима, проблем оптимизације пречника цеви при константним протоцима.....	- 103 -
Д. Примери из праксе; реалне гасоводне мреже прстенастог типа.....	- 123 -
Ђ. Литературне напомене у вези са пројектовањем гасоводних мрежа .....	- 135 -
Е. Избор оптималног система грејања на природни гас на основу урбанистичких параметара .	- 139 -
Ж. Закључци.....	- 179 -
Литература .....	- 184 -
Сажетак .....	- 202 -
Abstract.....	- 207 -
Прилог .....	- 211 -

**Коришћене ознаке:**

I-Електрична струја (A)  
U-Електрични напон (V)  
r, R-Електрични отпор ( $\Omega$ )  
p-Притисак (Pa)  
 $\lambda$ -Дарсијев коефицијент хидрауличког отпора (-)  
f-Фанингов коефицијент хидрауличког отпора (-)  
L-Дужина цеви (m)  
D-Пречник цеви (m)  
 $\rho$ -Густина флуида ( $\text{kg/m}^3$ )  
v, u-Брзина (m/s)  
Q-Проток ( $\text{m}^3/\text{s}$ )  
t-Напон смицања (Pa)  
Re-Рејнолдсов број (-)  
 $\nu$ ,  $\mu$ -Кинематски вискозитет ( $\text{m}^2/\text{s}$ )  
 $\eta$ -Динамички вискозитет (Pa·s)  
A-Блазијусов коефицијент (-)  
A-Помоћна промењива у j-ни (36)  
A-Помоћна промењива у j-ни (87)  
B-Блазијусов експонент (-)  
 $\alpha$ -Прандтлов коефицијент у j-ни (93) (-)  
 $\beta$ -Прандтлов експонент у j-ни (93) (-)  
B-Помоћна промењива у j-ни (36)  
B-Помоћна промењива у j-ни (87)  
B\*-Помоћна промењива у j-ни (53)  
C-Помоћна промењива у j-ни (87)  
D-Помоћна промењива у j-ни (87)  
M-Молекулска маса гаса (kg/mol)  
z-Фактор компресибилитета гаса (-)  
 $\Phi(\text{Re})$ -Помоћна функција у j-ни (53)  
 $\alpha$ -Помоћна промењива у j-ни (36)  
 $\psi$ -Помоћна промењива у j-ни (39) и (49)  
S-Помоћна промењива у j-ни (52) и (54)  
 $\theta$ -Помоћна промењива у j-ни (43)  
 $\epsilon$ -Храпавост унутрапњости цеви (m)  
R-Полупречник цеви (m)  
R-Хидраулички отпор  
x-Аргумент Ламберт-W функције  
y-Помоћни, „померени“ аргумент Бојдове Ламберт-W функције  
W-Ламберт-W функција  
 $\omega$ -Помоћна, „померена“ Бојдова Ламберт-W функција  
=Помоћна Бојдова функција  
 $\Omega$ -Помоћна Бојдова функција  
a-Помоћна променљива дефинисана у тексту  
b-Помоћна променљива дефинисана у тексту  
Ф-Помоћна променљива дефинисана j-ном (71)  
O-Помоћна променљива дефинисана j-ном (81)



**Коришћене ознаке (наставкак са претходне стране):**

H-Висина (m)

T-Температура (K)

$\Delta$ -Харди Кросова поправка протока ( $m^3/s$ )

$\Delta$ -Поправка у методи чворова ( $P_a$  код водовода,  $P_a^2$  код гасовода)

$\Delta$ -Коначна промена величине

F(Q)-Функција протока (код водовода пад притиска, а код гасовода разлика квадрата притиска на улазу и излазу из цеви)

F(D)- Функција пречника (код водовода пад притиска, а код гасовода разлика квадрата притиска на улазу и излазу из цеви)

C,  $\Delta \tilde{p}_x^2$  - разлика квадрата притиска на улазу и излазу из цеви x

G-трошкови гасоводне система (€)

MPC-трошкови мерно регулационе станице (€)

PC-трошкови регулационе станице (€)

GM-трошкови гасоводне мреже (€)

MC-трошкови мерног сета (€)

KK-трошкови гасног кућног котлића (€)

OG-трошкови одржавања гасовода (€)

T-трошкови топлификационог система (€)

TM-трошкови топоводне мреже (€)

PT-трошкови размењивача топлоте (€)

HT-трошкови за изградњу нове топлане (€)

OT-трошкови одржавања топлификационог система (€)

НСВ-нето садашња вредност трошкова (€)

dr-дисконтна стопа (%)

y-број зграда на основном урбанистичком сегменту (-)

t-време (године)

Константе:

$\pi$ -Лудолфов број (=3,1415)

g-Убрзање силе земљине теже ( $9,81 m/s^2$ )

R-Универзална гасна константа (=8,31441 J/(mol·K))

Ближе одређење ознака (subscript):

1-Односи се на почетни притисак

2- Односи се на крајњи притисак

u-Унутрашњи

L-Ламинарни (хидраулички режим)

n-Нестабилни (хидраулички режим)

g-Глатки (хидраулички режим)

t-Турбулентни (хидраулички режим)

dt-Делимично турбулентни (хидраулички режим)

sr-Средњи

st-Стандардни

r-Релативни

vaz-Ваздух

101:, 105:, 102:, 106: - једначине из [www.bre.co.uk/sap2005](http://www.bre.co.uk/sap2005), у докторату (229-232)

#### Фауна Чилеа

*Alicanto* је ноћна птица која се храни златним или сребрним жилама. Врста која се храни златом може се препознати по златном светлу које јој зрачи из крила када их рашири у трку (јер не може да лети); *Alicanto* који се храни сребром препознаје се, као што се може и очекивати, по сребрном светлу.

Разлог што птица не може да лети није у крилима, која су потпуно нормална, већ у металној храни која јој оптерећује гушу. Кад је гладна, креће се врло брзо; наждерана, једва је кадра пузати.

Истраживачи или рударски инжењери верују да ће се обогатити само ако буду те среће да их води *Alicanto*, зато што их та птица може навести на откриће скривене руде. Упркос томе, истраживач мора бити врло опрезан, јер ако птица посумња да је неко прати, пригуши светло и нестане у мраку. Исто тако, изненада може променити смер и намамити прогонитеље у понор.

*"Manual de zoología fantástica"*  
*de Jorge Luis Borges y*  
*Margarita Guerrero*

Κύριε ἔλεησον

## А. Увод

Дисертација се првенствено бави развојем ефикасније методе за прорачун гасоводних мрежа прстенастог типа. Развијени метод, као и досада постојећи методи се могу поред прорачуна гасоводних мрежа прстенастог типа користити и за прорачун водоводних мрежа истог типа, као и за прорачун вентилационих мрежа како у рудницима, тако и у стамбеним зградама.

У првом поглављу доктората се врши одабир најпогодније релације за прорачун Дарсијевог коефицијента хидрауличког отпора. За гасоводне мреже се у данашње време највише користе пластичне полиетиленске цеви које су практично глатке, тако да је хидраулички режим који влада у њима тзв. хидраулички гладак. За овај режим када је у питању проток гаса је најпогоднија Реноарова једначина. Она је посебно погодна зато што за њену примену не мора експлицитно да се израчунава Дарсијев коефицијент хидрауличког отпора. Реноарова једначина за природни гас је развијена 1952. године. Када су водоводи у питању најчешће је заступљен делимично турбулентан режим, а од формула које се користе за рачунање Дарсијевог коефицијента хидрауличког отпора користи се имплицитна Колбрукова једначина из 1939. године. Ова једначина се користи и када је у питању прорачун протока нафте или гаса са тиме да се према препоруци Америчког института за гас – АГА, уместо коефицијента 2,51 користи 2,825. Једначина је имплицитна пошто се Дарсијев коефицијент хидрауличког отпора појављује са обе стране знака једнакости. Ово је трансцендентна емпиријска једначина која је добијена на основу експеримената Колбрука и Вајта из 1937. године. Трансцендентна значи да не може да се изрази у коначном облику преко елементарних алгебарских функција, тако да она може да се реши само приближно и то методом покушаја и пробе, или што је чешћи случај неком од нумеричких итеративних метода. Последњих пар година се појавило пар чланака у иностраним научним публикацијама који се баве трансформацијом Колбрукове једначине у експлицитан облик користећи Ламберт  $W$  функцију (Goudar-Sonnad 2003, 2007, 2008, 2009; Sonnad-Goudar 2004, 2005, 2006, 2007, More 2006; Nandakumar 2007; Clamond 2009). Све досад доступне трансформације имају ману да за веће вредности Рејнолдсовог броја и релативне храпавости, поједини чланови постају толико велики да не могу да стану у регистар рачунара. Користећи основу Колбрукову идеју на основу које је и развијена истоимена једначина 1939. године, као и идеју према којој се користи Ламберт  $W$  функција за трансформисање имплицитно задатих релација у експлицитан облик, у дисертацији се даје трансформисани облик Колбрукове једначине уз помоћ Ламберт  $W$  функције који је примењив за исти опсег Рејнолдсовог броја и релативних храпавости без ограничења у односу на оригиналну једначину (2009c,d,e). Даје се и даља процедура за налажење приближног решења овако трансформисане једначине. Ламберт  $W$  функција поседује одређена својства која могу бити корисна тако да је и трансформисана Колбрукова једначина занимљива за даља истраживања.

Аутор је у потпуности био ослоњен на иностране научне и стручне часописе за које је приступ у електронском облику обезбедило Министарство за науку и технолошки развој Србије, преко КОБСОН-а, тј. Конзорцијума Библиотека Србије за Обједињену Набавку. Аутор је поред постојећих метода, у првом реду оригиналне методе Харди Кроса, као и модификоване методе Харди Кроса, које је детаљно проучио и прилагодио, развио и сопствену методу. Мреже се уобичајено прорачунавају оригиналном методом Харди Кроса која сада има само историјски значај, затим модификованом методом Харди Кроса, методом Лобачева која је у суштини Харди Кророва метода, са тиме да је сличну али нешто сложенију методу развио истовремено развио поменути совјетски аутор. У доба СССР се најчешће користила тзв. метода М.М.Андријашева која је нешто другачија од оригиналне методе Харди Кроса, тј. Лобачева, с тиме да је компликованија али уз добитак у брзини конвергенције који је несразмеран компликованости методе. Популарна је и тзв. метода чворова која има нешто другачији приступ у односу на све остале методе, пошто је само код ње увек задовољен услов по другом Кирхофовом закону, док се први у равнотежава у итеративном поступку. Код свих осталих метода је обрнут случај. Пошто је проблем протока флуида кроз цеви нелинеаран, за разлику од протока електричне струје кроз проводнике, проблем није тако једноставан али извесне паралеле могу да се повуку. Пошто до скоро нису били широко доступни рачунари који су могли да раде са великим матрицама које су потребне за све методе које су брзоконвергентне, покушавало се са успостављањем електричних модела који описују проток флуида кроз цевоводну мрежу. Овај проблем није једноставно решив пошто свака промена протока повлачи са собом и промену хидрауличког отпора. Ови модели су у данашње време потпуно превазиђени. Они су били популарни од педесетих па до почетка седамдесетих година двадесетог века. На ову тему је у то време урађена и једна врло успела докторска дисертација на Грађевинском факултету Универзитета у Београду (1956) која је за то време дала значајан допринос на пољу прорачуна прстенастих мрежа (Лилић 1958).

У дисертацији се дају строга алгебарска правила за сабирање поправних протока добијених било применом оригиналне или модификоване Харди Крос методе. Направљен је и корак даље тиме што је развијена обједињена метода чворова и прстенова при чему се поправка уопште и не добија као резултат, већ се у свакој итерацији добија сам проток чиме је избегнута потреба за било каквим алгебарским правилима. Обједињена метода чворова и прстенова није нешто потпуно ново. Она је у различитим облицима већ позната у литератури, али је овде доста прилагођена, уосталом као и остале приказане методе. Аутор ове дисертације се нада да ће рударским инжењерима бити од користи бројни примери проблема који су решени у дисертацији те да ће одређени методи ући у инжењерску праксу прорачуна гасоводних мрежа.

Последњи део доктората се бави ефикасним искоришћењем гаса у складу са урбанистичким параметрима. Аутор ове дисертације се широко бавио овим проблемом у својој магистарској тези из 2005. године (Бркић 2005d, Бркић 2006). Овде се дају само неке основне поставке и неки нови закључци који су изведени из тог врло опсежног истраживања (Brkić-Tanasković 2008).

## Б. Отпори протоку гаса у цевима

Ако је пад притиска између две тачке у цеви еквивалентан напону у електричном колу, тада је проток флуида еквивалентан електричној струји, а хидраулички отпор еквивалентан електричном отпору. За разлику од електричног отпора који је независан од вредности напона и струје у колу, хидраулички отпор зависи од много параметара као што су вискозитет флуида, брзина протока, пречник цеви, хrapавости унутрашње површине цеви, температура, густина итд. Релације које се примењују за прорачун хидрауличких отпора за различите услове су истражене и приказане у овом делу дисертације. У електричним колима отпор  $R$  протоку струје  $I$  при напону  $U$  је константан и даје се добро познатим омовим законом (1):

$$I = \frac{U}{R} \quad (1)$$

У хидрауличким системима величина аналогна електричном отпору  $R$  је хидраулички отпор  $\lambda$  који даје Дарси; односно Фанинг  $f$ , где је  $\lambda=4 \cdot f$  (Darcy 1857, Fanning 1877). Протоку у цевима  $Q$  одговара струја  $I$  у електричним колима, а разлици притисака  $\Delta p$  (односно разлици квадрата притиска на улазу и излазу из цеви када су у питању гасоводи  $\Delta \tilde{p}^2$ ) одговара напон  $U$ , тј. разлика електричних потенцијала. Међутим, коефицијент који представља хидраулички отпор није константна величина за дату цев, већ поред пречника  $D$  и хrapавости  $\epsilon$  (која је својство саме цеви) зависи и од својстава флуида (вискозности и густине флуида), али и од брзине протока флуида. Поред тога у појединим режимима ефективни утицај хrapавости може да буде умањен из разлога што флуид формира танак слој уз сам унутрашњи зид који у неку руку има, могло би се грубо рећи подмазујућу улогу (тзв. гранични слој; Слика 1). Дакле, релација која описује проток флуида у цевима дата од стране Дарсија и Вајсбаха (Weisbach 1845) даје се у следећем облику (2):

$$p_1 - p_2 = \lambda \cdot \frac{L}{D_u} \cdot \rho \cdot \frac{v^2}{2} \quad (2)$$

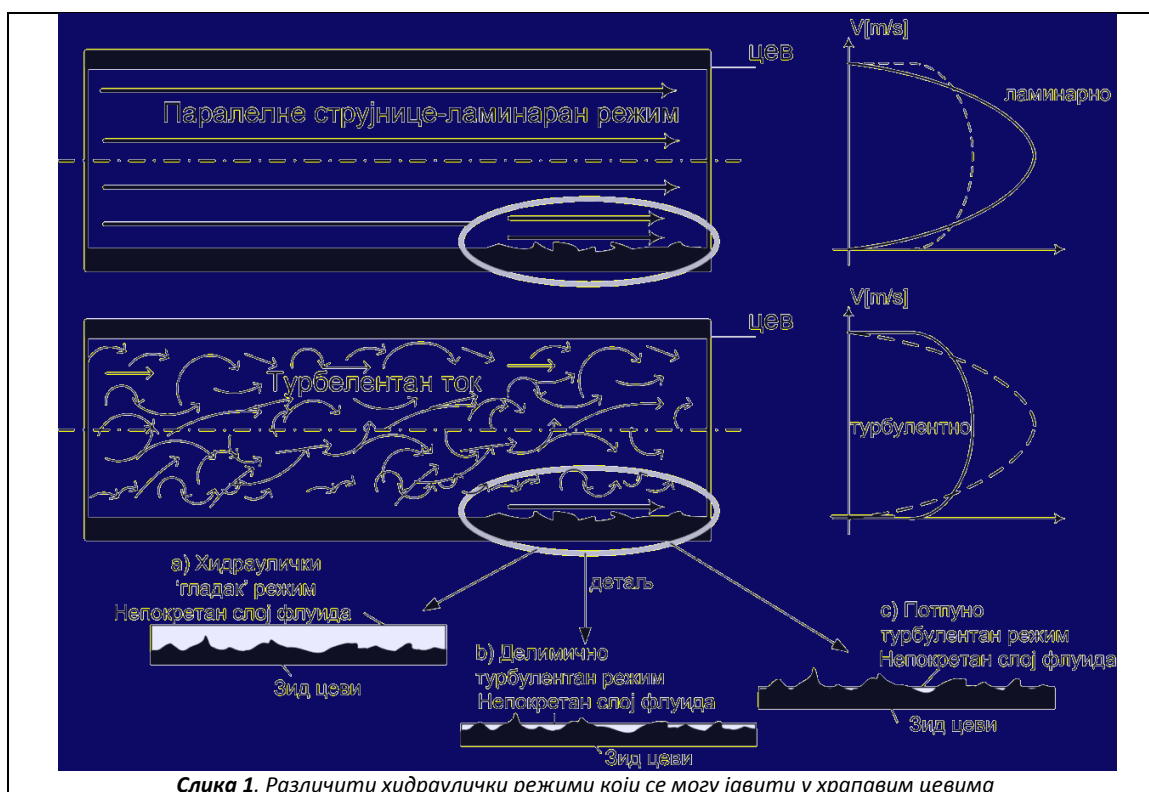
Релација (2) се назива Дарси-Вајсбах једначином, у част Анрија Дарсија, француског инжењера из XIX века, и Јулијуса Вајсбаха, немачког рударског инжењера и научника из истог доба. Вајсбах је први предложио увођење бездимензионог коефицијента отпора  $\lambda$ , док је Дарси извео низ тестова са протоком воде у цевима. Релација (2) се може дати и у нешто погоднијем облику у коме уместо брзине флуида фигурише проток (3):

$$p_1 - p_2 = \lambda \cdot \frac{L}{D_u^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2} \cdot \rho \quad (3)$$

Претходне једначине морају да узму у обзир и поједине законе термодинамике у случају протока гасовитог флуида.

Рејнолдс је као што је опште познато увео критеријум на основу кога се одређује режим протока у цевоводу, где се узима да је испод 2100-2300 режим у цевоводу сигурно ламинаран, а изнад највероватније турбулентан (Reynolds 1883a; 1883b, 1894, 1895). Рејнолдсов број се одређује на основу следеће једначине (4):

$$Re = \frac{v \cdot D_u}{\mu} = \frac{v \cdot D_u \cdot \rho}{\eta} \quad (4)$$



Сам Дарсијев фактор  $\lambda$  се понекад назива и Модијевим фактором. Понегде се назива и Дарси-Вајсбаховим фактором, с тим да је у овој дисертацији усвојено да је сам фактор отпора  $\lambda$ , Дарсијев, а сама једначина у којој исти фигурише (1) и (2), Дарси-Вајсбахова.

Јасно дефинисане границе између одређених хидрауличких режима протока не постоје, али се могу оријентационо дати. Граница између ламинарног режима и нестабилног режима је нагде око вредности Рејнолдсовог броја  $Re=2320$ . Нестабилан хидраулички режим постоји у опсегу од  $Re=2320$  до 4000. Од  $Re=4000$  па до линије одређене једначином (5) егзистира тзв. прелазни турбулентан режим.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{Re}{200} \cdot \frac{\varepsilon}{D} \quad (5)$$

Уколико је релативна храпавост изузетно мала или уопште не постоји у оквиру прелазно турбулентног режима постоји тзв. хидраулички 'гладак' режим. Према Абдолахију и сарадницима (Abdolahi et al 2007) хидраулички 'гладак' режим влада изнад  $Re=4000$  а испод криве одређене једначином (6):

$$\frac{\varepsilon \cdot Re \cdot \sqrt{\lambda}}{D_u} < 16 \quad (6)$$

Прелазни турбулентан режим је одређен према једначини (7):

$$16 < \frac{\varepsilon \cdot Re \cdot \sqrt{\lambda}}{D_u} < 200 \quad (7)$$

И наравно, потпуно турбулентан режим је изнад криве (8) у Модијевом дијаграму (Слика 2, испрекидана линија).

$$\frac{\varepsilon \cdot Re \cdot \sqrt{\lambda}}{D_u} > 200 \quad (8)$$

Треба нагласити да су границе режима у раду Абдолахија и сарадника дате за Фанингов коефицијент хидрауличног отпора  $f$ , док су овде у дисертацији дате за Дарсијев  $\lambda$ . У овој дисертацији биће приказане релације којима се одређује коефицијент хидрауличног отпора по Дарсију, тј.  $\lambda$ . У Америци се више користи коефицијент хидрауличног отпора по Фанингу  $f$  који се разликује по томе што се до њега изворно дошло на другачији начин, али суштинска разлика не постоји, осим да је коефицијент по Дарсију бројчано четири пута већи од Фанинговог. Забуна може настати јер у стручној литератури не постоји опште прихваћено одежавање, нпр. као овде  $\lambda$  када је у питању коефицијент хидрауличног отпора по Дарсију, односно  $f$  по Фанингу, већ поједини аутори произвољно узимају ове ознаке. Поједине струке такође чешће користе Фанингов коефицијент што је у суштини само ствар навике и устаљене инжењерске праксе. Исто тако поједини аутори понегде користе пречник цеви, а понегде полупречник, што може да унесе забуну (Brkić 2009b; Concha 2008; Chen 1979, 1980; Schorle et al 1980; Rao-Kumar 2007), а што је опет последица саме дефиниције Дарсијевог, односно Фанинговог фактора хидрауличног отпора, односно од дефиниције самих једначина по којима се затим рачуна пад притиска; видети Дарси-Вајсбахове једначине (1) и (2) у којима фигурише Дарсијев коефицијент  $\lambda$ . Дарсијев фактор се теоријски дефинише као (9):

$$\lambda = \frac{8 \cdot \tau}{\rho \cdot v^2} \quad (9)$$

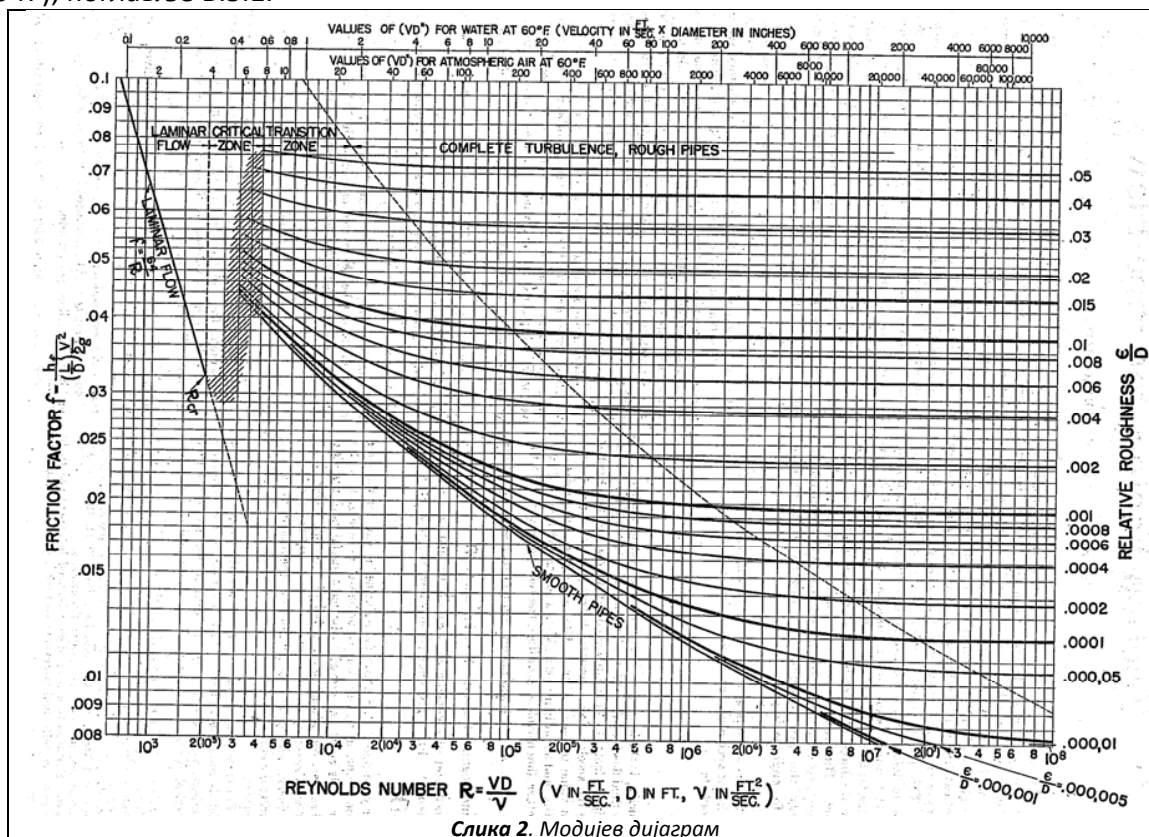
Наравно релација (9) има само теоријски значај пошто напон смицања  $\tau$  није лако одедити а још мање у пракси измерити. Зато се дају бројне релације за различите хидрауличке режиме које ће у даљем тексту бити и објашњене.

Коефицијенти отпора се често дају у облику  $1/\sqrt{\lambda}$ , односно  $1/\sqrt{f}$ , који представљају тзв. пропусност цевовода ( $1/\sqrt{\lambda} = 0,5 \cdot 1/\sqrt{f}$ ). Неке од релација су дате у имплицитном облику, што је некад представљало проблем, али данас су такви проблеми превазиђени и такве релације могу бити решене користећи најпростије софтверске алате који су данас широко доступни, као нпр. *Microsoft Excel 2007 (Enterprise edition)* о чему ће у даљем тексту бити више речи (Brkić 2009a); поглавље Б.7.



Никурадсе је још током 1932. и 1933. године извршио систематска испитивања протока флуида кроз цеви. Он је цеви обрађивао песком са унутрашње стране да би испитао утицаје различитих величина релативних храпавости ( $\epsilon/D_u$ ) на величину коефицијента хидрауличног отпора (Nikuradse 1932; 1933). У овој дисертацији су зависности на дијаграмима најчешће дате у облику у којем је и Никурадсе изворно средио своје податке; тј.  $\log(100 \cdot \lambda) = f(\log Re)$ , односно у нешто мало измењеном облику, тј.  $\log(1000 \cdot \lambda) = f(\log Re)$  како би се избегло да на ординати буду вредности мање од јединице. Рад Никурадсеа се директно наставља на рад Блазиуса 1913. године у коме су обрађивани отпори при протоку флуида кроз глатке и храпаве цеви (Blasius 1913). Прандтл (Prandtl 1935) је увео у употребу горе поменути пропусност цевовода  $1/\sqrt{\lambda}$ , коју је обично стављао у функцију  $Re \cdot \sqrt{\lambda}$ , а не самог Рејнолдсовог броја  $Re$ .

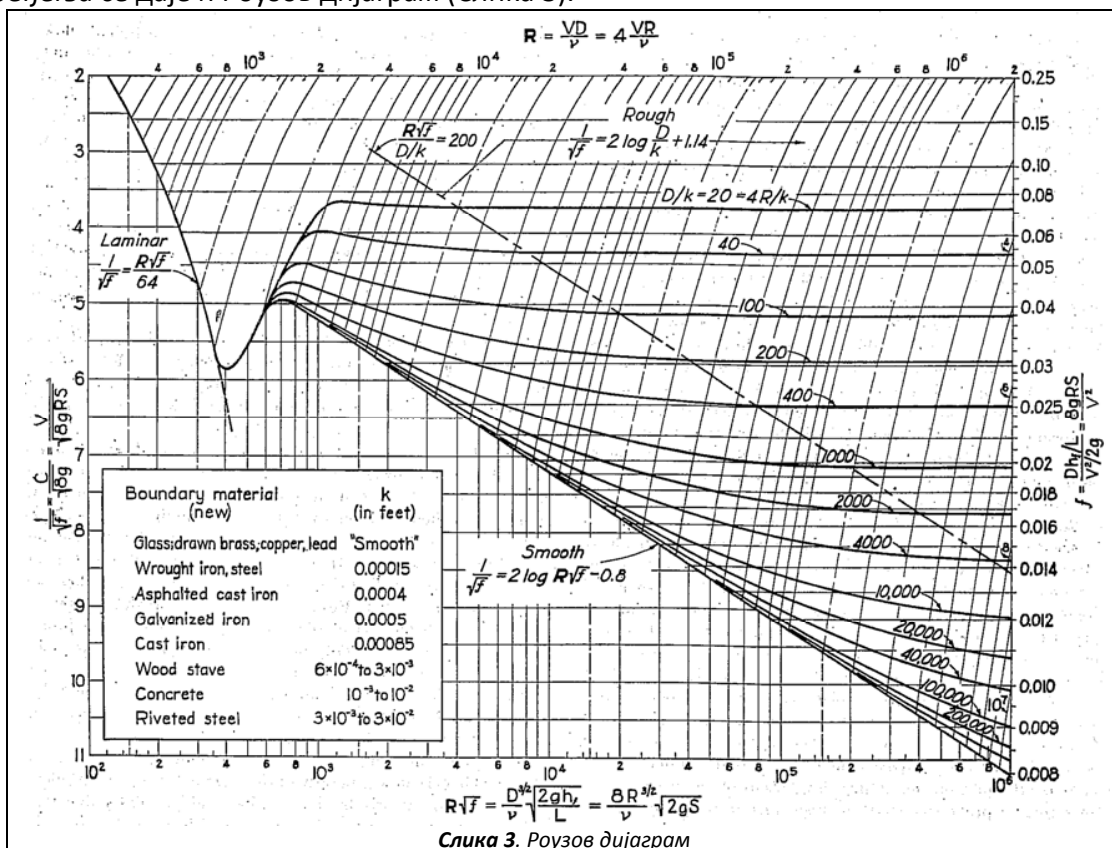
За потребе графичког одређивања коефицијента хидрауличног отпора струјању флуида у цевоводима најприхватљивији је Модиев дијаграм приказан на слици 2 (Moody 1944). Због раширености овог дијаграма често се Дарсијев коефицијент назива и Модиевим коефицијентом. Модие је поред дијаграма касније предложио и формулу по којој се израчунава хидраулички коефицијент отпора о чему ће касније бити више речи (Moody 1947); поглавље Б.5.1.



Слика 2. Модиев дијаграм

Дијаграм хидрауличких отпора (Слика 2 и 3) је нацртао прво Роуз 1942. године и презентовао на другој конференцији хидрауличара у Ајови, али са координатним осама израженим преко Прандтлових параметара;  $1/\sqrt{\lambda} = f(Re \cdot \sqrt{\lambda})$  и са помоћном скалом

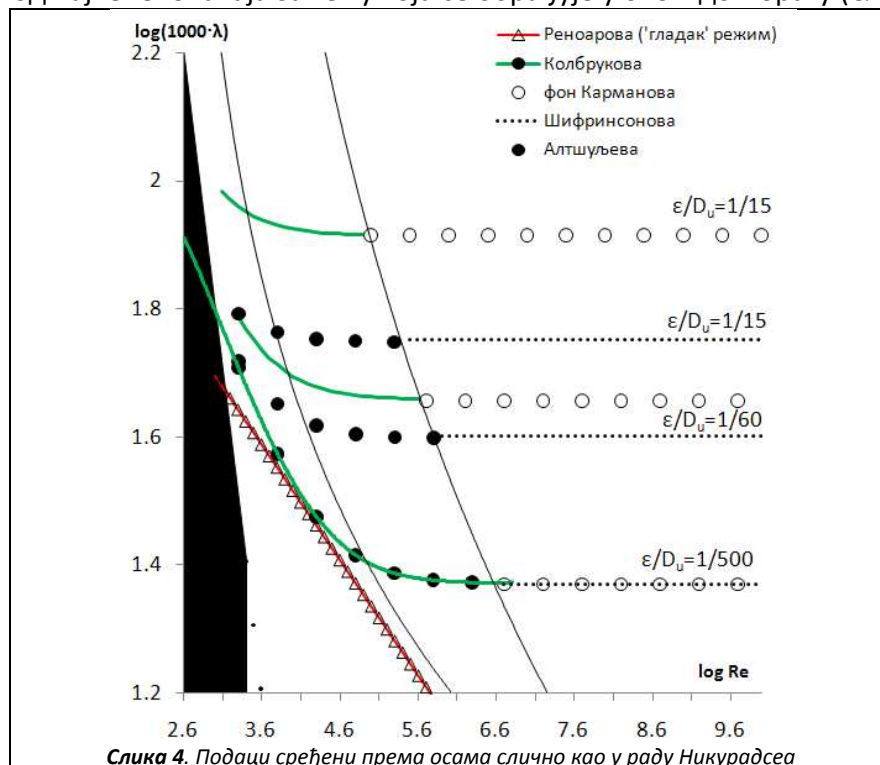
$\lambda=f(Re)$ , а све на основу добро познате једначине коју је Колбрук објавио 1937. године у сарадњи са Вајтом и релације коју је касније самостално модификовао 1939. године (Rouse 1943; 1976, Colebrook-White 1937, Colebrook 1939). Касније је Моди, професор хидраулике са Универзитета Принстон детаљно преуредио поменути дијаграм у облик као што је приказан на слици 2 (Moody 1944). Дијаграм са слике 2 може послужити за грубо читавање коефицијената хидрауличких отпора. На њему се разликују пет области: ламинарна област, прелазна или нестабилна област, област протока у хидраулички 'глатким' цевима, делимично турбулентна област и потпуно турбулентна област. Ради поређења се даје и Роузов дијаграм (Слика 3).



Поређећи Модијев и Роузов дијаграм може се закључити да постоји велика сличност. На Роузовом дијаграму постоје помоћне осе које одговарају осама на Модијевом дијаграму. Уобичајен назив за овакве типове дијаграма у данашње време је Модијев дијаграм, док се само у неким деловима Аустралије користи израз Роузов дијаграм (Rouse 1987). Хронолошки гледано, резултате у облику поменутих дијаграма је први средио Роуз и представио на конференцији хидрауличара у Ајови на којој је учествовао и Моди који је био у публици док је Роуз презентовао свој рад. После излагања Моди се обратио Роузу са сугестијом да преуреди дијаграм тако да главне и једине осе буду у облику  $\lambda=f(Re)$  како би дијаграм заживео у широкој инжењерској пракси. Међутим, Роуз који је био присталица Прандтлове нотације је то сматрао коракором уназад и није прихватио сугестију да то и учини. Нешто касније је Моди самостално објавио дијаграм са измењеним осама и објавио рад у престижном часопису Удружења машинских инжењера Америке;

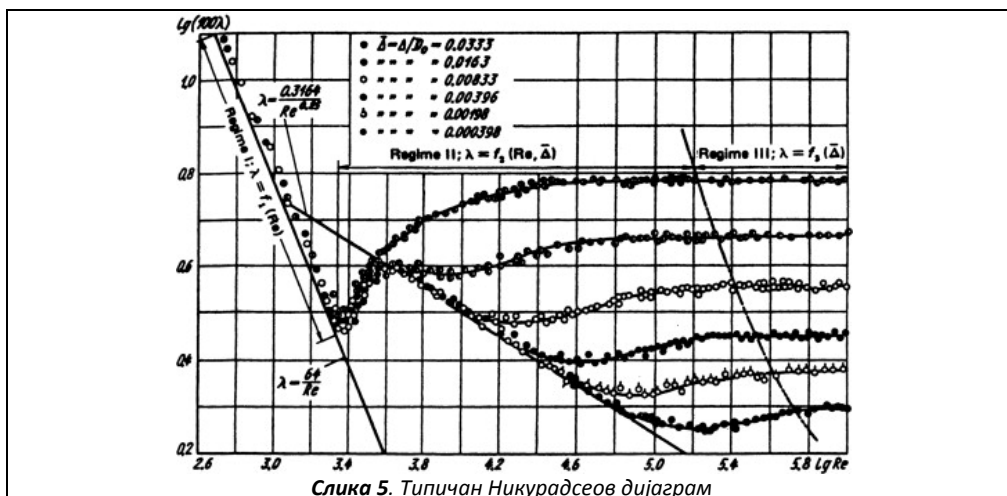
Transactions of ASME (Moody 1944). Да ли зато што је часопис престижног удружења био доступнији инжењерској јавности од конференцијског саопштења или из других разлога, главно овакав тип дијаграма се уобичајено данас назива Модијевим дијаграмом како у свету, тако и у Србији. Истина, уз Модијев рад су приложени и коментари, а међу њима се налази и коментар Роуза који је приложио свој дијаграм тако да су се оба дијаграма наша у истом броју часописа (Модијев дијаграм на страни 672, а Роузов на страни 681) и оба су стога била подједнако доступна јавности (Moody 1944). Треба нагласити да Моди наглашава да је највећи допринос без кога не би ни било ових дијаграма дао Колбрук, који нажалост није могао да приложи свој коментар Модијевог рада јер је био те 1944. у рату као мајор британске војске (Moody 1944).

Трећи начин представљања података је дао Никурадсе (Nikuradse 1932; 1933). Овај начин је погодан због тога што су релације Блазијусовог типа валидне за хидраулички 'гладак' режим праве линије у овако одабраном координатном систему. Хидраулички 'гладак' режим се и најчешће јавља при протоку гаса кроз полиетиленске цевае што је и најчешћи случај и што је и од највећег значаја за тему која се обрађује у овом докторату (Слика 4).



Слика 4. Подаци сређени према осамом слично као у раду Никурадсе

Дијаграми који су сређени по Никурадсеовој идеји се не дају у циљу графичког читавања података, већ за представљање односа између појединих релација по којима се израчунава Дарсијев коефицијент хидрауличног отпора  $\lambda$ . У дисертацији ће овај облик и бити коришћен како је већ речено, али са нешто измењеном ординатом која је у облику  $\log(1000 \cdot \lambda)$  из разлога на бројне вредности за  $\lambda$  буду  $>1$ , док би применом оригиналне Никурадсеове нотације  $\log(1000 \cdot \lambda)$  биле  $0 < \lambda < 1$ . Апсциса се даје у облику  $\log(Re)$ . Типичан Никурадсеов дијаграм се даје на слици 5 (Nikuradse 1932; 1933).



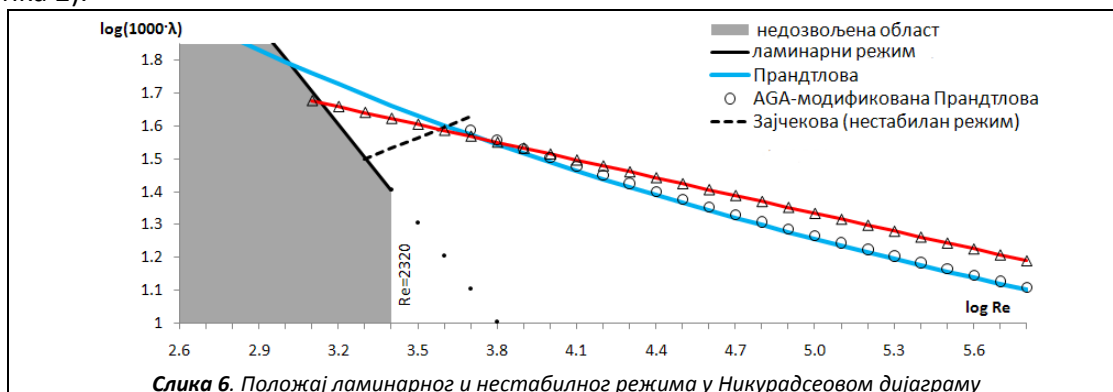
Слика 5. Типичан Никурадсеов дијаграм

### Б.1. Ламинарни режим

Ламинарни режим протока се јавља до вредности Рејнолдсовог броја око 2100 (или 2320). Изнад ове вредности може постојати ламинаран режим али је у том случају врло нестабилан, тако да и најмањи поремећај доводи до појаве турбуленције. Ламинарни режим одликују паралелне струјнице које чине ток флуида (Слика 1). У ламинарном режиму хидраулички коефицијент се рачуна по једначини Хаген-Поасејла (10):

$$\lambda_L = \frac{64}{Re} \quad (10)$$

Треба имати на уму да се до претходне једначине у ствари дошло извођењем из једначине Хагена и Поазејла (Hagen 1839, Poiseuille 1841), док се за саму једначину (10) не може тачно историјски утврдити ко ју је први увео у употребу. Пошто ламинарни режим није чест у гасоводним мрежама на овоме проблему се неће дуже задржавати у овој дисертацији. Неки аутори (<http://gidravli.narod.ru/gidrosopr.html>) уместо коефицијента 64 дају вредност 75 у једначини (10). Једначина (10) је представљена правом линијом у Никурадсеовом прилагођеном координатном систему  $\log(1000 \cdot \lambda) = f(\log Re)$  јер је  $\log(1000 \cdot \lambda) = \log 64000 - \log Re$  (Слика 6). Једначина (10) је такође права линија и у Модијевом (Слика 2).



Слика 6. Положај ламинарног и нестабилног режима у Никурадсеовом дијаграму

После ламинарног режима се са повећањем Рејнолдсовог броја, а пре турбулентног режима јавља уска нестабилна прелазна област; шрафирана област у Модријевом дијаграму (Слика 2). Ову област треба избегавати у техничким системима, те су и релације које је описују ретке (Обровић-Шашић 1996, Шашић 1990). Зајчек даје релацију (11):

$$\lambda_n = 0.0025 \cdot \sqrt[3]{Re} \quad (11)$$

Ламинарни и нестабилни режим су графички представљени на слици 6.

## Б.2. Хидраулички 'гладак' режим

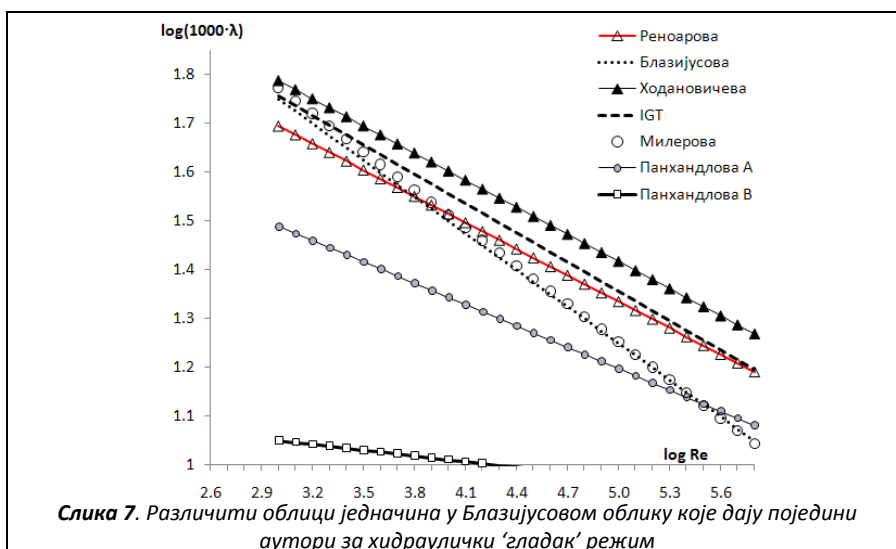
После нестабилног прелазног режима настаје делимично турбулентан режим у коме коефицијент хидрауличног отпора зависи како од вредности Рејнолдсовог броја, тако и од величине релативне храпавости;  $\lambda_{td}=f(Re; \epsilon/D_u)$ . Посебан случај овог режима је проток у хидраулички глатким цевима, где је у одсуству храпавости коефицијент хидрауличног отпора само у функцији Рејнолдсовог броја;  $\lambda_g=f(Re)$ . Овај режим у данашње време добија све више на значају пошто су полиетиленске (ПВЦ) цеви које се и највише користе за изградњу дистрибутивних гасовода у градовима практично глатке. Сукхарев са сарадницима даје вредности апсолутне храпавости код полиетиленских цеви у износу од  $\epsilon=0,002 \cdot 10^{-2}$  m, док за челичне цеви даје у износу од  $\epsilon=0,01 \cdot 10^{-2}$  m (Sukharev et al 2005). При турбулентном протоку у глатким цевима, хидраулички губици зависе само од Рејнолдсовог броја  $\lambda_g=f(Re)$ . Ово је област тзв. парцијалног или делимично турбулентног режима за глатке цеви где су фактори отпора дати у тзв. Блазијусовом облику (12) праве линије у прилагођеном координатном систему  $\log(1000 \cdot \lambda)=f(\log Re)$ ; (Слика 7).

$$\lambda_g = A \cdot Re^{-B} \quad (12)$$

Бројни аутори препоручују Блазијусов облик једначине (12) за одређивање Дарсијевог хидрауличног отпора посебно у случају протока гаса кроз пластичне цеви (von Bernuth 1990).

Према линијама на слици 7, које представљају релације које се примењују за делимично турбулентан режим за 'глатке' цеви (хидраулички 'гладак' режим) може се закључити да се најмањи падови притисака добијају применом Панхандле Б, а највећи падови применом Ходановичеве једначине под условом да су сви остали параметри исти (Табела 1). Панхандле Б релација (позната још и као модификована Панхандлова једначина) се користи за цевоводе великог пречника, те је и логично да је вредност коефицијента хидрауличног отпора нешто мања јер је сразмерно мања количина флуида у контакту са зидом цеви. Уколико постоје стварна мерења потребно је одабрати ону једначину која је у најбољој корелацији са датом ситуацијом, и затим такву једначину применити касније у сличним условима.



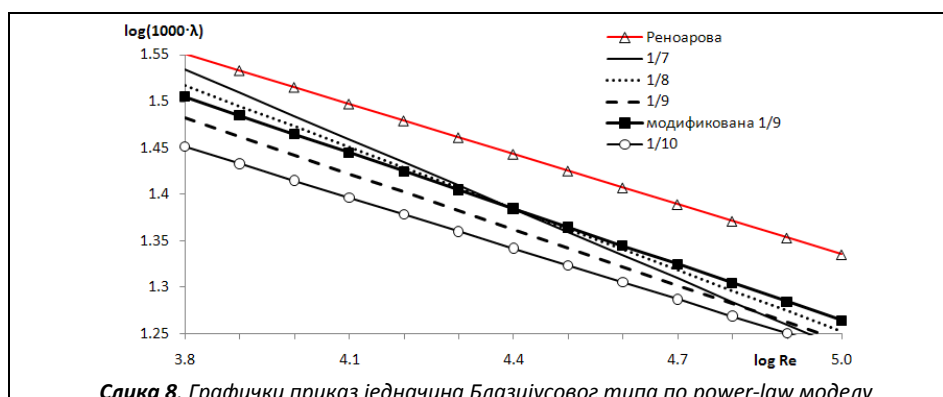


Слика 7. Различити облици једначина у Блазијусовом облику које дају поједини аутори за хидраулички 'гладак' режим

Експонент В и једначини (12) може се одредити на основу тзв. power-law модела (Табела 1). Може се приметити да је нпр. по 1/10 power-law моделу устројена Реноарова једначина (Renouard 1952), по 1/9 power-law моделу IGT једначина, 1/7 power-law моделу Блазијусова једначина (Abdolahi et al 2007). Једначине које су устројене по истом power-law моделу представљају међусобно паралелне праве у прилагођеном Никурадсеовом координатном систему какав је приказан на слици 8.

Табела 1. Једначине за прорачун Дарсијевог коефицијента отпора у области хидраулички 'глатког' режима на основу једначина Блазијусовог типа (12)

Једначина $\lambda_g = A \cdot Re^{-B}$	Коефицијент А	Експонент В
Реноарова	0,172	0,18
Милерова	0,3564	0,26
Блазијусова	0,3164	0,25
Панхандлова А	0,08475	0,1461
Панхандлова В (модификована Панхандлова)	0,00147	0,03932
IGT (Institute of Gas Technology)	0,18086	0,19726
Товлерова и Поупова	0,09458	0,15174
Мокхатабова	0,02	0,185
Ходановичева	0,22	0,185



Слика 8. Графички приказ једначина Блазијусовог типа по power-law моделу

Неке од једначина које се дају на основу Блазијусовог модела (12) и на основу нумеричких вредности датих у табели 1 су познате у нешто другачијем облику, и то; Блазијусова (13):

$$\lambda_g = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}} = 0,3164 \cdot Re^{-0,25} \quad (13)$$

Панхандлова А (14):

$$\lambda_g = \frac{4}{(6,87 \cdot Re^{0,07305})^2} = 0,08475 \cdot Re^{-0,1461} \quad (14)$$

Панхандлова В; модификована Панхандлова или нова Панхандлова (15):

$$\lambda_g = \frac{4}{(16,49 \cdot Re^{0,01961})^2} = 0,00147 \cdot Re^{-0,03932} \quad (15)$$

IGT (Institute of Gas Technology) (16):

$$\lambda_g = \frac{4}{(4,619 \cdot Re^{0,1})^2} = 0,1874 \cdot Re^{-0,2} \quad (16)$$

Прандтлова једначина (17) је једна од значајних формула које важе за режим хидраулички 'глатког' протока. На основу ње су развијене бројне друге једначине и она уз једначине Блазијусовог типа спада међу најзначајније једначине у хидраулици. Позната је и као НПК; Никурадсе-Прандтл-Карман једначина за хидраулички 'гладак' режим (Goudar-Sonnad 2003).

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = 2 \cdot \log(Re \cdot \sqrt{\lambda_g}) - 0,8 \quad (17)$$

Прандтлову једначину (17) је у својој нотацији дао Колбрук (18), тако да је овај облик познат и као Колбруков израз Прандтлове једначине:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = -2 \cdot \log\left(\frac{2,51}{Re} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_g}}\right) \quad (18)$$

Прандтлова једначина је добијена на основу експерименталних података које је спровео Никурадсе. Никурадсе је током 1932. и 1933. године спровео низ експеримената са протоком флуида кроз цеви различите храпавости. Наиме он је обрађивао цеви песком различитих гранулација чиме је добио цеви различите храпавости, од скоро глатких до врло храпавих. У литератури са енглеског говорног подручја за равномерно храпаве цеви попут оних из Никурадсеовог експеримента се користи израз 'uniform sand roughness'. Храпавост која настане после дугогодишње употребе у пракси обично одговара некој од цеви из Никурадсеовог експеримента тако да се за такву храпавост употребљава израз 'equivalent sand roughness'.

Када је реч о Прандтловој једначини, односно о свим једначинама које припадају тзв. Прадтловом моделу једначина треба напоменути да оне на имплицитан начин дају зависност Дарсијевог хидрауличког фактора отпора  $\lambda_g$  пошто се исти појављује и са леве и

са десне стране знака једнакости. Овај проблем се може у данашње време врло лако разрешити коришћењем рачунара и стандардних програмских пакета као што је нпр. *MS Excel 2007 (Enterprise edition)*. Начин решавања оваквих једначина ће бити нешто детаљније продискутован у даљем тексту (Brkić 2009a); поглавље Б.7.

Када се говори о Прандтловој једначини често се помиње и модификована Прандтлова једначина (19). Наиме оригиналну Прандтлову једначину (14) је својевремено модификовао Амерички институт за гас - AGA (American Gas Institute):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = 2 \cdot \log(\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda_g}) - 0.9 \quad (19)$$

Једначина Америчког института за гас (AGA) се даје у више облика (20). За овај облик Прандтлове једначине коју је модификовао Амерички институт за гас (20), често се користи и израз, Колбруков облик или Колбрук-Вајтова интерпретација AGA релације. Треба напоменути да је модификација Америчког института за гас развијена за гасовите флуида на основу радова Колбрука и Вајта и у складу са њиховом основном идејом.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = -2 \cdot \log\left(\frac{2,825}{\text{Re}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_g}}\right) \quad (20)$$

На Универзитету Принстон постоји позната лабораторија са врло моћним експерименталним постојењем (Zagarola-Smiths 1998, McKeon et al 2004a, b, 2005). На основу лабораторијских мерења више пута је модификована изворна Прандтлова једначина; Загарола (21):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = 1,884 \cdot \log(\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda_g}) - 0,331 \quad (21)$$

Мек Кеон и остали (McKeon et al 2004b) (22):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = 1,930 \cdot \log(\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda_g}) - 0,537 \quad (22)$$

Фарсхад и остали (Farshad et al 2001) (23):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = 1,889 \cdot \log(\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda_g}) - 0,3577 \quad (23)$$

За хидраулички 'гладак' режим су дате бројне једначине које не припадају ниједном специфичном типу или делимично припадају;

Женероова (24):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = 1,6 \cdot \log \frac{\text{Re} \sqrt{\lambda_g}}{2} + 0,6 \quad (24)$$



Лисова (25) (Corfield et al 1974):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = \sqrt{\frac{0,25 \cdot Re^{0,35}}{0,0018 \cdot Re^{0,35} + 0,153}} \Rightarrow \lambda_g = 0,0072 + 0,612 \cdot Re^{-0,35} \quad (25)$$

Никурадсеова (26):

$$\lambda_g = 0,0032 + \frac{0,221}{Re^{0,237}} \quad (26)$$

Херманова (27):

$$\lambda_g = 0,0054 + \frac{0,936}{Re^{0,3}} \quad (27)$$

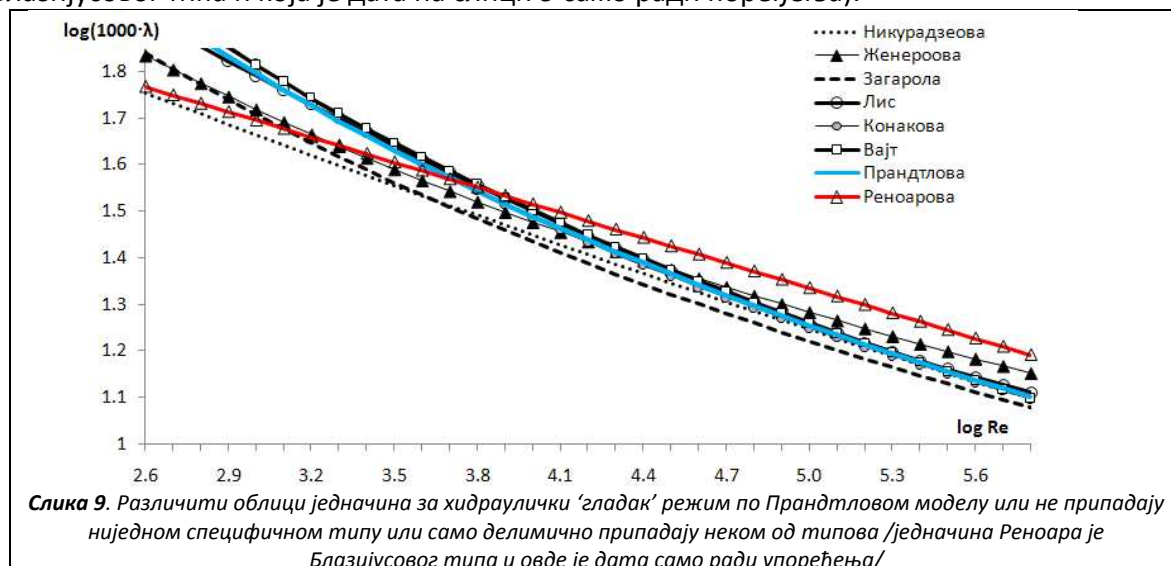
Вајтова (28):

$$\lambda_g = \frac{1,02}{(\log Re)^{2,5}} \quad (28)$$

Конакова (Nekrasov 1969) (29):

$$\lambda_g = \frac{1}{(1,81 \cdot \log(Re) - 1,5)^2} \quad (29)$$

Неке од претходних једначина се графички приказују на слици 9. За разлику од једначина Блазијусовог типа, једначине које су представљене на слици 9 не дају праве линије у Никурадсеовом прилагођеном координатном систему (осим једначине Реноара која је Блазијусовог типа и која је дата на слици 9 само ради поређења).



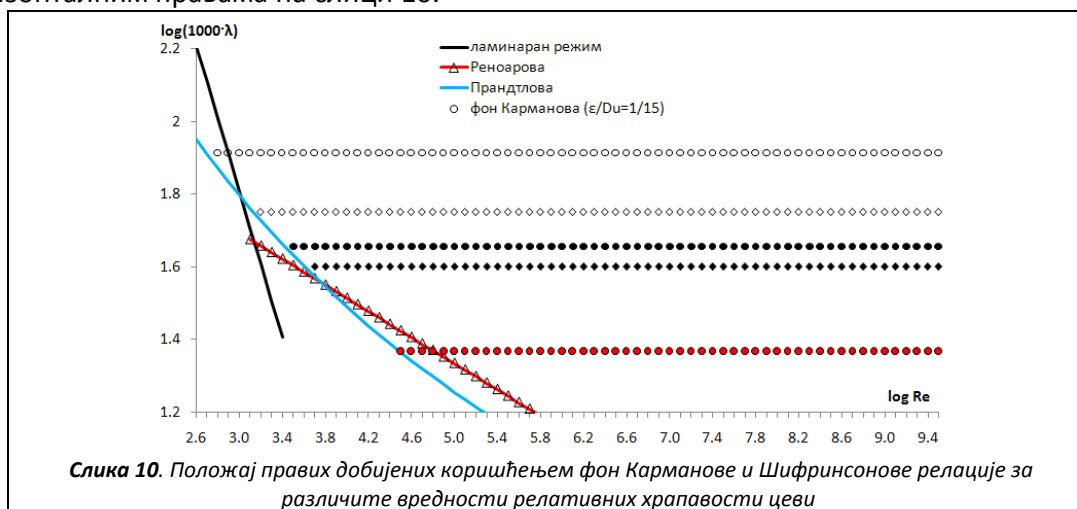
У Србији преовладава став у стручним круговима да су полиетиленске цеви мање склоне корозији или да чак уопште и нису корозивне. Шведска студија коју је урадио Нилсон са сарадницима извештава напротив о великој корозивности која је се јављала осамдесетих година у пластичним цевима које су коришћене за топловодне системе (Nilsson et al 2008). Данас се сматра да је ова повећана корозивност била последица недостатка 'оxygen diffusion barrier', како се на енглеском у оригиналном тексту наводи. Исти извор наводи да

се у Данској пластичне цеви за топоводе доста користе и да су се добро показале. Међутим, и за ове нове врсте пластичних цеви, Нилсон са сарадницима наводи да су по корозивности скоро једнаке челичним, чиме се несумњиво даје предност челичним цевима када је реч о корозивности бар што се тиче наведене студије. Није познато да ли су се у Србији вршила слична истраживања када су у питању гасоводи. Обично се наводи без упуштања у детаље да полиетиленске цеви нису уопште корозивне, а посебно не ако се пореде са челичним. У случају Србије истраживања би могла да се ураде само за гасоводе, пошто се пластичне цеви у топоводним системима у Србији готово и не користе. Ипак, као посебан проблем се јавља како ова корозивност утиче на храпавост цеви. Исти се проблем се може дискутовати када је у питању абразивност.

### Б.3. Потпуно турбулентан режим

Пажљиви читалац би логички могао да постави питање зашто се после поглавља у којем је излагана материја везана за хидраулички 'гладак' режим прелази на дискусију везану за потпуно турбулентан режим који се тиче протока у храпавим цевима чиме се прескаче разматрање делимично турбулентног режима који се по логици ствари налази између два претходно поменута режима. Одговор лежи у томе да је делимично турбулентан режим својеврсна комбинација хидраулички 'глатког' режима и потпуно турбулентног режима, те се делимично турбулентан режим не може ваљано објаснити без претходно изнетих појединости везаних за потпуно турбулентно струјање у храпавим цевима.

При високим вредностима Рејнолдсовог броја, односно боље речено под условима дефинисаним једначином (8), отпор више не зависи од самог Рејнолдсовог броја  $Re$  већ је само у функцији релативне храпавости  $(\epsilon/D_u)$ , тј. отпор постаје константан за задату релативну храпавост без обзира на промену Рејнолдсовог броја. Овај случај одговара хоризонталним правима на слици 10.



Слика 10. Положај правих добијених коришћењем фон Карманове и Шифринсонове релације за различите вредности релативних храпавости цеви

За ову област потпуне турбуленције у западној литератури се највише користи фон Карманов образац (von Kármán 1930), односно НПК образац; Никурадсе-Прандтл-Карман (30):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_t}} = 1,14 - 2 \cdot \log\left(\frac{\varepsilon}{D_u}\right) \quad (30)$$

Овај образац је преуредио Колбрук, тако да је позната његова верзија и у тзв. Колбруковом облику (31):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_t}} = 2 \cdot \log\left(\frac{3,7 \cdot D_u}{\varepsilon}\right) \quad (31)$$

Основни облик фон Кармановог, тј. НПК обрасца се даје и у облику када се уместо пречника користи полупречник (Moody 1944, Chen 1980, Schorle et al 1980, Brkić 2009b, Schlichting 1979)(32):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_t}} = 1,74 - 2 \cdot \log\left(\frac{2 \cdot \varepsilon}{D_u}\right) = 1,14 - 2 \cdot \log\left(\frac{\varepsilon}{R}\right) \quad (32)$$

Фон Карманов образац (26) је верификован на основу Никурадсеових експеримената, и у неким изворима се још назива и НПК обрасцем (Никурадсе-Прандтл-Карман).

У руској литератури се за област потпуне турбуленције користи израз по Шифринсону (33):

$$\lambda_t = 0,111 \left(\frac{\varepsilon}{D_u}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (33)$$

Шифринсонов образац даје скоро идентичне резултате као и фон Карманов образац у условима ниских вредности релативних храпавости у цевима (Nekrasov 1969). За високе вредности релативних храпавости фон Карманов образац је рестриктивнији, тј. његовом употребом се добијају нешто веће вредности Дарсијевог коефицијента хидрауличког отпора у поређењу са Шифринсоновим обрасцем, а за исте вредности релативне храпавости.

#### **Б.4. Делимично турбулентан режим**

Повећањем вредности Рејнолдсовог броја при протоку гаса кроз храпаве цеви утицај храпавости почиње све више да се испољава. При турбулентном режиму протока у храпавим цевима при нижим вредностима Рејнолдсовог броја, хидраулички губици зависе како од Рејнолдсовог броја  $Re$  тако и од утицаја релативне храпавости  $\varepsilon/D_u$ ; тј.  $\lambda_{dt}=f(Re, \varepsilon/D_u)$ . Физичко постојање овога ефекта се може објаснити постојањем танког слоја флуида уз сам зид цеви који се креће ламинарно или се уопште не креће док се главни фронт течности у средини цеви креће турбулентно (Слика 1). Отуда и назив за овај режим делимично или парцијално турбулентан режим струјања у храпавим цевима. Повећањем вредности Рејнолдсовог броја, овај танак слој ламинарног струјања постепено нестаје, тако да се развија потпуно турбулентан проток за цео профил флуида који тече.

Образац Алтшуља (34) из руске, и Колбрука (односно Колбрука и Вајта) из западне литературе (35) описују проток у овој области тзв. делимично или парцијално турбулентног режима (Nekrasov 1969).

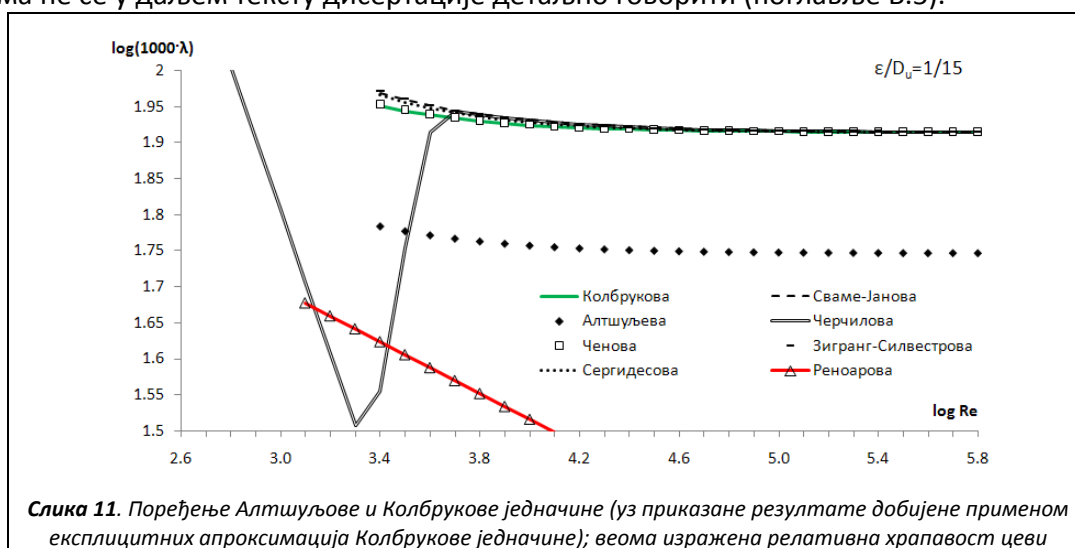
$$\lambda_{dt} = 0,1 \cdot \left( \frac{1,46 \cdot \varepsilon}{D_u} + \frac{100}{Re} \right)^{\frac{1}{4}} = 0,11 \cdot \left( \frac{\varepsilon}{D_u} + \frac{68}{Re} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (34)$$

Коришћење Алтшуљове једначине (34) не само да је била устаљена пракса у Русији за време СССР-а, него је то била и законска обавеза. Сукхарев са сарадницима извештава да употреба Алтшуљове једначине више није обавезујућа по најновијим руским нормама, али да се исто тако не уводи обавезна употреба било које друге једначине, те се самим тим и даље најчешће по устаљеној пракси користи Алтшуљова једначина (Sukharev et al 2005). Образац Алтшуља (34) показује добру корелацију са Колбруковом (35) само при мањим вредностима релативних храпавости у цевима (упоредити слике 11-13).

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = -2 \cdot \log \left( \frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda_{dt}}} + \frac{\varepsilon}{3,71 \cdot D_u} \right) \quad (35)$$

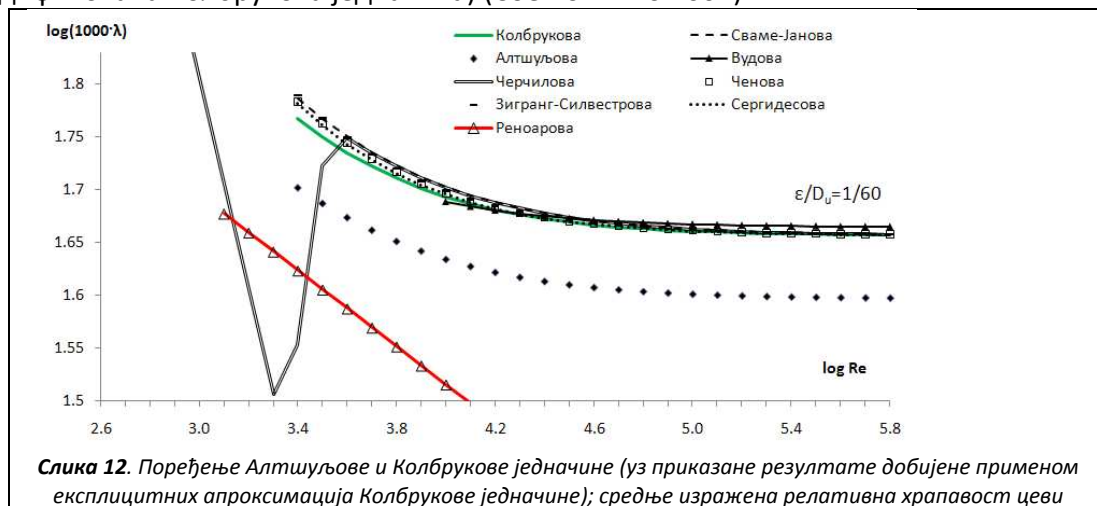
У пракси западних земаља за област делимично турбулентног режима протока се највише користи образац Колбрука (35). У литератури се као синоним често употребљава и појам образац Колбрука и Вајта. Наиме Колбрук и Вајт су 1937. године објавили пионирски рад на основу кога је конституисана поменута једначина, док је сам Колбрук 1939. даље разрадио исту материју у свом самосталном раду (Colebrook-White 1937, Colebrook 1939).

На сликама 11-13 се поред графичког приказа вредности добијених Колбруковом и Алтшуљовом једначином дају и неке апроксимативне релације Колбрукове једначине о којима ће се у даљем тексту дисертације детаљно говорити (поглавље Б.5).

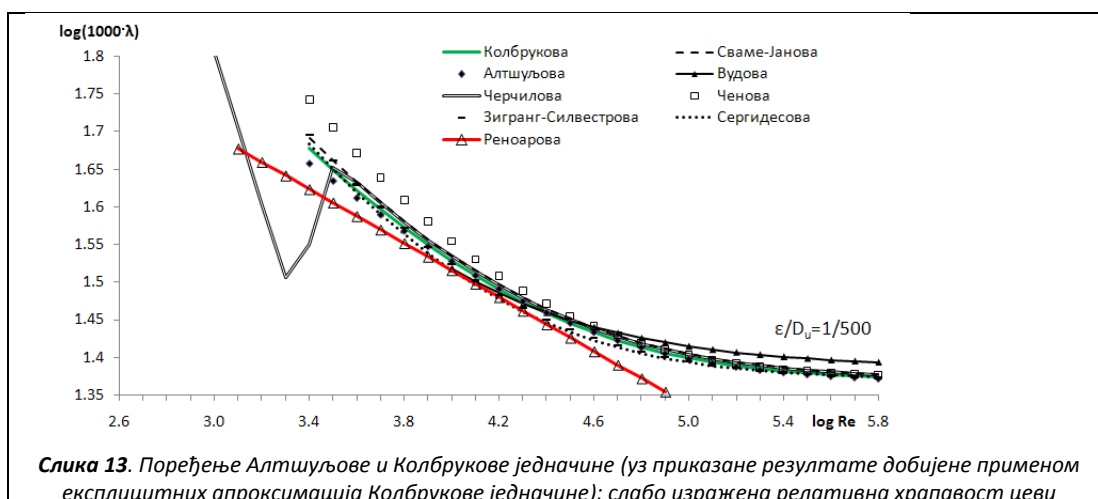


Може се приметити да је образац Алтшуља (34) дат у експлицитном облику, док је Колбруков образац (35) дат у имплицитном облику јер се члан  $\lambda_{dt}$  појављује и са леве и са десне стране знака једнакости. Исти је случај и код Прандтлове релације (17) као и код Колбрукове интерпретације Прандтлове релације (18) које се користи за прорачун

Дарсијевог фактора хидрауличког отпора у хидраулички 'глатком' режиму, о чему је већ било речи. Ова имплицитност Колбрукове једначине са гледишта траженог Дарсијевог фактора хидрауличког отпора је и довела до тога да се у литератури појаве бројне апроксимације Колбрукове једначине које су наравно у експлицитном облику. Пре разматрања ових апроксимација, размотриће се сама суштина Колбрукове једначине. У Колбруковој интерпретацији Прандтлове једначине (18) коефицијент 2,51 се у појединим случајевима замењује коефицијентом 2,825 као што је предходно био случај и код АГА једначине (20). Исто се примењује и код Колбрукове једначине (35). Заменом коефицијента 2,51 коефицијентом 2,825 постиже се боља корелација експерименталних података са рачунским подацима при већим вредностима Рејнолдсовог броја (модификована Колбрукова једначина) (Coelho-Pinho 2007).



Слика 12. Поредице Алтшуљове и Колбрукове једначине (уз приказане резултате добијене применом експлицитних апроксимација Колбрукове једначине); средње изражена релативна храпавост цеви



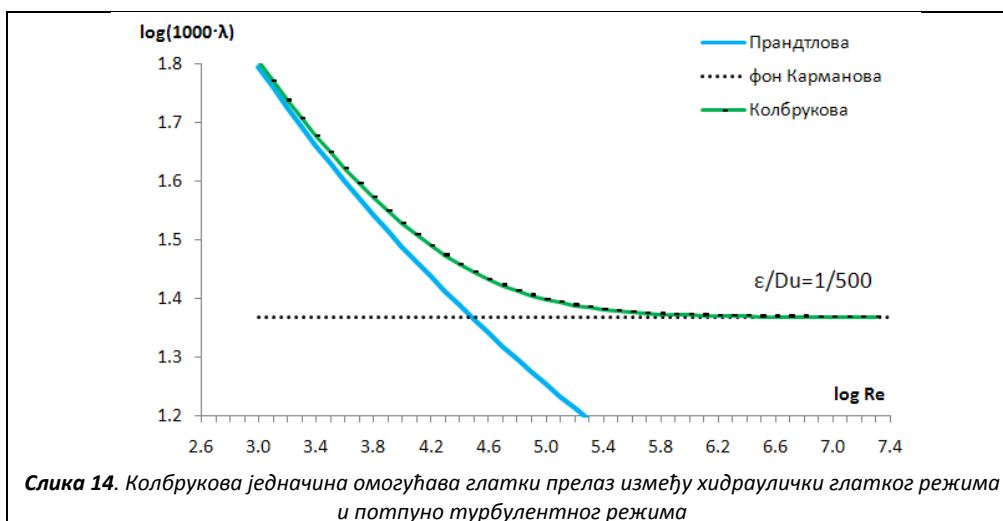
Слика 13. Поредице Алтшуљове и Колбрукове једначине (уз приказане резултате добијене применом експлицитних апроксимација Колбрукове једначине); слабо изражена релативна храпавост цеви

За случај делимично турбулентног режима, у делу дијаграма где се грана линија која представља коефицијент хидрауличког отпора за глатке цеви и затим дели на више линија које одговарају различитим релативним храпавостима, Колбрук је предложио сажимање Прандтлове једначине (17-20) за хидраулички 'гладак' режим протока и фон Карманове (30-32) за потпуно турбулентан режим протока у храпавим цевима. Треба приметити да је

и Алтшуљова једначина (34) истог облика и да је и она састављена из два дела на основу сличне идеје.

Колбруковом једначином (35) се омогућава успостављање глатког прелаза између хидраулички 'глатког' режима и потпуног турбулентног режима (Слика 14). Као што је претходно објашњено Колбрукова једначина се састоји из два дела, и то део А који је сличан Прандтловој једначини за хидраулички 'гладак' режим и део В који је сличан фон Кармановој, тј. НПК релацији за потпуно турбулентан режим (36):

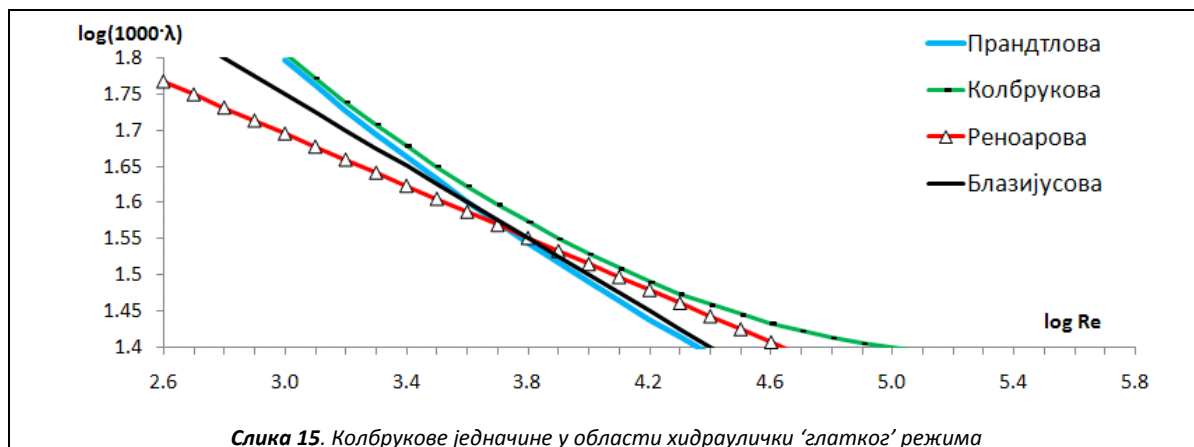
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = -2 \cdot \log \left( \frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda_{dt}}} + \frac{\varepsilon}{3.71 \cdot D_u} \right) = -2 \cdot \log \left( \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} + B \right) = -2 \cdot \log(A + B) \quad (36)$$



Треба напоменути да по правилима логаритмовања збир логаритама није једнак логаритму збира, тј.  $\log(A+B) \neq \log(A) + \log(B)$ . Из овога не треба извући закључак да су Колбрук и Вајт направили математичку грешку (37):

$$-2 \cdot \log \left( \frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda_{dt}}} \right) - 2 \cdot \log \left( \frac{\varepsilon}{3.71 \cdot D_u} \right) \neq -2 \cdot \log_{10} \left( \frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda_{dt}}} + \frac{\varepsilon}{3.71 \cdot D_u} \right) \quad (37)$$

Уосталом, као што се види са слике 14, циљ није ни био да се обједине Прандтлова и фон Карманова једначина у једну, већ да се направи глатки прелаз који и одговара стварној промени Дарсијевог коефицијента хидрауличког отпора каква се и јавља у реалним хидрауличким системима када је у питању делимични турбулентан режим. Наиме, проблем може да се постави као инверзан, тако да је подједнако математички нетачно раставити Колбрукову једначину на Прандтлову и фон Карманову. Треба узети у обзир да су Колбрук и Вајт дошли до своје једначине после низа експеримената, тј. да нису спроводили само математичке прорачуне. Претходно је у дисертацији већ речено да су до својих резултата Прандтл и фон Карман дошли на основу експеримената које је спровео Никурадсе, тако да се може закључити да су све три релације емпиријске природе.



Слика 15. Колбрукове једначине у области хидраулички 'глатког' режима

У данашње време се једначине Прандтла и фон Кармана сматра граничним случајем Колбрукове једначине, тако да се Колбрукова једначина може користити за све режиме протока осим ламинарног (Слика 15). Черчилова експлицитна једначина (43) нпр. апроксимира Колбрукову једначину у подручју свих режима које ова покрива али важи и за ламинарни и нестабилни режим протока (Слике 11-13).

### Б.5. Експлицитне апроксимације Колбрукове једначине

Део А у Колбруковој једначини (36) је дат у имплицитном облику у односу на Дарсијев фактор хидрауличког отпора. Нажалост до данас није пронађен егзактан математички начин да се фактор хидрауличког отпора  $\lambda_{dt}$  експлицитно изрази без апроксимација. Тачније речено, ово може да се превазиђе увођењем тзв. Ламберт W функције, али уз ограду да она сама даље није решива на егзактан начин тј. без увођења одређених апроксимација. О трансформацији Колбрукове једначине уз помоћ Ламберт W функције ће бити још речи у овој дисертацији (поглавље Б.6.4).

До скора је било незамисливо тешко само решавање Колбрукове функције као такве имајући у виду њен имплицитан облик. Још седамдесетих година двадесетог века, тј. пре неких тридесет година ручни калкулатори су били ретки, а и они постојећи нису могли да послуже за нешто много више од простог сабирања, одузимања, множења и дељења уз још по неку сложенију математичку операцију или функцију. У таквој ситуацији је искуство инжењера који рачуна било од пресудне важности. Морало је да се направи неколико проба да би се добио приближно тачан резултат. Значи, главни начин решавања је био методом пробних покушаја. Нешто савршеније су биле нумеричке итеративне методе које су стајале на расплогању и које су са више вероватноће осигуравале конвергенцију ка приближном решењу у односу на методу пробе и покушаја. У таквим условима бројни аутори дају своје апроксимације имплицитне Колбрукове једначине (Слике 11-13). Неке од апроксимација су врло компликоване са пуно коефицијената и експонената, али тачније, док су друге простије али мање тачне. Неке од апроксимација имају дефинисан опсег у којима апроксимирају Колбрукову једначину са одређеном тачношћу док ван тог опсега имају мању тачност (Слика 16). У даљем тексту се дају познате апроксимације по

редоследу објављивања, од најстарије Модијеве из 1947. године (Moody 1947) до најновије Рао и Кумарове из 2007. године (Rao-Kumar 2007)<sup>а</sup>. У овој дисертацији је такође развијена једна нова апроксимација Колбрукове једначине (54). Поређења различитих апроксимација су дата до детаља у раду Јилдрима (Yildirim 2009) као и у раду Грегори-Фогараси (Gregory-Fogarasi 1985).

У данашње време када су рачунари присутни у скоро свакој кући и када су и стандардни програми врло моћни, употреба ових апроксимација се може сматрати застарелом, и стога превазиђеном и непотребном. Грешке у раду са апроксимацијама се врло често јављају било због грешака у коефицијентима или због коришћења ван опсега. У овој дисертацији ће бити показан оригиналан начин како се може врло тачно израчунати вредност Дарсијевог коефицијента хидрауличног отпора уз помоћ стандардног програмског пакета *MS Excel 2007 (Enterprise edition)* (Brkić 2009a). Прегледни чланци који дају различите експлицитне апроксимације Колбрукове релације су такође доступни (Abdolahi et al 2007, Concha 2008, Ouyang-Aziz 1996, Rao-Kumar 2007, Goudar-Sonnad 2007; 2008; 2009, Romeo et al 2002).

### Б.5.1 Модијева апроксимација

Модијева апроксимација (38) (Moody 1947) важи за вредности Рејнолдсовог броја  $Re$  у опсегу од 4000 до  $10^8$  и опсегу релативне храпавости  $\epsilon/D_u$  од 0 до 0,01;

$$\lambda_{dt} = 0,0055 \cdot \left( 1 + \left( 2 \cdot 10^4 \cdot \frac{\epsilon}{D_u} + \frac{10^6}{Re} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \quad (38)$$

### Б.5.2 Вудова апроксимација

Вудова апроксимација (39) (Wood 1966) важи за вредности Рејнолдсовог броја  $Re$  веће од 10000 и за вредности релативне храпавости у опсегу  $10^{-5} < \epsilon/D_u < 0,04$ ;

$$\lambda_{dt} = 0,094 \cdot \left( \frac{\epsilon}{D_u} \right)^{0,225} + 0,532 \cdot \left( \frac{\epsilon}{D_u} \right) + 88 \cdot \left( \frac{\epsilon}{D_u} \right)^{0,44} \cdot Re^{-\Psi} \quad (39)$$

$$\Psi = 1,62 \cdot \left( \frac{\epsilon}{D_u} \right)^{0,134}$$

### Б.5.3 Екова апроксимација

Екова апроксимација (40) (Eck 1973) се даје без посебно назначеног опсега у коме важи, тако да се вероватно сматра да добро покрива цео опсег који покрива и сама Колбрукова једначина:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = -2 \cdot \log \left( \frac{\epsilon}{3,715 \cdot D_u} + \frac{15}{Re} \right) \quad (40)$$

<sup>а</sup> Видети у прилогу пример 1 и 3 у којима се рачуна Дарсијев коефицијент хидрауличног отпора користећи различите апроксимације Колбрукове једначине за једну вредност Рејнолдсовог броја и релативне храпавости



#### Б.5.4 Јанова апроксимација

Јанова апроксимација (41) (Jain 1976) се даје за вредности Рејнолдсовог броја  $Re$  у опсегу од 5000 до  $10^7$  и опсегу релативне храпавости  $\epsilon/D_u$  од 0,00004 до 0,05;

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = 1,14 - 2 \cdot \log \left[ \frac{\epsilon}{D_u} + \frac{21,25}{Re^{0,9}} \right] \quad (41)$$

#### Б.5.5 Сваме-Јанова апроксимација

Сваме-Јанова<sup>b</sup> апроксимација (42) (Swamee-Jain 1976) се даје за вредности Рејнолдсовог броја  $Re$  у опсегу од 5000 до  $10^7$  и опсегу релативне храпавости  $\epsilon/D_u$  од 0,00004 до 0,05;

$$\lambda_{dt} = \frac{0,25}{\left( \log \left( \frac{\epsilon}{3,7 \cdot D_u} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right)^2} \quad (42)$$

#### Б.5.6 Черчилова апроксимација

Черчилова релација (43) (Churchill 1977) покрива са добром тачношћу цео опсег као и Колбрукова једначина, али и ламинарни као и нестабилни режим протока.

$$\lambda_{dt} = 8 \cdot \left[ \left( \frac{8}{Re} \right)^{12} + \frac{1}{(\Theta_1 + \Theta_2)^{1,5}} \right]^{\frac{1}{12}} \quad (43)$$

$$\Theta_1 = \left[ 2,457 \cdot \ln \frac{1}{\left( \frac{7}{Re} \right)^{0,9} + 0,27 \cdot \frac{\epsilon}{D_u}} \right]^{16}$$

$$\Theta_2 = \left( \frac{37530}{Re} \right)^{16}$$

У раду Ромеа са сарадницима, наводи се слична апроксимација по Черчилу и Усагију у којој се уместо декадног користи природан логаритам. У раду Абдолахија са сарадницима (Abdolahi et al 2007), наводи се нешто другачији израз за  $\Theta_1$  уз како се тврди исти резултат:

$$\Theta_1 = \left[ 2,457 \cdot \ln \left[ \left( \frac{7}{Re} \right)^{0,9} + 0,27 \cdot \frac{\epsilon}{D_u} \right] \right]^{16}$$

#### Б.5.7 Ченова апроксимација

Ченова апроксимација (44) (Chen 1979) се даје за вредности Рејнолдсовог броја  $Re$  у опсегу од 4000 до  $4 \cdot 10^8$  и опсегу релативне храпавости  $\epsilon/D_u$  од 0,0000005 до 0,05;

<sup>b</sup> У раду Раа и Кумара је изостављен коефицијент 3,7 из Сваме-Јанове једначине због претпоставља се штампарске грешке (Rao-Kumar 2007)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = -2,0 \cdot \log \left[ \frac{\varepsilon}{3,7065 \cdot D_u} - \frac{5,0452}{Re} \cdot \log \left( \frac{1}{2,8257} \left( \frac{\varepsilon}{D_u} \right)^{1,1098} + \frac{5,8506}{Re^{0,8981}} \right) \right] \quad (44)$$

Не постоји посебно објашњење зашто се у појединим апроксимацијама дају исти коефицијенти са нешто промењеним вредностима на другој или трећој децимали, као нпр. 3,7065 или 3,707 уместо 3,71. Разлог може бити да се са нешто другачијим коефицијентом боље покривају експериментални подаци или је све то само последица пуког заокруживања коефицијената из рада Колбрука и Вајта које су различити аутори различито заокруживали (Schorle et al 1980). Чен у свом раду користи ознаку  $f_D$  за Дарсијев коефицијент (Chen 1980).

#### Б.5.8 Роундова апроксимација

Роундова апроксимација (45) (Round 1980) се даје без посебно назначеног опсега у коме важи:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = -1,8 \cdot \log \left[ \frac{0,27 \cdot \varepsilon}{D_u} + \frac{6,5}{Re} \right] \quad (45)$$

#### Б.5.9 Барова апроксимација

Барова апроксимација (46) (Barr 1981) се даје без посебно назначеног опсега у коме важи, тако да се вероватно сматра да добро покрива цео опсег који покрива и сама Колбрукова једначина;

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = -2 \cdot \log \left( \frac{\varepsilon}{3,7 \cdot D_u} + \frac{4,518 \cdot \log \left( \frac{Re}{7} \right)}{Re \left( 1 + \frac{Re^{0,52}}{29} \cdot \left( \frac{\varepsilon}{D_u} \right)^{0,7} \right)} \right) \quad (46)$$

#### Б.5.10 Зигранг-Силвестрова апроксимација

Зигранг-Силвестрова апроксимација (47) (Zigrang-Sylvester 1982) се даје за вредности Рејнолдсовог броја  $Re$  у опсегу од 4000 до  $10^8$  и опсегу релативне храпавости  $\varepsilon/D_u$  од  $10^{-6}$  до  $5 \cdot 10^{-2}$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = -2 \cdot \log \left[ \frac{\varepsilon}{3,7 \cdot D_u} - \frac{5,02}{Re} \log \left( \frac{\varepsilon}{3,7 \cdot D_u} + \frac{13}{Re} \right) \right] \quad (47)$$

#### Б.5.11 Хааландова апроксимација

Хааландова апроксимација (48) (Haaland 1983) се даје без посебно назначеног опсега у коме важи, тако да се вероватно сматра да добро покрива цео опсег који покрива и сама Колбрукова једначина:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = -1,8 \cdot \log \left[ \left( \frac{\varepsilon}{3,7 \cdot D_u} \right)^{1,11} + \frac{6,9}{Re} \right] \quad (48)$$

### Б.5.12 Сергидесова апроксимација

Сергидесова релација (49) (Serghides 1984) се даје без посебно назначеног опсега у коме важи, тако да се вероватно сматра да добро покрива цео опсег који покрива и сама Колбрукова једначина:

$$\lambda_{dt} = \left[ \Psi_1 - \frac{(\Psi_2 - \Psi_1)^2}{\Psi_3 - 2\Psi_2 + \Psi_1} \right]^{-2} \quad (49)$$

$$\Psi_1 = -2 \cdot \log \left( \frac{\varepsilon}{3,7 \cdot D_u} + \frac{12}{\text{Re}} \right)$$

$$\Psi_2 = -2 \cdot \log \left( \frac{\varepsilon}{3,7 \cdot D_u} + \frac{2,51 \cdot \Psi_1}{\text{Re}} \right)$$

$$\Psi_3 = -2 \cdot \log \left( \frac{\varepsilon}{3,7 \cdot D_u} + \frac{2,51 \cdot \Psi_2}{\text{Re}} \right)$$

### Б.5.13 Манадилијева апроксимација

Манадилијева апроксимација (50) (Manadilli 1997) се даје за вредности Рејнолдсовог броја Re у опсегу од 5235 до  $10^8$  и за све вредности релативне храпавости;

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = -2 \cdot \log \left( \frac{\varepsilon}{3,7 \cdot D_u} + \frac{95}{\text{Re}^{0,983}} - \frac{96,82}{\text{Re}} \right) \quad (50)$$

### Б.5.14 Апроксимација Ромеа, Роја и Монзона

Апроксимација Ромеа, Роја и Монзона (51) (Romeo et al 2002) се даје за вредности Рејнолдсовог броја Re у опсегу од 3000 до  $1,5 \cdot 10^8$  и опсегу релативне храпавости  $\varepsilon/D_u$  од 0 до  $5 \cdot 10^{-2}$ ;

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = -2 \cdot \log \left\{ \frac{\varepsilon}{3,7065 \cdot D_u} - \frac{5,0272}{\text{Re}} \log \left[ \frac{\varepsilon}{3,827 \cdot D_u} - \frac{4,567}{\text{Re}} \log \left( \left( \frac{\varepsilon}{7,7918 \cdot D_u} \right)^{0,9924} + \left( \frac{5,3326}{208,815 + \text{Re}} \right)^{0,9345} \right) \right] \right\} \quad (51)$$

### Б.5.15 Сонад-Годарева апроксимација

Сонад-Годарева апроксимација (52) (Sonnad-Goudar 2006) се даје за вредности Рејнолдсовог броја Re од 4000 до  $10^7$  и опсегу релативне храпавости  $\varepsilon/D_u$  од  $10^{-6}$  до  $5 \cdot 10^{-2}$ ;

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = 0,8686 \cdot \ln \left[ \frac{0,4587 \cdot \text{Re}}{S^{S/(S+1)}} \right] \quad (52)$$

$$S = 0,124 \cdot \text{Re} \cdot \frac{\varepsilon}{D_u} + \ln(0,4587 \cdot \text{Re})$$

### Б.5.16 Рао-Кумарева апроксимација

Рао и Кумар (Rao-Kumar 2007) су користили полупречник, а не пречник како је уобичајено (53). Члан  $\Phi(Re)$  најчешће може занемарити. Рао и Кумар не дају посебан опсег валидности своје једначине (Concha 2008, Vrkić 2009b).

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = 2 \cdot \log\left(\frac{r/\varepsilon}{B^*}\right) \quad (53)$$

$$B^* = \left[ \frac{0,444 + 0,135 \cdot Re}{Re} \right] \cdot \Phi(Re)$$

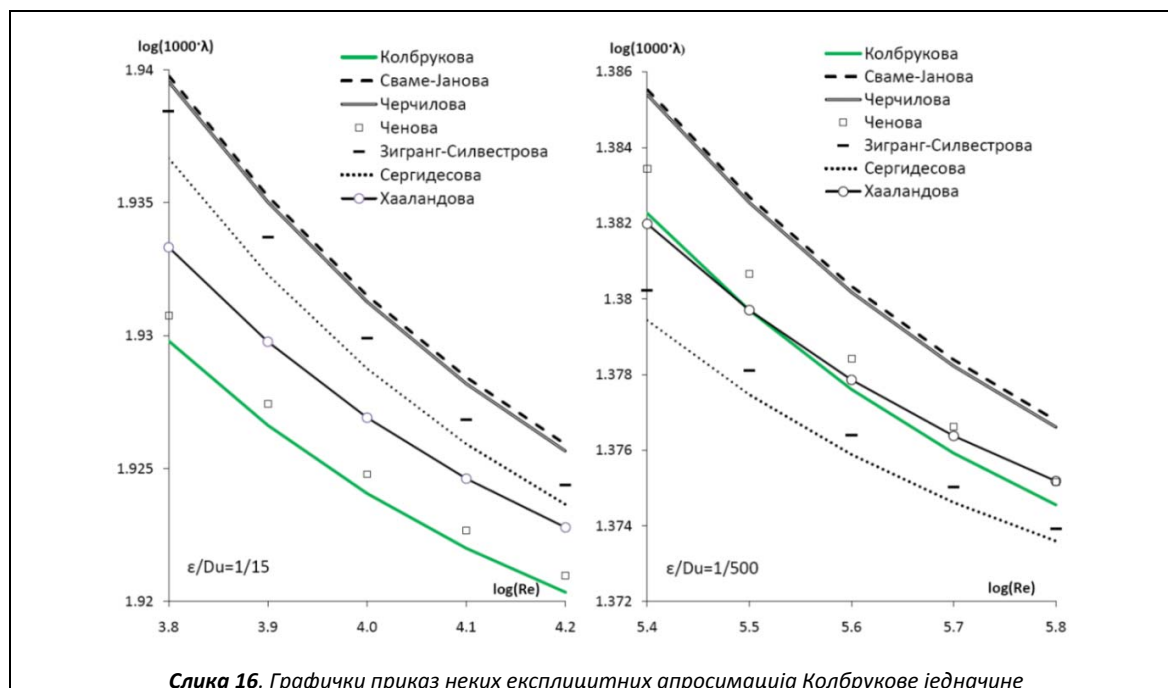
$$\Phi(Re) = 1 - 0,55 \cdot e^{-0,33 \left[ \ln\left(\frac{Re}{6,5}\right) \right]^2}$$

### Б.5.17 Апроксимација аутора - Бркићева апроксимација

Бркићева апроксимација (54) је развијена у овом докторату користећи такође у докторату развијену трансформисану Колбрукову једначину помоћу Ламберт W функције (82 и 85), као и приближно решење Ламберт W функције које предлажу Бари и сарадници (Barry et al 2000) (63):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} \approx -2 \cdot \log_{10}\left(\frac{5,02 \cdot S}{Re \cdot \ln(10)} + \frac{\varepsilon}{3,71 \cdot D_{in}}\right) \approx -2 \cdot \log_{10}\left(\frac{2,18 \cdot S}{Re} + \frac{\varepsilon}{3,71 \cdot D_{in}}\right) \quad (54)$$

$$S \approx \ln \frac{Re}{1,816 \cdot \ln\left(\frac{1,1 \cdot Re}{\ln(1 + 1,1 \cdot Re)}\right)}$$



Слика 16. Графички приказ неких експлицитних апроксимација Колбрукове једначине

## Б.6. Ламберт W функција у хидраулици

Јохан Хајнрих Ламберт (Johann Heinrich Lambert; 1728-1777) је показивао широк истраживачки интерес (Gray 1978, Hayes 2005). Иако је био самоуки син кројача, у зрелом добу је дао фундаменталне доприносе у теорији бројева, геометрији, статистици, астрономији, метеорологији, хигрометрији, пирометрији, оптици, космологији и философији. Ламберт је први доказао ирационалност Лудолфовог броја  $\pi$ . Увео је обележавања хиперболичких функција каква се и данас користе.

Сама Ламберт W функција није алгебарска. Ламберт W функција је имплицитна трансцедентна функција која је дефинисана само преко елементарних функција (54). Међутим она не може да се изрази преко других алгебарских функција у коначном облику.

Имплицитан облик Колбрукове једначине може да се трансформише у експлицитан облик без било каквих упрошћења или апроксимација у експлицитан облик уз помоћ Ламберт W функције. Дакле ова трансформација је изведена егзактним математичким поступком. Нажалост, данас још увек не постоји егзактан начин да се израчуна нумеричка вредност Ламберт W функције за дати нумерички аргумент без неких апроксимација. Ако у будућности математичари пронађу овај начин то ће бити и тачно решење овде приказане егзактно трансформисане Колбрукове једначине у експлицитан облик уз помоћ Ламберт W функције (81, 82 и 85). За претпоставити је да ово решење неће бити ни просто ни кратко и да ће стога имати само теоријски значај или што је вероватније биће искоришћено као процедура за рачунарске програме (Clamond 2009) или ће бити уграђено као функција у напредније ручне калкулаторе.

Ламберт W функција се данас користи у различитим пољима науке и технике као што су кретање подземних вода, проблем падобранског скока, демографске студије, колапс звезда, итд (Corless et al 1996, Barry et al 1993; 2000; 2002). Ламберт W функција је скорије време почела да се користи и у хидраулици (Goudar-Sonnad 2003, Sonnad-Goudar 2004; 2005; 2007). У радовима Сонада и Годара се користи Ламберт W функција за трансформацију експлицитних једначина у хидраулици, али сам поступак за приближно решавање Ламберт W функције није показан до детаља. Мор (More 2006) даје детаљнију процедуру по којој може да се нађе ово решење. Нандакумар (Nandakumar 2007) даје програмски код за приближно решавање Ламберт W функције као додаток уз разматрани хидраулички проблем. Треба напоменути да су модули за приближно решавање Ламберт W функције доступни у оквиру специјализованих математичких пакета као што су *Maple* или *Mathematica*. Начин за изналажење приближног решења које се односи на реалну грану Ламберт W функције је до детаља приказано у радовима Бојда (Boyd 1998) и Барија (Barry et al 2000; 2002) са сарадницима. Да не би дошло до забуне треба напоменути да Бојд у своме раду природни Неперов логаритам означава са  $\log$  (требало би да стоји  $\ln$  или  $\log_e$ ) што је иначе уобичајена ознака за декадни Бригсов логаритам. У даљем тесту ове дисертације ће се објаснити поједини поступци за приближно решавање Ламберт W

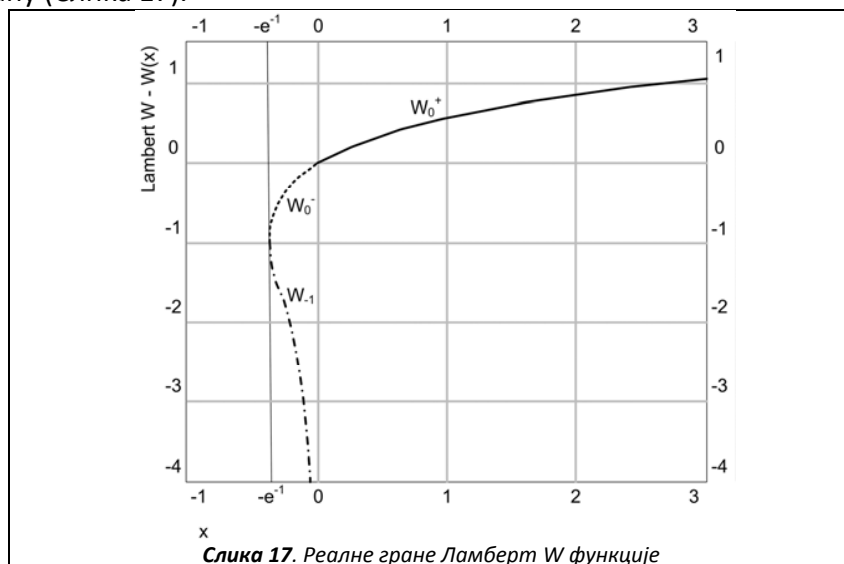
функције. Детаљније о Ламберт  $W$  функцији се може сазнати из радова Корлеса са сарадницима (Corless et al 1996) и Рајта (Wright 1959). Видети и Бркић (Brkić 2009c,d,e).

### Б.6.1 О Ламберт $W$ функцији уопште

Ламберт  $W$  функцију је први формулисао Ламберт 1758, док је Ојлер наредне две деценије детаљно испитивао њене особине. Ламберт  $W$  функција се дефинише као (55):

$$W(x) \cdot e^{W(x)} = x \quad (55)$$

За реалне вредности аргумента  $x$ , функција има две гране, и то:  $W_0$ -главну грану и  $W_{-1}$ -негативну грану (Слика 17).



Слика 17. Реалне гране Ламберт  $W$  функције

Негативна грана је у опсегу  $W_{-1} \geq -1$ , док се главна грана обично дели на два опсега, тј. на доњи део главне гране  $-1 \leq W_0^- \leq 0$  и на горњи део главне гране  $W_0^+ \geq 0$ . У овој дисертацији ће се користити само горњи део главне гране  $W_0^+$  Ламберт  $W$  функције. Домен главне гране Ламберт  $W$  функције је  $W_0 \in [-1, +\infty)$  за  $x \in [-1/e, +\infty)$ . Део који ће бити обрађен у овој дисертацији има домен  $W_0^+ \in [0, +\infty)$  за  $x \in [0, +\infty)$ . Њено аналитичко решење се дефинише као (56):

$$W = \ln \frac{x}{\ln \left( \frac{x}{\ln \left( \frac{x}{\ln(\dots)} \right)} \right)} \quad (56)$$

### Б.6.2 Приближно решавање Ламберт $W$ функције

По Бојду (Boyd 1998) је најбоље дефинисати помоћну функцију у циљу добијања приближног решења Ламберт  $W$  функције (57):

$$\omega = W + 1 \Leftrightarrow W = \omega - 1 \quad (57)$$

За овако 'померену' функцију треба трансформисати и њен аргумент (58):

$$y = 1 + x \cdot e^1 \approx 1 + 2,71 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{e^1} \approx \frac{y-1}{2,71} = 0,367 \cdot (y-1) \quad (58)$$

Затим се Ламберт W функција може изразити у трансформисаном облику (59):

$$(\omega-1) \cdot e^\omega = y-1 \quad (59)$$

Приближно решење овако трансформисане функције по Бојду је (60):

$$\omega_0 = \{\ln(y+10) - \ln(\ln(y+10))\} \cdot \tanh\left(\frac{(2 \cdot y)^{0,5}}{\ln(10) - \ln(\ln(10))}\right) \quad (60)$$

У претходној једначини (60) тангенс хиперболикус се дефинише као  $\tanh(\xi) = (e^\xi - e^{-\xi}) / (e^\xi + e^{-\xi})$ . Ово решење по Бојду за  $\omega_0$  има на домену  $y \in [0, +\infty)$  максималну грешку од 15,4% у поређењу са формалним решењем (56). Побољшано решење је такође доступно (61).

$$\varpi_0 = \omega_0 \{1 + \Omega\} \quad (61)$$

$$\Omega = \frac{\left(\ln(y) - \frac{7}{5}\right) \cdot e^{-\frac{3}{40} \left(\ln(y) - \frac{7}{5}\right)^2}}{10}$$

Побољшано решење по Бојду (61) има максималну грешку од 4,7%.

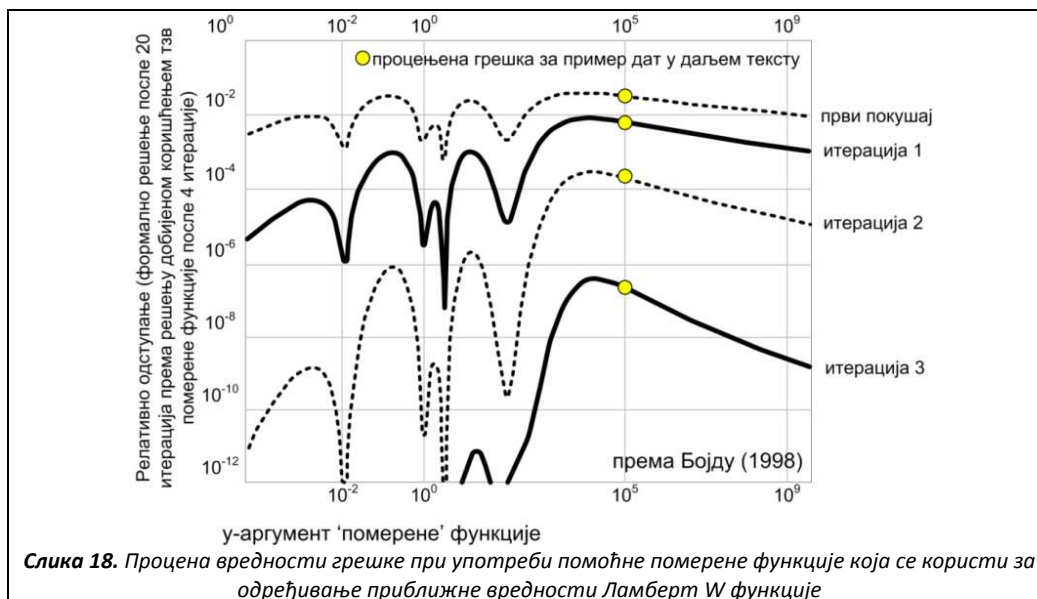
Када се ово побољшано решење (61) узме као улазни параметар за Њутн-Рапсово итеративно поступак (62), релативна грешка се већ после четврте итерације смањује испод  $10^{-12}$  на целом домену (Boyd 1998).

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \frac{(\omega_i - 1) - e^{-(\omega_i)(y-1)}}{\omega_i} \quad (62)$$

Ова грешка није равномерно распоређена по целом домену такозване 'померене' функције  $\omega(y)$  (Слика 18). Треба имати на уму да се процењена вредност грешке приказане на слици 18 не односи на саму Ламберт W функцију, већ само на тзв. 'померену' тј. помоћну Бојдову функцију  $\omega(y)$ , тако да процене дате на слици имају ограничену важност имајући у виду да се у ствари важна процена грешке функције  $W(x)$ .

Бари са сарадницима (Barry et al 2000; 2002) даје нешто другачији израз за рачунање приближне вредности Ламберт W функције (63):

$$W_0^+(x) = \ln \frac{6 \cdot x}{5 \cdot \ln \left[ \left( \frac{12}{5} \right) \cdot \left( \frac{x}{\ln \left( 1 + \frac{12 \cdot x}{5} \right)} \right) \right]} \quad (63)$$



Претходно приказано решење (63) по Барију и сарадницима прави највећу могућу грешку од 23% за  $x > 1$ . Овако процењена грешка се односи на саму Ламберт W функцију, тј.  $W(x)$ . Овако релативна грешка се јавља само на уским сегментима домена функције док је реално у највећем броју случајева знатно мања (упоредити понашање релативне грешке на домену 'померене' Бојдове функције на слици 18). Бари и сарадници нуде и тачније али знатно сложеније решење о коме овде неће бити речи. Овде приказан метод за приближно решавање Ламберт W функције по Барију и сарадницима (63) је далеко простији у односу на овде приказану Бојдову методу, али је и у неким случајевима доста мање тачан. На решењу које дају Бари и сарадници (Barry et al 2000; 2002) се заснива апроксимација Колбрукове једначине приказана у овом докторату (54) (Поглавље Б.5.17).

Поступци који важе налажење приближног нумеричког решења за остале делове реалне гране Ламберт W функције који немају примену у нашем случају, неће се ни разматрати<sup>с</sup>.

### Б.6.3 Егзактна математичка трансформација Прандтлове једначине у експлицитан облик помоћу Ламберт W функције

Сличну трансформацију Прандтлове једначине у експлицитан облик помоћу Ламберт W функције дају Годар и Сонад (Goudar-Sonnad 2003).

У овој дисертацији је већ претходно приказана Прандтлова, тј. НПК једначина за хидраулички 'гладак' режим (17). Ова једначина је дата у имплицитном облику са гледишта Дарсијевог коефицијента хидрауличког отпора, те се стога може применити Ламберт W функција за њену егзактну математичку трансформацију у експлицитан облик.

У једначину (17) се могу увести следеће трансформације (64):

<sup>с</sup> Видети у прилогу примере 2-6 који су у вези са прорачуном хидрауличких отпора помоћу Ламберт W функције



$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = -2 \cdot \log\left(\frac{1}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda_g}}\right) - 0,8 \quad (64)$$

Односно (65):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = -\frac{2}{\ln(10)} \ln\left(\frac{1}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda_g}}\right) - 0,8 \quad (65)$$

Уводећи смене:  $a=2/\ln(10)$  и  $b=0,8$ ; Прандтлова једначина може да се напише као (66):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = -a \ln\left(\frac{1}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda_g}}\right) - b \quad (66)$$

Даљи поступак трансформације се приказује детаљно (67-75):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = -a \left( \ln\left(\frac{1}{\text{Re}}\right) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}}\right) \right) - b \quad (67)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = -a \ln\left(\frac{1}{\text{Re}}\right) - a \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}}\right) - b \quad (68)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} + a \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}}\right) = a \ln(\text{Re}) - b \quad (69)$$

$$\Phi = \frac{1}{a \cdot \sqrt{\lambda_g}} \quad (70)$$

$$\Phi a + a \ln(\Phi a) = a \ln(\text{Re}) - b \quad (71)$$

$$\Phi + \ln(\Phi) = \ln\left(\frac{\text{Re}}{a}\right) - \frac{b}{a} \quad (72)$$

$$W(x) + \ln[W(x)] = \ln(x) \quad (73)$$

$$\Phi = W\left[\frac{\text{Re}}{a} \exp^{-\frac{b}{a}}\right] \quad (74)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = a \cdot W\left[\frac{\text{Re}}{a} e^{-\frac{b}{a}}\right] \quad (75)$$

Коначно се добија егзактно трансформисана Прандтлова једначина у експлицитан облик без било каквих апроксимација изражена преко Ламберт  $W$  функције (76).

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = 0,868589 \cdot W[0,458338 \cdot \text{Re}] \quad (76)$$

Колбруков облик Прандтлове једначине (18) о коме се такође дискутовало у претходном тексту се такође може трансформисати користећи Ламберт  $W$  функцију. Пошто је поступак

трансформације сличан претходно приказаном (65-76), исти ће бити дат у нешто скраћеном облику (77-79):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} + a \cdot \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}}\right) = -a \cdot \ln\left(\frac{2,51}{Re}\right) \quad (77)$$

$$\Phi \cdot a + a \cdot \ln(\Phi \cdot a) = -a \cdot \ln\left(\frac{2,51}{Re}\right) \quad (78)$$

$$\Phi = W\left[\frac{Re}{2,51 \cdot a}\right] \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = a \cdot W\left[\frac{Re}{2,51 \cdot a}\right] \quad (79)$$

Коначно Колбруков израз Прандтлове једначине трансформисан у експлицитан облик без било каквих апроксимација изражен преко Ламберт W функције се даје као (80):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = 0,868589 \cdot W[0,458682 \cdot Re] \quad (80)$$

#### Б.6.4 Егзактна математичка трансформација Колбрукове једначине у експлицитан облик помоћу Ламберт W функције

Мор (More 2006) даје један од могућих облика Колбрукове једначине трансформисане у експлицитан облик на математички егзактан начин помоћу Ламберт W функције (81):

$$\lambda_{dt} = \frac{1}{\left[O_3 \cdot W\left(\frac{O_1}{e^{O_2 \cdot O_3}}\right) - \frac{O_1}{O_2}\right]^2} = \frac{1}{\left[O_3 \cdot W(O_4) - \frac{O_1}{O_2}\right]^2} \quad (81)$$

$$O_1 = \frac{\varepsilon}{3,71 \cdot D_u}$$

$$O_2 = \frac{2,51}{Re}$$

$$O_3 = \frac{2}{\ln(10)} \approx 0,868589$$

$$O_4 = \frac{O_1}{e^{O_2 \cdot O_3}} = \frac{O_1}{O_2 \cdot O_3}$$

Извођење претходне једначине (81) је доступно у литератури (More 2006), те се у овој дисертацији неће посебно приказивати. У дисертацији се даје један другачији облик трансформисане Колбрукове једначине помоћу Ламберт W функције (82):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = -2 \cdot \log\left(10^{\frac{-1}{\ln(10)} W\left[\frac{Re \cdot \ln(10)}{5,02}\right]} + \frac{\varepsilon}{3,71 \cdot D_u}\right) \quad (82)$$

Трансформисани облик Колбрукове једначине (82) је добијен на основу трансформација Прандтлове једначине у Колбруковом облику која важи за 'хидраулички' гладак режим (18 и 79). На основу претходног разматрања се добија (83):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = \frac{2}{\ln(10)} W \left[ \frac{\text{Re} \cdot \ln(10)}{2 \cdot 2,51} \right] = -2 \cdot \log \left( \frac{2,51}{\text{Re}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} \right) \quad (83)$$

Односно, посредно се може закључити (84):

$$\frac{\text{Re} \cdot \ln(10)}{2 \cdot 2,51} = 10^{-2 \cdot \log \left( \frac{2,51}{\text{Re}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} \right)} \quad (84)$$

Из претходног се директно изводи релација (82). Релација (85) је еквивалентна једначини (82):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = -2 \cdot \log \left( \frac{5,02 \cdot W \left[ \frac{\text{Re} \cdot \ln(10)}{5,02} \right] + \frac{\varepsilon}{3,71 \cdot D_u}}{\text{Re} \cdot \ln(10)} \right) \quad (85)$$

Претходна једначина се добија заменом члана  $\sqrt{\lambda_{dt}}$  у Колбруковој једначини еквивалентом истога члана узетим из једначине (79) који се може записати као (86):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = \frac{1}{\frac{2}{\ln(10)} \left[ \frac{\text{Re} \cdot \ln(10)}{5,02} \right]} \quad (86)$$

### Б.7. Решавање имплицитно задатих израза помоћу MS Excel-а (ver. 2007)

Претходно приказани начини за налажење решења за имплицитно задату Колбрукову једначину (35) су релативно компликовани. Примена претходно приказаних апроксимација (38-54) у старту уноси извесну грешку у прорачун. Егзактна математичка трансформација Колбрукове једначине (35) уз помоћ Ламберт W функције (81, 82 и 85) не уноси било какву врсту грешке у старту, али сама Ламберт W функција не може да се реши на егзактно математички начин. Самим налажењем приближног решења за Ламберт W функцију, уноси се исти износ грешке и у решење Колбрукове једначине у коме фигурише Ламберт W функција (81, 82 и 85). Пошто свака апроксимација (38-54) уноси неку грешку у прорачун а имајући у виду да су неке од апроксимација веома комплексне чиме се само повећава могућност да се поред основне грешке коју уноси апроксимација, у крајњи резултат унесе и рачунска грешка услед непажње, коришћење апроксимација Колбрукове једначина је сувишно у данашње време када су компјутери широко доступни. Коришћење апроксимативних облика који су експлицитно дати до скора је имало веома великог значаја пошто чак ни ручни калкулатори нису били широко доступни све до осамдесетих година двадесетог века. У двадесетпрвом веку када су рачунари широко доступни и када се познавање коришћења основних програмских пакета убраја у основну писменост становништва, коришћење рачунара међу професионалним инжењерима је обавезно. Данас су доступни многи ускоспецијализовани програмски пакети који покривају готово све области инжењерства. Многи су доста скупи, али је за решавање некад тешко

решивих проблема довољан и основни софтвер је доступан готово на сваком рачунару. Једна од таквих софтвера је и *MS Office* који није бесплатан али је стандардан и лако доступан. Слични софтверски алати који су потпуно бесплатни се такође могу лако пронаћи и употребити за исту сврху. У оквиру *MS Office* је стандардно доступан пакет за решавање математичких формула и табеларна прорачунавања *MS Excel*. Овај програмски пакет може послужити за израчунавање приближне вредности Колбрукове једначине (31) са врло великом тачношћу. Сва наредна објашњења се односе на *MS Excel ver. 2007 (Enterprise edition)*. Колбрукова једначина (35) се састоји из два дела како је то већ раније и напоменуто (36), односно из два сабирка А и В који сачињавају аргумент логаритамске функције у Колбруковој једначини (35). Део А је дат у имплицитном облику са гледишта Дарсијевог коефицијента хидрауличког отпора и односи се пре свега на проток који највише одговара условима хидраулички 'глатког' режима, док други део В није дат у имплицитном облику и одговара првенствено потпуно турбулентном протоку. Ова два сегмента А и В (37) обједињена у Колбрукову једначину покривају прелазни режим веома добро, као што је већ раније и описано. Имплицитно задате једначине морају да се решавају методом 'пробе и поправке' при чему особа која врши прорачун мора да поседује доста велико искуство. Начин 'пробе и поправке' где се поправка процењује на основу искуства је најстарији и најмање ефикасан метод решавања имплицитно задатих једначина. Далеко ефикаснији начин је применом нумеричких метода решавања код којих се крајњи резултат добија итеративним поступком за неку унапред задату претпостављену вредност која се применом нумеричке процедуре све више приближава тачном решењу. Метода решавања коришћење *MS Excel*-а се може сматрати неком врстом нумеричке методе. Предност је што Колбрукова једначина има и део В који није имплицитан и који је увек различит од нуле ( $V \neq 0$ ) па се самим тим он аутоматски узима као почетна вредност за итеративни поступак, док се део А узима као једнак нули ( $A=0$ ). Уколико би се и део В узео са вредношћу нула, то би значило да је релативна хрпаваост у таквој цеви једнака нули, односно да је режим сигурно хидраулички 'гладак' те је последично боље користити или Прандтлову (НПК) једначину (17) или неку од једначина Блазијусовог типа (12); видети табелу 1. Прандтлова једначина (17) је такође дата у имплицитном облику када је у питању Дарсијев коефицијент хидрауличког отпора, и стога је такође нужно потребно да се она решава итеративним путем, с тим да је коришћење *MS Excel*-а нешто компликованије у овом случају у односу на случај са решавањем Колбрукове једначина самим тим што се мора самостално претпоставити нека почетна вредност Дарсијеве хидрауличке пропусности која директно улази у прорачун.

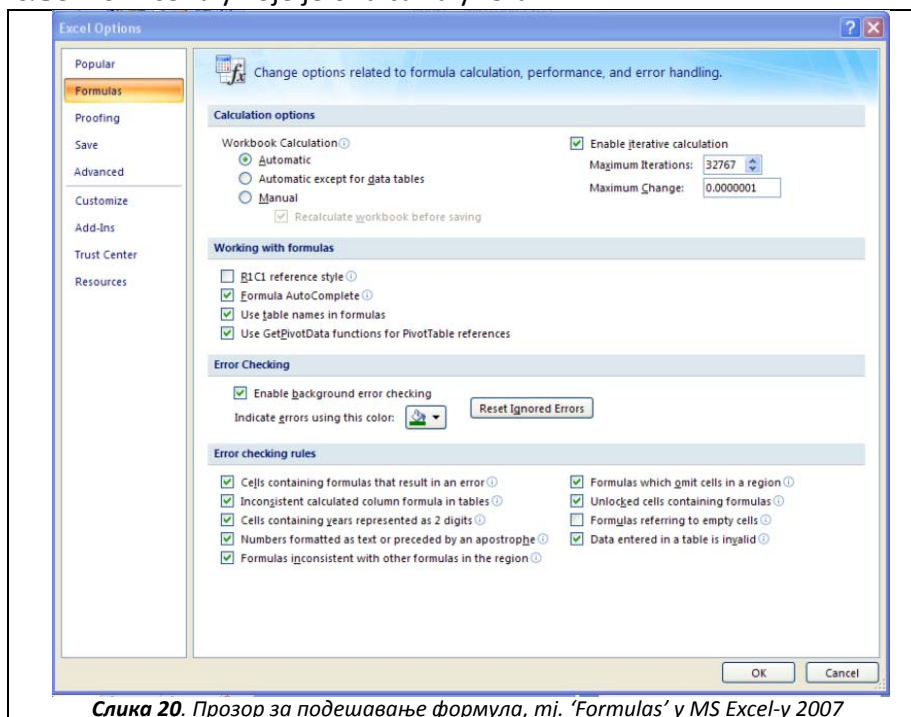
Просечна грешка која се уноси у коначни резултат прорачуна коришћењем апроксимација Колбрукове једначине је у просеку мања од 1%. Слична грешка се уноси и приближним решавањем егзактно математички трансформисане Колбрукове једначине у експлицитан облик коришћењем Ламберт  $W$  функције (81, 82 и 85).. Закључак би био да су све експлицитне апроксимације Колбрукове функције доста тачне, али не у подједнакој мери за цео опсег Рејнолдсовог броја  $Re$  који покрива сама Колбрукова једначина (35), тј. грешка није равномерно диспергована по целом опсегу.

Коначно, да би се решила Колбрукова једначина (35) уз помоћ *MS Excel*-а потребно је у самом програму извршити одређена подешавања. У горњем левом углу програмског прозора *MS Excel*-а 2007 постоји тзв. главно дугме тј. 'Office button' (Слика 19) које је потребно притиснути, а затим са дна падајућег прозора који се отвори треба притиснути дугме 'Excel options', тј. 'Опције Excel-а':



Слика 19. Главно дугме тј. 'Office button' у оквиру *MS Excel*-а 2007

У оквиру 'Excel options' потребно је даље отворити прозор за подешавања формула 'Formulas' и штиклирати опцију која омогућава увођење такозваних циркуларних референци тј. 'Enable iterative calculation' (Слика 20). Овиме се дозвољава да функција као аргумент користи своју вредност израчунату у претходном кораку, односно да се функција позива на поље *MS Excel*-а у које је она сама унета.



Слика 20. Прозор за подешавање формула, тј. 'Formulas' у *MS Excel*-у 2007

На примеру датом на слици 21, резултати итеративног поступка за решавање Колбрукове једначине помоћу *MS Excel*-а је упоређено са решењем на основу Хааландове експлицитне апроксимације (48). Процењена грешка се даје у последњој колони приказа на слици 21 и табели 6. Резултати приказани илустративно на слици 21 дају се у табели 2.

Табела 2. Резултати решавања имплицитно задате Колбрукове једначине помоћу MS Excel-а (уз слику 21)

A: logRe	B: Re	C: $\epsilon/D_u$	D: Имплицитно задата Колбрукова једначина	F: Haaland	G: грешка $[(D-F)/D]\%$
3,0	1000,0	1/500	3,959392229024170	3,863749872706350	2,42
3,1	1258,9	1/500	4,116245743048770	4,037076528054730	1,92
3,2	1584,9	1/500	4,272527204357220	4,208755486018040	1,49
3,3	1995,3	1/500	4,427824473637190	4,378404305912820	1,12
3,4	2511,9	1/500	4,581668990520960	4,545564859010140	0,79
3,5	3162,3	1/500	4,733529273813930	4,709695149620750	0,50
3,6	3981,1	1/500	4,882806210471860	4,870163833140490	0,26
3,7	5011,9	1/500	5,028831436818390	5,026249534289510	0,05
3,8	6309,6	1/500	5,170870442913050	5,177147539407240	-0,12
3,9	7943,3	1/500	5,308132242540010	5,321986604288930	-0,26
4,0	10000,0	1/500	5,439787394605120	5,459858181029910	-0,37
4,1	12589,3	1/500	5,564995649337340	5,589859017544130	-0,45
4,2	15848,9	1/500	5,682943357854120	5,711145679582280	-0,50
4,3	19952,6	1/500	5,792888983207580	5,822996333376040	-0,52
4,4	25118,9	1/500	5,894212792953540	5,924871898577950	-0,52
4,5	31622,8	1/500	5,986464638332630	6,016466668009610	-0,50
4,6	39810,7	1/500	6,069402437544720	6,097738885578400	-0,47
4,7	50118,7	1/500	6,143014360221950	6,168915027764690	-0,42
4,8	63095,7	1/500	6,207520080896330	6,230466884063680	-0,37
4,9	79432,8	1/500	6,263350372687010	6,283066197040860	-0,31
5,0	100000,0	1/500	6,311108569875530	6,327525662442440	-0,26
5,1	125892,5	1/500	6,351520647985350	6,364736369704990	-0,21
5,2	158489,3	1/500	6,385381915318730	6,395610385550410	-0,16
5,3	199526,2	1/500	6,413507492570350	6,421034187162370	-0,12
5,4	251188,6	1/500	6,436691538824810	6,441835324390160	-0,08
5,5	316227,8	1/500	6,455677526305080	6,458761987559450	-0,05
5,6	398107,2	1/500	6,471139576270720	6,472473484434050	-0,02
5,7	501187,2	1/500	6,483673354749570	6,483538939962950	0,00
5,8	630957,3	1/500	6,493794324404510	6,492441548156040	0,02
5,9	794328,2	1/500	6,501941069650310	6,499586110712100	0,04
6,0	1000000,0	1/500	6,508481703488310	6,505308142142850	0,05

A: A1 log Re; A2=3.0; A3=A2+0.1

B: B1 Re; B2=POWER(10,A2)

C: C1  $\epsilon/D$ ; C2=1/500;

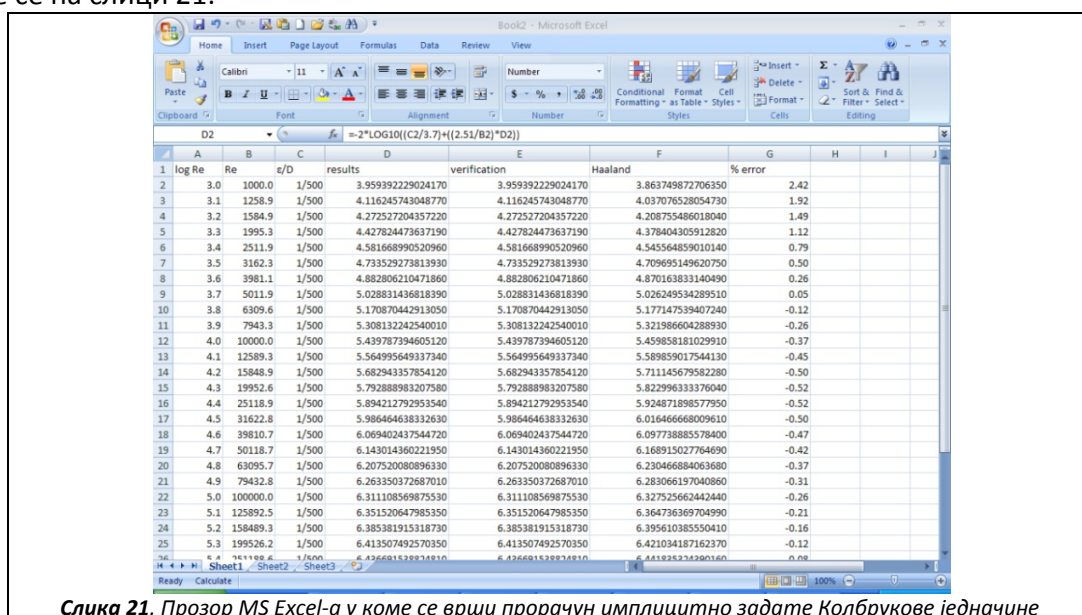
D: D1 results; D2=-2\*LOG10((C2/3.7)+((2.51/B2)\*D2))

E: E1 verification; E2=-2\*LOG10((C2/3.7)+((2.51/B2)\*D2));

F: F1 Haaland; F2=-1.8\*LOG10(POWER((1/3.7)\*C2,1.11)+6.9/B2)

G: G1 % error; G2=((D2-F2)/D2)\*100

Максималан дозвољен број итерација је 32767, а тачност 0,0000001. Наравно ако се врше обимнији прорачуни треба реално проценити тачност која је задовољавајућа како се програм не би преоптеретио што се може десити када су стотине једначина спрегнуте, а све се траже за максималном тачношћу уз највећи могући дозвољени број итерација. Сви претходни и будући примери по којима је решавана Колбрукова једначина, а да није експлицитно наведен метод решавања, решени су помоћу *MS Excel*-а. Један активан прозор *MS Excel*-а у коме се врши прорачун имплицитно задате Колбрукове једначине даје се на слици 21:



Слика 21. Прозор *MS Excel*-а у коме се врши прорачун имплицитно задате Колбрукове једначине

## Б.8. Падови притиска у цевоводима

Пад притиска у једној цеви се може израчунати на основу већ приказаног Дарси-Вајсбаховог обрасца (2) тј. (3). Поред Дарсијевог коефицијента хидрауличког отпора  $\lambda$  потребно је знати пречник цеви, дужину цеви, густину флуида који протиче и количину протока (тј. брзину којом флуид протиче). Ако је у питању гасовити флуид, за разлику од течног, потребно је увести одређене термодинамичке законитости (87):

$$\frac{dp}{\rho} + \lambda \frac{dL}{D_u} \frac{v^2}{2} + v dv + g dH = A + B + C + D = 0 \quad (87)$$

У једначини (87) члан А се односи на енергију која је последица притиска у гасоводу, члан В се односи на хидрауличке губитке услед трења, С на губитке кинетичке енергије и D на висинске разлике, односно на коте на којима се налазе крајеви гасовода између којих се рачуна пад притиска<sup>d</sup>.

Општа једначина за пад притиска у гасоводу се изводи на основу једначине (87), с тим да се за проблеме обрађене у овој дисертацији може узети да су чланови С и D једнаки 0

<sup>d</sup> Видети у прилогу примере 7-13 у вези падова притисака у цевоводима

( $C=0$  и  $D=0$ ). Члан  $C$  који се односи на промену кинетичке енергије у цевоводу се занемарује пошто се може сматрати да је брзина протока у гасоводу непроменљива на посматраном сегменту, а из разлога што се проток гаса у условима градских гасних дистрибутивних мрежа може посматрати као проток нестишљивог флуида. Наиме падови притиска су тако мали, а инерцијске силе слабе да се врло добри резултати добијају уз претпоставку нестишљивости гаса. Наравно, не може се прорачун какав се примењује у случају протока воде или нафте кроз цеви дословно применити и на проток гаса. Члан  $D$  се такође може занемарити пошто ће се сви случајеви протока разматрани у овој дисертацији посматрати у хоризонталној равни. Уколико се укаже потреба за прорачун протока кроз нагнуте или вертикалне цеви, прорачун се може врло лако прилагодити и за ове случајеве применом у литератури доступних поступака о којима овде неће бити посебних напомена.

Да би се лакше извршило интегралчење једначине (87) између две генеричке тачке 1 и 2, потребно је обе стране ове једначине помножити густином гаса  $\rho$ , с тим да се производ  $\rho \cdot V$  сматра у даљем току прорачуна константом (88):

$$\rho dp + \lambda \frac{dL}{D_u} \frac{(\rho \cdot v)^2}{2} = A' + B' = 0 \quad (88)$$

Где су чланови  $A'$  и  $B'$  у ствари чланови  $A$  и  $B$  из једначине (87) само у нешто трансформисаном облику. Сама густина гаса даље може да се изрази као (89):

$$\rho = \frac{p \cdot M}{z \cdot R \cdot T} \quad (89)$$

Где је  $M$  молекулска маса гаса у  $kg/mol$ ,  $z$  је бездимензиони фактор компресибилитета гаса,  $R$  је универзална гасна константа ( $8,31441 J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$ ) док је  $T$  температура гаса у  $K$ .

На основу претходног, може се спровести интеграција члана  $A'$  (90):

$$\int_1^2 \rho dp = \int_1^2 \frac{p \cdot M}{z \cdot R \cdot T} dp = \frac{M}{z_{sr} \cdot R \cdot T_{sr}} \int_1^2 p dp = \frac{M}{z_{sr} \cdot R \cdot T_{sr}} \frac{p_1^2 - p_2^2}{2} \quad (90)$$

Где се просечна температура дефинише као:

$$T_{sr} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Док се просечан притисак дефинише на нешто сложенији начин:

$$p_{sr} = \frac{2}{3} \left[ p_1 + p_2 - \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 + p_2} \right]$$

Просечан компресибилитет гаса се може одредити из у нафтној индустрији доста коришћеног Кацовог (Katz) дијаграма (Hall-Iglesias Silva 2007).

Слично се може извршити и интеграција члана  $B'$  (91):



$$\int_1^2 \lambda \frac{dL}{D_u} \frac{v^2}{2} = \frac{\Delta L \cdot v^2 \cdot \lambda}{2 \cdot D_u} = \frac{8 \cdot \Delta L \cdot \lambda \cdot \rho_{st}^2 \cdot Q_{st}^2}{D_u^5 \cdot \pi^2} \quad (91)$$

Сабирајући једначине (90) и (91) добија се једначина (92):

$$Q_{st} = \frac{\pi \cdot \sqrt{1000 \cdot R}}{\sqrt{29 \cdot 16}} \frac{z_{st} \cdot T_{st}}{p_{st}} \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{L \cdot \rho_r \cdot T_{sr} \cdot z_{sr}}} \frac{\sqrt{D_u^5}}{\sqrt{\lambda}} \quad (92)$$

Коелџо и Пинхо (Coelho-Pinho 2007) су претходну једначину прилагодили директан унос коефицијената из једначина по Блазијусовом моделу (12) које важе за хидраулички 'гладак' режим али у облику трансформисаном из кога се не рачуна директно Дарсијев коефицијент хидрауличког отпора већ Дарсијев коефицијент хидрауличке пропусности који одговара тзв. Прандтловом стандардном обележавању (видети табелу 1) (93-94):

$$Q_{st} = \pi \cdot \alpha^{\frac{1}{1-\beta}} \left( \frac{1000 \cdot R}{116} \right)^{\frac{0,5-\beta}{1-\beta}} \frac{1}{2^{1-\beta}} \frac{1}{\eta^{1-\beta}} \frac{T_{st}}{p_{st}} \left[ \frac{p_1^2 - p_2^2}{L \cdot \rho_r^{1-2\beta} \cdot T_{sr} \cdot z_{sr}} \right]^{\frac{0,5}{1-\beta}} \cdot D_u^{\frac{2,5-\beta}{1-\beta}} \quad (93)$$

$$\lambda_g = A \cdot Re^{-B} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = A^{-0,5} \cdot Re^{B/2} \quad (94)$$

Односно  $\alpha = A^{-0,5}$  и  $\beta = B/2$ . Тако нпр. за Реноарову једначину која важи за хидраулички 'гладак' режим даје се вредност одговарајућег коефицијента и експонента из табеле 1; коефицијент  $A=0,172$  а експонент  $B=0,18$ , односно да се закључити да је  $\alpha=2,411$  и  $\beta=0,09$ . Када се одговарајуће вредности коефицијената замене у једначину (93), добија се израз (95):

$$Q_{st} = \pi \cdot 2,411^{\frac{1}{1-0,09}} \left( \frac{1000 \cdot 8,31441}{116} \right)^{\frac{0,5-0,09}{1-0,09}} \frac{1}{2^{1-0,09}} \frac{1}{\eta^{1-0,09}} \frac{288,15}{101325} \left[ \frac{p_1^2 - p_2^2}{L \cdot \rho_r^{1-2 \cdot 0,09} \cdot 288,15 \cdot 1} \right]^{\frac{0,5}{1-0,09}} \cdot D_u^{\frac{2,5-0,09}{1-0,09}} \quad (95)$$

Односно количина протока кроз цев по Реноаровој једначини за гасовити флуид се може израчунати на основу једначине (96) која се добија сређивањем једначине (95).

$$Q_{st} = \frac{26,4415}{\eta^{0,0989}} \frac{288,15}{101325} \left[ \frac{p_1^2 - p_2^2}{L \cdot \rho_r^{0,82} \cdot T_{sr} \cdot z_{sr}} \right]^{\frac{1}{1,82}} \cdot D_u^{4,82/1,82} \quad (96)$$

За Панхандлову једначину А која важи за хидраулички 'гладак' режим даје се вредност одговарајућег коефицијента и експонента из табеле 1; коефицијент  $A=0,08475$  а експонент  $B=0,1461$ , односно да се закључити да је  $\alpha=3,435$  и  $\beta=0,07305$ . Када се одговарајуће вредности коефицијената замене у једначину (93), добија се израз (97):

$$Q_{st} = \frac{40,297}{\eta^{0,0788}} \frac{288,15}{101325} \left[ \frac{p_1^2 - p_2^2}{L \cdot \rho_r^{0,8539} \cdot T_{avr} \cdot z_{avr}} \right]^{0,5394} \cdot D_u^{2,6182} \quad (97)$$

Слично се може урадити и за остале једначине Блазијусовог типа (Табела 1). Такође, у случају постојања ламинарног хидрауличког режима протока, Хаген-Поазејлова једначина (10) се може написати као (98):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_L}} = 0,125 \cdot \text{Re}^{0,5} \quad (98)$$

Односно унесећи вредности за  $\alpha=0,125$  и  $\beta=0,5$  у једначину (93), добија се (99):

$$Q_{st} = \frac{0,0122718}{\eta^2} \frac{288,15}{101325} \left[ \frac{p_1^2 - p_2^2}{L \cdot T_{sr} \cdot z_{sr}} \right] \cdot D_u^4 \quad (99)$$

У многим случајевима је zgodније користити претходно приказану релацију (92) пошто у њу директно може да се укључи Дарсијев фактор хидрауличке пропусности.

Тако у случају прорачуна пада притиска у цевоводу када се Дарсијев коефицијент хидрауличког отпора рачуна преко Колбрукове једначине (35) важи израз (100):

$$Q_{st} = -2 \cdot \log \left( \frac{2,51}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda_{dt}}} + \frac{\varepsilon}{3,71 \cdot D_u} \right) \frac{\pi \cdot \sqrt{1000 \cdot R \cdot D_u^5} \cdot z_{st} \cdot T_{st}}{\sqrt{29 \cdot 16} \cdot p_{st}} \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{L \cdot \rho_r \cdot T_{sr} \cdot z_{sr}}} \quad (100)$$

Односно најбоље је прво израчунати вредност Дарсијевог коефицијента хидрауличке пропусности по Колбруку (35), па тако израчунату вредност уврстити у релацију (92) као бројну вредност (101), чиме се претходни израз упрошћава:

$$Q_{st} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} \frac{\pi \cdot \sqrt{1000 \cdot R \cdot D_u^5} \cdot z_{st} \cdot T_{st}}{\sqrt{29 \cdot 16} \cdot p_{st}} \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{L \cdot \rho_r \cdot T_{sr} \cdot z_{sr}}} \quad (101)$$

У случају коришћења Алтшуљове релације (34) важи израз (102):

$$Q_{st} = \left( \frac{\varepsilon}{D_u} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{\frac{1}{8}} \frac{\pi \cdot \sqrt{1000 \cdot R \cdot D_u^5} \cdot z_{st} \cdot T_{st}}{\sqrt{29 \cdot 16 \cdot 0,11} \cdot p_{st}} \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{L \cdot \rho_r \cdot T_{sr} \cdot z_{sr}}} \quad (102)$$

На начин сличан овде приказаном се генеришу и једначине за пад притиска у гасоводима које важе и за потпуно турбулентан режим. У случају потпуно турбулентног хидрауличког режима могуће је уместо фон Краманове једначине користити Колбрукову једначину за делимично турбулентан режим, а уместо Шифринсонове, Алтшуљову једначину чиме се не уноси грешка у прорачун имајући у виду да је фон Карманова једначина (30) гранични случај Колбрукове (35), а Шифринсонова (33) гранични случај Алтшуљове једначине (34).

### Б.9. Реноарова једначина прилагођена за гасоводне системе

Једна од најчешће коришћених једначина које се користе приликом прорачуна параметара протока гаса у градским дистрибутивним мрежама ниског и средњег притиска је Реноарова једначина (103) (Renouard 1952):

$$\lambda_g = 0,172 \cdot \text{Re}^{-0,18} \quad (103)$$

Ова једначина припада једначинама Блазијусовог типа које важе за хидраулички 'гладак' режим и посебно је погодна када су цеви кроз које протиче гас од полиетилена што је у последње време најчешће и случај. Ове цеви су као што је раније већ наглашено, практично глатке. Реноарова једначина се може написати и у облику у коме је експлицитно изражен Дарсијев коефицијент хидрауличке пропусности (104):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_g}} = 2,4412 \cdot \text{Re}^{0,09} \quad (104)$$

Претходно је већ дата Реноарова једначина прилагођена за проток гаса (96). По Коелју и Пинху (Coelho-Pinho 2007), она даје најбоље резултате када је Рејнолдсов број  $\text{Re} < 4 \cdot 10^6$ . За веће вредности Рејнолдсовог броја, Реноар препоручује нешто другачије коефицијенте (105):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,1822 \cdot \text{Re}^{0,10} \quad (105)$$

Овиме се добија за око 9% већи Дарсијев коефицијент пропусности у односу на уобичајену Реноарову једначину (104). Реноар такође даје и једначину која се односи на унутрашње гасне инсталације (106):

$$\lambda = 0,21 \cdot \text{Re}^{-0,2} \quad (106)$$

Ова једначина (106) важи у случајевима када је  $\text{Re} < 10^4$ . Применом једначине (106) добијају се више вредности Дарсијевог фактора хидрауличног отпора у односу на добијене применом једначине (103).

У једначини (96) се према Реноару може узети да је вредност динамчког коефицијента вискозности константа,  $\eta = 1,0757 \cdot 10^{-5}$  Pa's. Претпоставка је такође и да је средња температура у гасоводу једнака стандардној температури, тј.  $T = 288,15$  K, као и да је средњи фактор компресибилитета  $Z = 1$ . На овај начин преправљена једначина (96) гласи (107):

$$Q_{st} = 0,010367 \left[ \frac{p_1^2 - p_2^2}{L \cdot \rho_r^{0,82}} \right]^{1/1,82} \cdot D_u^{4,82/1,82} \quad (107)$$

Ова једначина се често даје у техничкој литератури у много познатијем облику (108):

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{4088 \cdot Q_{st}^{1,82} \cdot L \cdot \rho_r^{0,82}}{D_u^{4,82}} \quad (108)$$

Или у још познатијем облику (109):

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{4810 \cdot Q_{st}^{1,82} \cdot L \cdot \rho_r}{D_u^{4,82}} \quad (109)$$

Реноар наводи да се узима да је константан како динамички  $\eta$ , тако и кинематички вискозитет гаса  $\nu$  природног гаса, и то  $\eta=1,0757 \cdot 10^{-5}$  Pa·s, а  $\nu=1,2 \cdot 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s. Пошто се кинематички вискозитет дефинише преко динамичке вискозности и густине гаса као (110):

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{\eta}{\nu} = \frac{1,075 \cdot 10^{-5}}{1,2 \cdot 10^{-5}} = 0,89 \text{ kg/m}^3 \quad (110)$$

Следи да је и густина гаса константа, тј. гас се понаша слично течности, односно за мале падове притиска какви владају у градској гасоводној мрежи средњег притиска ( $p=4 \cdot 10^5$  Pa), проток гаса се сматра некомпресибилним. Наравно ову претпоставку нестишљивости не треба схватити буквално већ треба читаву ствар сагледати шире (Brkić 2009i). Једначина (109) се до сада најбоље показала када треба прорачунати падове притиска у градским гасоводним мрежама средњег притиска када су оне изграђене од полиетиленских цеви што најчешће и јесте случај. Ова једначина (109) ће се стога најчешће и користити у овој дисертацији када се разматра проток гаса у гасоводној мрежи.

Уколико се дистрибуира гас другачије кинематске вискозности  $\nu_1$ , тада се једначина може ради веће тачности помножити корекционим фактором  $(\nu/\nu_1)^{0,18}$ , тј.  $(1,2 \cdot 10^{-5}/\nu_1)^{0,18}$ . Ова корекција нема практични утицај те се овде напомиње чисто као академска расправа. Реноар је цео производ  $\rho_r(\nu/\nu_1)^{0,18}$  назвао коригована густина гаса.

Да би се боље разумела математичка поједностављења које је Реноар спровео потребно је поћи од дефиниције Рејнолдсовог броја (111):

$$\text{Re} = \frac{\nu \cdot D_u \cdot \rho}{\eta} = \frac{\frac{4 \cdot Q}{D_u^2 \cdot \pi} \cdot D_u \cdot \rho}{\eta} = \frac{4 \cdot Q}{D_u \cdot \pi \cdot \nu} = \frac{4 \cdot Q_{st}}{D_u \cdot \pi \cdot \nu \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_{st}}\right)} \quad (111)$$

Односно ако је притисак у мрежи око  $4 \cdot 10^5$  Pa, тада је члан  $(\rho/\rho_{st} \approx 4/1)$ , односно једначина (111) постаје (112):

$$\text{Re} = \frac{4 \cdot Q}{D_u \cdot \pi \cdot \nu} = \frac{4 \cdot Q_{st}}{D_u \cdot \pi \cdot \nu \cdot \left(\frac{4}{1}\right)} = \frac{Q_{st}}{D_u \cdot \pi \cdot \nu} \quad (112)$$

Корекциони фактор  $(\nu/\nu_1)^{0,18}$  сада може да се напише као (113):

$$\left(\frac{\eta/\rho_{st}}{1,2 \cdot 10^{-5}}\right)^{0,18} = \left[\frac{\eta/(\rho_r \cdot \rho_{st, \text{vaz}})}{1,2 \cdot 10^{-5}}\right]^{0,18} = \left[\frac{\eta/(1,28 \cdot \rho_r)}{1,2 \cdot 10^{-5}}\right]^{0,18} \quad (113)$$

На основу претходно изнетог може се проценити грешка која се уноси тако што се уместо једначине (108) користи њен нешто простији облик (109), на основу (114):

$$\frac{(p_1^2 - p_2^2)_{(109)} - (p_1^2 - p_2^2)_{(108)}}{(p_1^2 - p_2^2)_{(108)}} = \frac{4810 \cdot \rho_r \cdot \left(\frac{\eta/\rho_{st}}{1,2 \cdot 10^{-5}}\right)^{0,18}}{4088 \cdot \frac{\eta^{0,18} \cdot \rho_r^{0,82}}{(1,0757 \cdot 10^{-5})^{0,18}}} - 1 = \frac{4810}{4088} \left(\frac{1,0757}{1,2}\right)^{0,18} \cdot \left(\frac{1}{1,28}\right)^{0,18} - 1 = 0,10354 \quad (114)$$

Односно грешка је око 10%. Реноар је радио са мањом вискозности гаса, односно са  $v=2,2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  што узрочно претпоставља и нижу вредност за густину гаса од само  $0,5 \text{ kg/m}^3$ . Што је нереално мало када је природни гас у питању. Са овако смањеном густином гаса процењена грешка коју уноси примена једначине (109) уместо (108) пада на само 1%. Реално треба поредити једначине (108) и (109) на основу (115):

$$\frac{(p_1^2 - p_2^2)_{(109)} - (p_1^2 - p_2^2)_{(108)}}{(p_1^2 - p_2^2)_{(108)}} = \frac{\frac{4810 \cdot Q_{st}^{1,82} \cdot L \cdot \rho_r}{D_u^{4,82}}}{\frac{4088 \cdot Q_{st}^{1,82} \cdot L \cdot \rho_r^{0,82}}{D_u^{4,82}}} - 1 = \frac{4810}{4088} \left( \frac{0,84}{1,28} \right)^{0,18} - 1 = 0,09 \quad (115)$$

На крају треба напоменути да постоји и Реноарова једначина која се примењује у случају протока гаса у дистрибутивним мрежама под врло ниским притиском какав је био случај градског гаса који се практично више не користи (116):

$$Q_{st} = 8,614 \cdot \left[ \frac{p_1 - p_2}{L \cdot \rho_r^{0,82}} \right]^{1/1,82} \cdot D_u^{4,82/1,82} \quad (116)$$

#### Б.10. Завршне напомене о протоку флуида кроз цевоводе

Све претходно приказане релације у раду су корелисане са Модичевим дијаграмом (Слика 2). Међутим пре настанка овог дијаграма, истраживачи су само наслућивали како се мења коефицијент хидрауличног отпора у зависности од неких параметара који још нису били довољно истражени. Тако нпр. Рикс (Gas Engineers Handbook 1974) даје коефицијент хидрауличног отпора као константу (117):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 7,36 \quad (117)$$

Пол још 1851. године (Gas Engineers Handbook 1974, Schroeder 2002) даје релацију за одређивање коефицијента хидрауличног отпора који зависи од пречника цеви (Табела 3):

Табела 3. Вредност коефицијента прпусности гасовода, односно коефицијента хидрауличног отпора према Полу		
Називни пречник цеви <sup>а</sup>	$1/\sqrt{\lambda}$	$\lambda$
¾"-1"	4,78	1,641
1 ¼"-1 ½"	5,255	1,559
2"	5,735	1,483
3"	6,215	1,413
4"	6,45	1,381
<sup>а</sup> 1"=0,0254 m		

Шпицглас 1912. године даје једначину (118) за прорачун дистрибутивних мрежа гаса ниског притиска какве су биле мреже којима се дистрибуирао тзв. градски гас, односно гас добијен из угља (Gas Engineers Handbook 1974, Schroeder 2002):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{1 + \frac{88,5}{10,9361 \cdot D_u} + 1,1811 \cdot D_u} \quad (118)$$

У овој једначини је коефицијент хидрауличког отпора у функцији пречника цеви (што је пречник већи, коефицијент хидрауличког отпора (119) је мањи и обрнуто, односно што је пречник већи, коефицијент пропусности  $1/\sqrt{\lambda}$  је већи.

$$\lambda = \frac{1 + \frac{1}{10,9361 \cdot D_u} + 1,1811 \cdot D_u}{88,5} \quad (119)$$

Шпицгласова једначина је за своје доба била изузетна, упркос томе што постоје опсежи где при константној храпавости (која се и не узима у обзир у конкретној релацији) са повећањем пречника цеви расте и коефицијент хидрауличког отпора, што суштински није тачно. Вероватно ове области нису биле занимљиве за гасоводе тог доба (претежно градски гас ниског притиска).

Нешто боља релација је Вејмутова исто из 1912. године (Schroeder 2002). Ова једначина (120) и (121) је такође само у функцији пречника цеви, док се храпавост, као и режим струјања занемарују.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 10,3196 \cdot D_u^{1/6} \quad (120)$$

$$\lambda = \frac{0,0094}{D_u^{1/3}} \quad (121)$$

Ова једначина не показује нелогичности попут претходно приказане Шпицгласове једначине. Уз одређена прилагођења ова једначина је примењива и данас, и из аутору непознатог разлога ова једначина је незаобилазна у нафташкој пракси у Србији иако се на основу ње не може закључити који је режим у цевоводу. Једначина се примењује углавном за транспорт нафте, тј. течног флуида, а не гаса.

Дају се још две сличне једначине Унвина (122) и (123) и Олифанта (124), које такође стављају коефицијент хидрауличког отпора само у зависности од пречника цеви (Gas Engineers Handbook 1974).

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\frac{56,75}{1 + \frac{0,04285}{D_u}}} \quad (122)$$

$$\lambda = \frac{1 + \frac{0,04285}{D_u}}{56,75} \quad (123)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 6,5 + 1,3584 \cdot \sqrt{D_u} \quad (124)$$

Следећа релација (125) коју даје Фриче узима у обзир и Рејнолдсов број, што је искорак напред (Gas Engineers Handbook 1974):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 3,3390 (\text{Re} \cdot D_u)^{0,071} \quad (125)$$

Изузимајући за тренутак разматрање саме тачности добијених бројчаних вредности резултата на основу релација (118-125) и њихове практичне употребљивости, сваки пажљивији читалац ће одмах приметити суштинску физичку нетачност ових релација. Наиме, имајући у виду да је коефицијент хидрауличног отпора неименовани број, а да у свакој од ових једначина (118-125) фигурише пречник који је изражен у метрима (па дигнут на неки експонент) поставља се логичко питање где се он губи пошто нема са чиме да се скрати. Велика је вероватноћа да се одговор на ово питање крије у коефицијентима који фигуришу у овим једначинама, тј. проблем се тиче конверзионих фактора. У таквој ситуацији, чак и једначина Рикса (117) и Пола (Табела 7) изгледа прихватљивије. Тако, нпр. за транспорт нафте је чак и на први поглед и у овом случају без детаљне анализе, далеко прихватљивија релација Ланжа (126) (Шашић 1990) у поређењу са Вејмутовом (120) и (121):

$$\lambda = 0,02 \cdot \frac{1,7}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (126)$$

Рихтер даје за челичне цеви релацију (127) у којој фигуришу вискозитет гаса и проток:

$$\lambda = 0,249 \cdot \mu^{0,148} \cdot Q^{0,125} \quad (127)$$

Рихтерова једначина (127), као и једначина (128) се односе на проток гаса кроз унутрашње инсталације у зградама. Гајић и Исаков за бакарне цеви дају релацију (128) сличну Рихтеровој (Прстојевић et al 2005):

$$\lambda = 0,249 \cdot \frac{\mu^{0,148}}{\sqrt[3]{Q}} \quad (128)$$

На овоме месту аутор ове дисертације се не би усудио да даје мишљење да ли једначине у оваквом облику представљају побољшање, пошто се у своме истраживачком раду није бавио разматрањем протока гаса у унутрашњим инсталацијама у зградама.

Основни минимални предуслов за сваку савремену релацију којом се прорачунава коефицијент хидрауличног отпора је да је у корелацији са Модиевим дијаграмом (Слика 2). Односно боље речено, у свакој савременој једначини коефицијент хидрауличног отпора мора бити у функцији Рејнолдсовог броја и релативне храпавости у случају делимично турбулентног режима, односно само Рејнолдсовог броја за ламинарни и хидраулички 'гладак' турбулентан режим, тј. само релативне храпавости у случају потпуно турбулентног режима. Знајући вредности ових параметара, може се увек одредити који је режим протока у цевоводу. Познат проток у цевоводу треба да служи за прорачун брзине, на основу познатог пречника. Даље, овако прорачуната брзина служи за прорачун Рејнолдсовог броја (уз познат кинематски вискозитет, односно уз познат динамички вискозитет и густину гаса), или јасније речено не треба стављати нпр. сам проток у релацију за прорачун коефицијента хидрауличног отпора јер се тиме прикривају важни подаци који касније могу бити од важности за даља разматрања.

Одређивање хидрауличног коефицијента отпора није сам себи циљ, већ служи за прорачун падова притисака, односно за прорачун протока гаса у цевоводу. Једначине које служе за то треба да буду уређене тако да у њима фигуришу релевантне физичке величине изражене у SI јединицама без умножака (конверзионих фактора у оквиру самог SI

система; нпр. пречници цеви у m а не у mm, дужине цеви у m а не у km) како је и приказано у претходној глави.

Напори истраживача у данашње време не треба да буду усмерени у правцу преуређења Колбрукове једначине (31) у експлицитан облик пошто се она може у данашње време врло лако решити у свом изворном имплицитном облику . Приступ Озгера и Јилдрима је посебно занимљив, пошто они користе неуро-фази приступ за одређивање коефицијента хидрауличног отпора (Özger-Yıldırım 2009, Yıldırım-Özger 2009).

Неке сличности водоводних система са гасоводима се може проучати из бројних чланака доступних у литератури (Liou 1998, Travis-Mays 2007, Valiantzas 2005, Yıldırım-Özger 2009, Boulos 2006, Martorano 2006, Moghazi 1998, Pioge 2007, Scobey 1966).

Неке сличности са водоводним и гасоводним мрежама прстенастог типа показују и вентилациони системи у зградама и рудницима. Међутим у овој дисертацији се овај проблем неће детаљније разматрати. Добри примери за рудничке вентилационе системе се могу наћи у књизи Лилића и Кузмановића (1993) а за вентилационе системе у зградама у раду Аинслеја (Aynsley 1997) и Мек Ферсона (McPherson ?).

#### **Б.11. Литературне напомене о протоку флуида кроз цевоводе**

Бројна литература је консултована и коришћена при писању овог поглавља дисертације (поглавље Б). Аутор је пошао од чињенице да би текст био изузетно пренатрпан литературним наводима да се увек позивало на коришћену литературу у тексту. Дакле, у самом тексту је наведена само основна литература, с тиме да се на овом месту даје детаљан осврт на коришћену литературу. Из руске литературе када су у питању једначине које покривају разне режиме је коришћена књига на енглеском језику аутора Некрасова из 1969 под називом 'Hydraulics for Aeronautical Engineers' (Nekrasov 1969). Коришћени су материјали са сајта <http://gidravl.narod.ru/gidrosopr.html> где су изложена предавања од којих је посебно занимљива лекција 4 под називом 'Гидравлические сопотивления'. Рад Абдолахија и сарадника даје границе између хидрауличких режима (Abdolahi et al 2007), исто као и рад Модија (Moody 1944), односно Ђулијанија (Gulyani 1999). У раду Ђулијанија се даје и приказ различитих једначина за различите хидрауличке режиме. У раду Абдолахија и сарадника се дају и конкретне једначине за поједине режиме укључујући и апроксимације Колбрукове једначине (31). Такође се дају појашњења око примене ових једначина у гасоводима. Рад Афзала (Afzal 2007) и Афзала и сарадника (Afzal et al 2007) може послужити да се стекне добар увид у једначине тзв. power law модела који се користи при хидраулички 'глатком' режиму протока (Koutsoyiannis 2008), укључујући и разлике које се јављају између протока у цевима и тзв. отвореног тока какав влада у нпр. рекама. Сличан приказ дају и Ђорђевић и сарадници (Djordjević et al 2004). Извесни проблеми везани за разлику између Дарсијевог и Фанинговог коефицијента, као и у примени пречника, односно полупречника су такође дискутовани у литератури (Chen 1979, Chen 1980, Moody 1944, Concha 2008, Brkić 2009b, Rao-Kumar 2007). Рад Алена и сарадника даје нови приступ у проучавању протицања флуида кроз цеви како у



хидраулички 'глатким' тако и у храпавим цевима (Allen et al 2007). Бројни су радови у часописима Краљевског друштва из Лондона (Royal Society) који се баве овом темом. Још је Рејнолдс 1883 објавио свој рад у којем је дефинисао појам Рејнолдсовог броја у часопису *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (Reynolds 1883b). Исте године је пре овога рада објавио његову скраћену верзију у часопису *Proceedings of the Royal Society* (Reynolds 1883a). Корисни су били и радови Рејнолдса из 1894. и 1895. (Reynolds 1894, 1895). Видети и рад Екхардта објављен поводом 125 година Рејнолдсовог рада (Eckhardt 2009). Екхард даје у својим радовима занимљиве приказе о томе како проток у цеви постаје турбулентан (Eckhardt-Schneider 2008, Eckhardt 2008). Сличан приказ се даје и у раду Робинсона (Robinson 1983). Рад Калида и Лијанг-Бијаоа даје упрошћену једначину која се користи за предвиђање пада притиска у цевоводу, односно за предвиђање количине протока (Khalid-Liang-Biao 1995). Сличан приступ има и Дуранд у свом раду (Durand 1997). Баренблат и сарадници дају нови приказ експерименталних података који се тичу турбулентног протока флуида у цевима (Barenblatt et al 1997). Бари у своме раду даје један нови приказ апроксимативног рачунања имплицитно задатих релација везаних за проблем протока флуида кроз цеви (Barry 2008). Сличан је и рад Бузелија (Buzzelli 2008). Поред већ наведених примена Ламберт  $W$  функције, Бари са сарадницима помоћу ове функције ефикасно решава проблем инфилтрације воде у земљиште (Barry et al 1993), као и Парланге са сарадницима (Parlange et al 2002). Сличан приступ се може применити и приликом описивања кретања нафте, воде и гаса кроз порозну средину лежишта (Ewing et al 1999). Корисно је погледати и рад Барија и сарадника (Barry et al 1999). Каилол у своме раду даје приказ примене Ламберт  $W$  функције на решавање проблема из области класичне статистичке механике (Caillol 2003). Наравно што се тиче решавања саме Ламберт  $W$  функције најкориснији су били већ раније поменути радови Бојда (Boyd 1998), као Барија и сарадника (Barry et al 2000, 2002). О самој Ламберт  $W$  функцији корисни су радови Корлеса (Corless et al 1996) и Рајта (Wright 1959). Неке посебности везане за проток флуида кроз цеви великог пречника се дају у раду Бомбарделија и Гарсије (Bombardelli-García 2003). Радови Брауна дају одличан приказ историјског прегледа настанка Дарси-Вајсбахове једначине (Brown 2002a, b). Калзета даје оригиналан начин одређивања коефицијента хидрауличног отпора на основу Хајзенбергове хипотезе о којој се неће дискутовати у овој дисертацији (Calzetta 2009). Одређене везе између коефицијента хидрауличног отпора и топлотних ефеката везаних за зидове цеви дају се у раду Цејлана и Келбалијева (Ceylan-Kelbaliyev 2003). Рад на сличну тему су објавили и Черчил и Зајић (Churchill-Zajić 2002), Колин и сарадници (Colin 2005), Госелин (Gosselin 2006), Ке и Ти (Ke-Ti 2000), Корниенко (Kornienko 1995). Черчил је поред приказане апроксимације Колбрукове функције дао значајне доприносе на пољу протока флуида кроз цеви (Churchill 2000). Кордеро у своме раду даје побољшане једначине за одређивање Дарсијевог коефицијента хидрауличног отпора (Cordero 2008). Занимљив приказа протока не-Њутновског флуида даје се у раду ел-Емам и сарадника (El-Emam et al 2003). Ел-Емам и сарадници дају и практичан начин за одређивање коефицијента хидрауличног отпора протока гаса на конкретном примеру једног гасног поља из Египта (El-Emam 1997). Герстен и сарадници дају у свом раду нову формулу за прорачун коефицијента хидрауличке пропусности за цевоводе на гасним пољима (Gersten et al 2000), као и Товлер и Поуп (Towler-Pope 1994). Мокхатаб даје нови начин прорачун

хидрауличког коефицијента отпора при протоку гаса (Mokhatab 2002a), као и за случај гасокондензатних система (Mokhatab 2002b). Рад Јанга се бави проценом пада притиска у вертиланним експлоатационим цевоводима (Yang 1995). Фарсхад и сарадници дају нови метод за мерење саме храпавости цеви као и начин моделирања (Farshad et al 2001). Овом темом се бави и врло користан рад Слетфјердинга и сарадника (Sletfjerding et al 1998). Тејлор и сарадници коментаришу како је схватан утицај храпавости на хидраулички режим у прошлости и дају своје коментаре како предвиђају да ће се проблем посматрати у будућности (Taylor et al 2006). Приказ динамичког понашања гаса у гасоводима високог притиска даје се у раду Гатоа и Енрикеса (Gato-Henriques 2005), с тим да се у овој дисертацији проучавање протока гаса даје само за релативно ниске притиске, тј. за  $4 \cdot 10^5$  Pa. У раду Хагера се даје занимљива дискусија у вези Манингове једначине која се примењује за проток воде (Hager 2006). Хактанир и Ардичоглу се у свом раду баве моделирањем Дарсијевог коефицијента хидрауличког отпора (Haktanir-Ardıçlıoğlu 2004). Нови начин сагледавања утицаја релативне храпавости на коефицијент хидрауличког отпора дају Хервиг и сарадници (Herwig et al 2008), Мек Кеон и сарадници (McKeon et al 2004a, b, 2005), Робертсон и сарадници (Robertson et al 1968), Шпригс (Spriggs 1973a, b), Загарола и Смитс (Zagarola-Smiths 1998), као и Шоклинг и сарадници (Shockling et al 2006). Изгуердо са сарадницима даје модел у којем се испитује утицај цеви на понашање водоводног система у различитим условима (Izquierdo et al 2008). Киди је у свом раду проучавао Колбрукову једначину (Keady 1998). Кентиш је проучавао утицај корозије на храпавост цеви (Kentish 2007). Промене у протоку услед различитих врста храпавости изучавају у свом раду Шан и сарадници (Shan et al 1998). Квак и сарадници идентификују рачунске проблеме везане за проток вискозног некомп्रेसибилног флуида (Kwak et al 2005). Ла Барбера даје поређење техничких система за протоком флуида у организму животиња (LaBarbera 1990). Губитке енергије у цевоводним системима проучавали су Лахиоуел и Хадад (Lahiouel-Haddad 2002) као и Лахиоуел и сарадници (Lahiouel et al 2005). Лангеландсвијк са сарадницима разматра посебности хидрауличких отпора у челичним цевима (Langelandsvik et al 2008), док Сукхарев са сарадницима (Sukharev et al 2005), као и фон Бернут (von Bernuth 1990) разматрају исти проблем за полиетиленске цеви. Малин у својим радовима даје приказ протока Бингхамовог пластичног флуида у цевима (Malin 1997a, b). Јо и Синг дају у свом раду два практична метода за прорачун хидрауличког коефицијента отпора у цевима које су заступљене на тржишту (Yoo-Singh 2005). Сличан приступ је и у раду Сабланија и сарадника али уз примену неуронских мрежа (Sablani et al 2003). Неуро-фази математички модел за праћење параметара протока природног гаса даје се у раду Олунлоја и сарадника (Olunloyo et al 2004). Неуронску мрежу за неитеративно одређивање коефицијента користе Шаја и Саблани у свом раду (Shayya-Sablani 1998). Јухонг и Вехинг користе неуронску мрежу да предвиде коефицијент хидрауличког отпора у случају протока флуида у отвореним токовима (Yuhong-Wenxin 2009). Ојанг и Азиз разматрају стационарни режим протока гаса у цевима (Ouyang-Aziz 1996). Изузетан приказ расположивих једначина за различите хидрауличке режиме се даје у раду Шредера (Schroeder 2002). Неке детаље о Модиијевом дијаграму видети у раду Верме (Verma 2008). Јен даје занимљив рад о хидрауличким отпорима у отвореним токовима (Yen 2002).

На крају никако не треба закључити да је питање одређивања отпора трења приликом протока флуида довољно решена ствар. Бројна истраживања се и даље спроводе (Zagarola et al 1997, Cipra 1996).

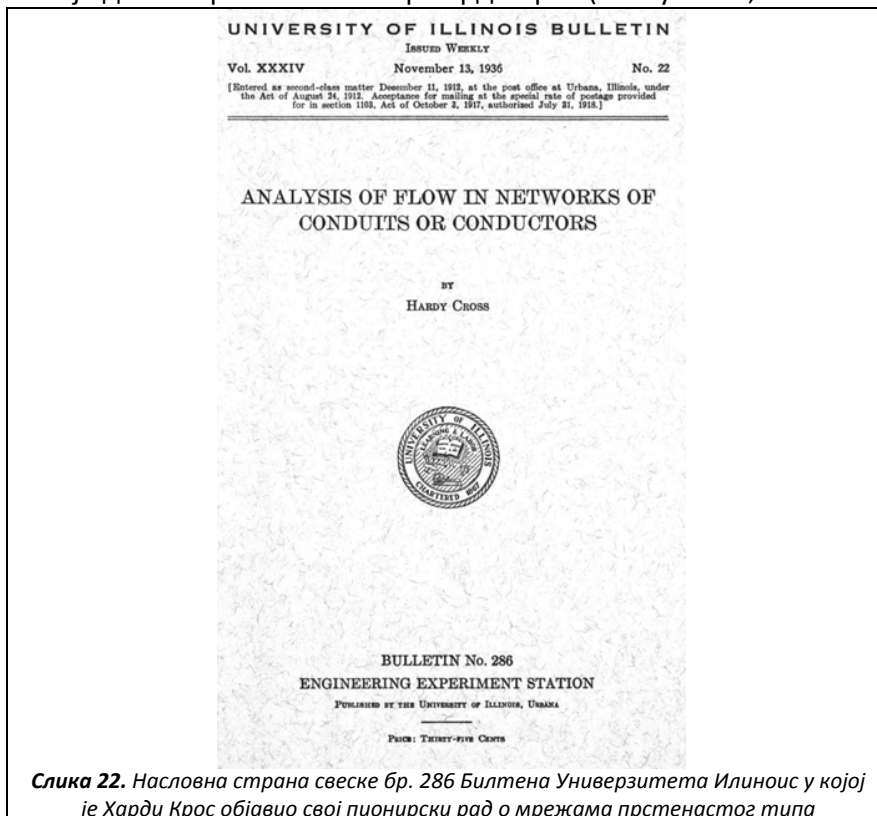
## **В. Дистрибуција гаса цевоводима; прорачун стационарне расподеле протока у задатој мрежи**

Гас се најчешће у урбаним условима домаћинствима дистрибуира путем градске дистрибутивне мреже. Ова мрежа је обично прстенастог типа. Данас се у домаћинствима, као и у топланама користи првенствено природни гас који је по свом саставу углавном метан. Међутим некада се у градским условима, а посебно за осветљење користио на вештачки начин добијен гас из угља. Поступком гасификације угља у градским гасарама кроз процес непотпуног сагоревања угља углавном се добијао угљенмоноксид. Овакав гас се називао градским гасом, а уколико је процес вођен тако да се у саставу гаса добије и нешто већи проценат водоника, такав гас је био познат и као водени гас. Ови вештачки добијени гасови су данас само од историјског значаја. Гасоводи за дистрибуцију гасова добијених из угља су радили на знатно нижим притисцима него данашњи дистрибутивни гасоводи којима се дистрибуира природни гас. Ова чињеница је важна пошто је при оваквом, много мањем радном притиску потребан знатно већи пречник цеви да би се пропустила иста количина гаса. При преласку са градског гаса на природни гас јавио се и проблем са горионцима пошто није иста топлотна моћ те две врсте гаса, односно није исти Вобеов број. Поред овога градски гас самим тим што је добијен из угља садржи више смоластих материја које су склоне таложењу по унутрашњим зидовима цеви. При преласку на природни гас јавио се такође проблем у заптивању код ових доста старих система јер је временом природни гас испирао смолу са спојева цеви. Ипак је давно прошло времена када се дистрибуирао градски гас тако да су данашњи системи обично новијег датума, тј. изграђени су баш за дистрибуцију природног гаса. Гасна дистрибутивна мрежа природног гаса ради на притиску од око  $4 \cdot 10^5$  Pa abs. и изграђена је од полиетиленских цеви. Као што је већ претходно било речено, овакве цеви су саме по себи практично глатке, те је проток гаса у њима првенствено у хидраулички 'глатком' режиму. Из раније изнете дискусије најповољнија једначина која ће се користити је упрошћена Реноарова једначина за проток гаса (109).

Веома слична концепција као код гасоводних мрежа прстенастог типа се примењује и у водоводним системима. За разлику од гасовода који користе само енергију притиска који се редукује у гасној мерно-регулационој станици (MPC) на  $4 \cdot 10^5$  Pa abs, у водоводном систему се користи пумпе за пумпање воде кроз систем. У гасоводној дистрибутивној мрежи се гас услед релативно малог пада притиска може третирати као нестишљив флуид, тј. као вода. Наравно ово не треба схватити дословно, пошто се неке чињенице које се тичу природног гаса као гасовитог флуида морају узети у обзир што се већ примењује коришћењем упрошћене Реноарове једначине прилагођене за проток гаса (109). Уколико се у неким примерима у даљем тексту буде обрађивао водоводни систем ради поређења са гасоводним, тада ће се вршити упоређивање само падова притиска узроковано хидрауличким отпорима, док се неће вршити прорачун потребне енергије за пумпање воде. Пошто је вода течни флуид, у водоводу влада углавном прелазни турбулентан режим па ће се користити Колбрукова једначина (35) за одређивање

Дарсијевог коефицијента хидрауличког отпора, као и Дарси-Вајсбахова формула (3) за одређивање пада притиска при протоку течног флуида.

Најстарији и практично први метод за прорачун протока флуида у дистрибутивној мрежи прстенастог типа је дао амерички инжењер Харди Крос (Hardy Cross; 1885-1959).



Слика 22. Насловна страна свеске бр. 286 Билтена Универзитета Илиноис у којој је Харди Крос објавио свој пионерски рад о мрежама прстенастог типа

Харди Крос је био грађевински инжењер, предавао је на Универзитету Браун (Brown), Универзитету Илиноиса (Illinois), а каријеру је завршио на месту шефа грађевинског одсека Универзитета Јејл (Yale). Једно време је радио и у грађевинским предузећима. Познат је по развоју првог ефикасног метода прорачуна статички неодређених грађевинских конструкција од пренапрегнутог бетона<sup>е</sup> (Cross 1930, 1932). Статички неодређене конструкције су биле основна област интересовања Харди Кроса, тако да колико год да је чувен по развоју првог употребљивог метода за прорачун протока флуида кроз цевоводне прстенасте мреже, можда је још познатији по првом ефикасном методу који је омогућавао прорачун статички неодређених носача од пренапрегнутог бетона. Метод прорачуна расподеле протока флуида у цевоводној мрежи са прстеновима је једини рад Харди Кроса из ове области као што и сам Харди Крос напомиње у овом раду (Cross 1936) објављеном 13. новембра 1936. године у Билтену инжењерске експерименталне станице Универзитета у Илиноису бр. 286, 34(22) под називом „Анализа протока мрежама водова или проводника“ (Слика 22). Треба напоменути да су се отприлике у исто време са овим пионерским радом Харди Кроса појавили и радови совјетских аутора В.Г. Лобачева и

<sup>е</sup> Сличан метод је нешто пре развио Чалишев, избеглица из новостворене Совјетске Русије, али га је објавио на српском што је прошло релативно незапажено (Чалишев 1922, 1923)

А.А. Андријашева. У западној литератури, као и у Србији овај први употребљив метод за прорачун расподела протока у цеводним прстенастим мрежама се уобичајено назива Харди Крос метода или понекад Кросова метода. Име Харди Кроса је толико везано за прорачун прстенастих мрежа да се данас свака метода која служи истој сврси као и оригинална метода назива именом Харди Кроса. У Русији се овакве методе називају методом А.А. Андријашева, а понегде и методом В.Г. Лобачева. Совјетска, а сада и руска стручна литература прави разлику између методе Лобачева која одговара суштински методи Харди Кроса и методе Андријашева у томе што појам прстена и контуре у методи Андријашева нису синоними док код методе Лобачева, односно Харди Кроса јесу, а о чему ће касније бити више речи у овој дисертацији (поглавље В.1.4.; видети и слику 35).

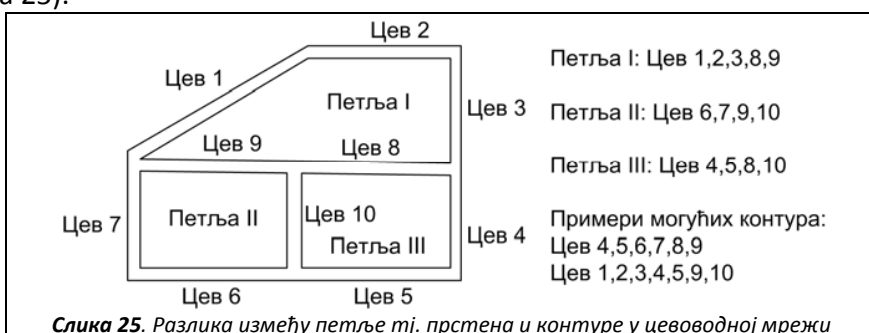
### В.1. Харди Крос метод (Single contour adjustment method)

Харди Крос метод је нумерички метод у коме се решење проблема добија итеративним поступком. Као што је већ речено, развио га је амерички инжењер Харди Крос. Све методе које ће се обрађивати у овој дисертацији подразумевају да су инерцијске силе мале, тј. не мења се густина флуида који протиче. Примењују се принципи одржања масе и енергије, односно важе први и други Кирхофов закон слично као и кад су у питању електрична кола (Слике 23 и 24).



Први Кирхофов закон суштински одговара закону одражања масе, док други одговара закону одржања енергије. Слични проблеми се код електричних кола могу решити неитеративним поступком због тога што је електрични отпор константан за дато коло, тј. не зависи од вредности струје или напона, односно боље речено са променом било напона или струје електрични отпор остаје непромењен. Код цевоводних система хидраулички отпор зависи од количине протока, односно од притисака, односно боље речено, као што је већ пре објашњено он је у функцији релативне храпавости и Рејнолдсовог броја. Релативна храпавост је константна за одређену цев док Рејнолдсов број зависи од брзине протока, односно од самог протока, који је опет зависан од разлике притисака, како је уосталом већ раније дискутовано. Први Кирхофов закон за цевоводне системе гласи: алгебарски збир количина флуида који уђе и изађе у једном чвору једнак је нули, док други Кирхофов закон гласи: алгебарски збир падова притисака (код гаса разлике квадрата притиска на улазу и излазу) за сваку затворену контуру коју формирају цеви једнак је нули. Под чвором се подразумева место спајања две или више

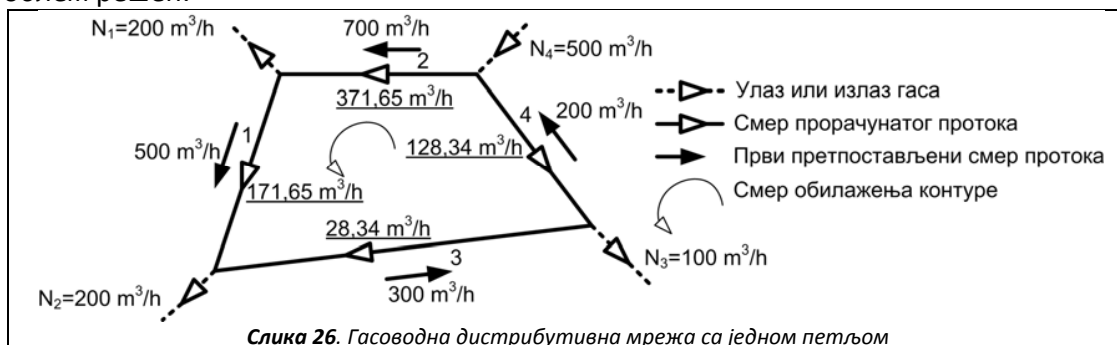
цеви док се под контуром подразумева систем цеви који затвара пун круг. Прстен или петља је најкраћи затворени систем цеви тако да се једна контура може састојати од елемената који припадају само једној али и могу бити и од елемената од две или више петљи (Слика 25).



Слика 25. Разлика између петље тј. прстена и контуре у цевоводној мрежи

Док се код Харди Крос методе и већине метода узима да је контура састоји само од једног јединог прстена, код методе М.М. Андријашева се уобичајено контура састоји из више прстенова а само изузетно од једног. О методи М.М. Андријашева ће бити више речи у даљем тексту (поглавље В.1.4.; видети и слику 35).

Пошто је проток флуида кроз цеви нелинеаран проблем мораће да се решава итеративним путем, за разлику од линеарног проблема протока струје кроз проводнике. На почетку итеративног процеса мора бити задовољен само услов по првом Кирхофовом закону док ће задовољење услова по другом Кирхофовом закону бити показатељ да је проблем решен.



Слика 26. Гасоводна дистрибутивна мрежа са једном петљом

Да би се решио проблем по Харди Крос методи потребно је да у свакој итерацији буде задовољен први Кирхофов закон тако да једначина чворова за мрежу са једном петљом са слике 26 за почетну дистрибуцију протока по гранама гласи (129):

$$\begin{pmatrix} -Q_1 + Q_2 - N_1 = 0 \\ Q_1 - Q_3 - N_2 = 0 \\ Q_3 - Q_4 - N_3 = 0 \\ -Q_2 + Q_4 + N_4 = 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad (129)$$

Једначина (129) је једначина чворова за прву расподелу протока, тј. она је улазна за прву итерацију. Наравно ова једначина чворова се током итеративног поступка мења али тако

да увек стриктно задовољава први Кирхофов закон. На крају прорачуна<sup>f</sup> ова једначина гласи (130):

$$\left\langle \begin{array}{l} -Q_1 + Q_2 - N_1 = 0 \\ Q_1 + Q_3 - N_2 = 0 \\ -Q_3 + Q_4 - N_3 = 0 \\ -Q_2 - Q_4 + N_4 = 0 \end{array} \right\rangle_{\text{VII}} \quad (130)$$

Улази и излази гаса по самим чворовима мреже (гледајући ка споља, тј. N на слици 26) су непроменљиви током прорачуна и бира се тако да буде задовољена максимална потрошња која може да се јави и која се назива пројектованом или пројектном потрошњом. Пречник и дужина цеви су такође непроменљиве током прорачуна. Мења се једино дистрибуција флуида по цевима која се тражи као резултат прорачуна. Ипак, може се поставити питање да ли систем једначина (129) може да буде решен неком од математемичких метода које се примењују уобичајено за решавање система алгебарских једначина. Овде ће се размотрити решење Крамеровим правилом<sup>g</sup> (131):

$$\begin{aligned} -Q_1 + Q_2 &= 200 \\ Q_1 - Q_3 &= 200 \\ Q_3 - Q_4 &= 100 \\ -Q_2 + Q_4 &= -500 \end{aligned} \quad (131)$$

Уколико постоји решење претходног система (131) оно је уједно и решење за расподелу протока гаса кроз цевоводни систем са слике 26. Детерминанта овога система се може написати као (132):

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (132)$$

Док су детерминанте непознатих, или тзв. детерминанте уз непознату (133):

$$D_Q = \begin{vmatrix} 200 & 1 & 0 & 0 \\ 200 & 0 & -1 & 0 \\ 100 & 0 & 1 & -1 \\ -500 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 200 & 0 & 0 \\ 1 & 200 & -1 & 0 \\ 0 & 100 & 1 & -1 \\ 0 & -500 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 200 & 0 \\ 1 & 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & -1 \\ 0 & -1 & -500 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 200 \\ 1 & 0 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & 0 & -500 \end{vmatrix} = -400 \quad (133)$$

Пошто је детерминанта система једнака нули ( $D=0$ ), а детерминанте непознатих су међусобно једнаке ( $D_Q=-400$ ) и различите од нуле, то значи систем има бесконачно много решења. Ово значи да постоји бесконачно много расподела протока флуида по цевима које ће задовољити први Кирхофов закон, али је само једна која задовољава и други Кирхофов закон. Такође значи да се прва претпостављена расподела протока по цевима може одабрати на бесконачно много начина.

<sup>f</sup> Видети у прилогу пример 14

<sup>g</sup> Следећи систем једначина одговара систему једначина (129), и то тако да су константни излази гаса из мреже и један улаз замењени бројном вредношћу (може бити нпр у  $m^3/h$ )



Једначина петљи за цевовод са слике 27 за иницијалну расподелу протока гласи (134):

$$\langle F(Q) \rangle_I = \langle \Delta \tilde{p}_1^2 + \Delta \tilde{p}_2^2 + \Delta \tilde{p}_3^2 + \Delta \tilde{p}_4^2 \rangle_I = \left\langle 4810 \cdot \rho_r \cdot \left( \frac{Q_1^{1,82} \cdot L_1}{D_1^{4,82}} + \frac{Q_2^{1,82} \cdot L_2}{D_2^{4,82}} + \frac{Q_3^{1,82} \cdot L_3}{D_3^{4,82}} + \frac{Q_4^{1,82} \cdot L_4}{D_4^{4,82}} \right) \right\rangle_I \quad (134)$$

За ову иницијалну расподелу протока није задовољен други Кирхофов закон у општем случају. Међутим, за коначну расподелу протока он је задовољен са приближном тачношћу која се унапред одабира те се може написати (135):

$$\langle F(Q) \rangle_{VII} = \langle \Delta \tilde{p}_1^2 + \Delta \tilde{p}_2^2 - \Delta \tilde{p}_3^2 - \Delta \tilde{p}_4^2 \rangle_{VII} = \left\langle 4810 \cdot \rho_r \cdot \left( \frac{Q_1^{1,82} \cdot L_1}{D_1^{4,82}} + \frac{Q_2^{1,82} \cdot L_2}{D_2^{4,82}} - \frac{Q_3^{1,82} \cdot L_3}{D_3^{4,82}} - \frac{Q_4^{1,82} \cdot L_4}{D_4^{4,82}} \right) \right\rangle_{VII} \approx 0 \quad (135)$$

Римски индекси код тзв. стреличасте заграде означавају редни број итерације. Тако да се извод по протоку функције петље (135) у првој итерацији даје као (136):

$$\left\langle \frac{\partial F(Q)}{\partial Q} \right\rangle_I = \left\langle 1,82 \cdot 4810 \cdot \rho_r \cdot \left( \frac{Q_1^{0,82} \cdot L_1}{D_1^{4,82}} + \frac{Q_2^{0,82} \cdot L_2}{D_2^{4,82}} + \frac{Q_3^{0,82} \cdot L_3}{D_3^{4,82}} + \frac{Q_4^{0,82} \cdot L_4}{D_4^{4,82}} \right) \right\rangle_I \quad (136)$$

Итд, по истом принципу за сваку наредну итерацију, док се поправни проток у првој итерацији рачуна као (137):

$$\langle \Delta \rangle_I = \left\langle \frac{F(Q)}{\left| \frac{\partial F(Q)}{\partial Q} \right|} \right\rangle_I \quad (137)$$

И тако редом у свакој следећој итерацији. Када се задовољи услов по другом Кирхофовом закону, тада и поправни проток тежи нули ( $\Delta \rightarrow 0$ ). Добијени поправни проток се додаје алгебарски протоку за све цеви али са супротним знаком, као што је уосталом приказано у табели 8, тј. нпр. проток у појединој цеви у другој итерацији се рачуна помоћу протока из прве итерације и поправног протока (138):

$$\langle Q \rangle_{II} = \langle Q \rangle_I + \langle \Delta \rangle_I \quad (138)$$

Где знак + у једначини (138) треба схватити као алгебарско сабирање<sup>h</sup>.

Код водоводних мрежа нема никаквих промена у писању услова по првом Кирхофовом закону. За водоводне мреже које се прорачунавају Колбруковом једначином (35) како би се добио Дарсијев коефицијент хидрауличког отпора потребан за Дарси-Вајсбахову једначину (3) која служи за одређивање пада притиска у цеви, једначина петље за случај водоводне мреже са једним прстеном (услов по другом Кирхофовом закону) која је приказана на слици 27 гласи (139):

$$\langle \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_3 + \Delta p_4 \rangle_I = \left\langle \frac{8 \cdot \rho}{\pi^2} \cdot \left( \frac{\lambda_1 \cdot L_1 \cdot Q_1^2}{D_1^5} + \frac{\lambda_2 \cdot L_2 \cdot Q_2^2}{D_2^5} + \frac{\lambda_3 \cdot L_3 \cdot Q_3^2}{D_3^5} + \frac{\lambda_4 \cdot L_4 \cdot Q_4^2}{D_4^5} \right) \right\rangle_I \quad (139)$$

<sup>h</sup> У прилогу видети примере 15 и 16

Ова једначина (139) важи за претпостављене иницијалне протоке и не задовољава услов по другом Кирхофовом закону. Једначина (140) приказује стање после девете итерације када прорачунати протоци по гранама мреже приближно задовољавају услов по другом Кирхофовом закону:

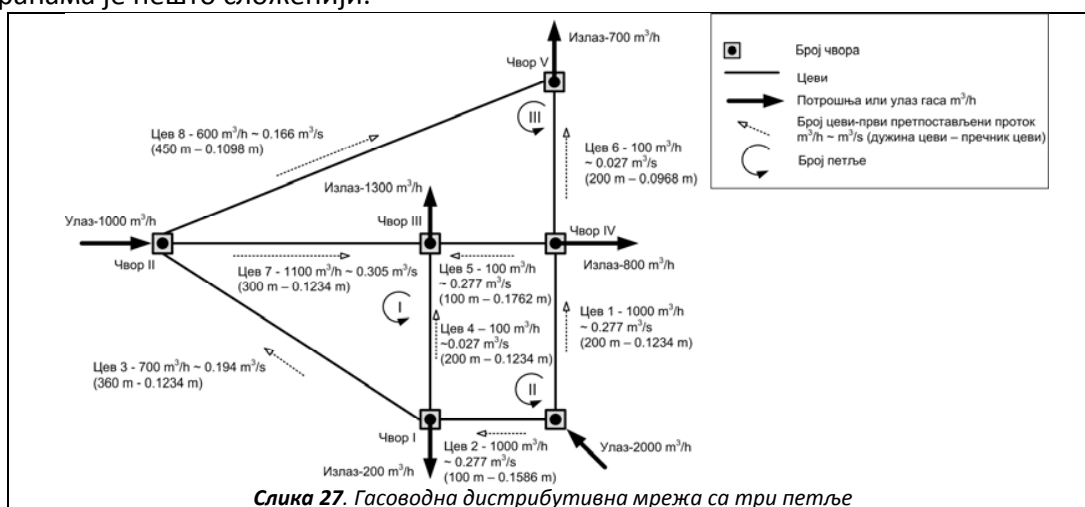
$$\langle \Delta p_1 + \Delta p_2 - \Delta p_3 - \Delta p_4 \rangle_{IX} = \left\langle \frac{8 \cdot \rho}{\pi^2} \cdot \left( \frac{\lambda_1 \cdot L_1 \cdot Q_1^2}{D_1^5} + \frac{\lambda_2 \cdot L_2 \cdot Q_2^2}{D_2^5} - \frac{\lambda_3 \cdot L_3 \cdot Q_3^2}{D_3^5} - \frac{\lambda_4 \cdot L_4 \cdot Q_4^2}{D_4^5} \right) \right\rangle_{IX} \approx 0 \quad (140)$$

Једначине чворова се конституишу исто као и код гасоводне мреже као што је већ напоменуто тако да се овде неће посебно објашњавати (услов по првом Кирхофовом закону). Први извод иницијалне једначине петље по протоку (140) где се проток посматра као променљива гласи (141):

$$\left\langle \frac{\partial F(Q)}{\partial Q} \right\rangle_I = \left\langle \frac{16 \cdot \rho}{\pi^2} \cdot \left( \frac{\lambda_1 \cdot L_1 \cdot Q_1}{D_1^5} + \frac{\lambda_2 \cdot L_2 \cdot Q_2}{D_2^5} + \frac{\lambda_3 \cdot L_3 \cdot Q_3}{D_3^5} + \frac{\lambda_4 \cdot L_4 \cdot Q_4}{D_4^5} \right) \right\rangle_I \quad (141)$$

При чему се затим даље рачуна поправни проток исто као и код гасоводне мреже (137-8).

За гасоводну мрежу приказану на слици 27 која се састоји од три петље прорачун протока по гранама је нешто сложенији.



Као што је већ раније објашњено за сваку контуру понаособ може да се добије поправни проток. Прва расподела протока је одабрана тако да буде задовољен први Кирхофов закон за сваки чвор. Ова иницијална дистрибуција протока може бити изабрана на бесконачно много начина. Међутим, само једна од њих задовољава и услов по другом Кирхофовом закону за све петље. Управо се ова расподела овде и израчунава (рачуница се даје у табели 4). Проблем су цеви које су заједничке за две контуре, односно за две петље. У случају са слике 27, цев 4 је заједничка за петље I и II, цев 7 за петље I и III, док је цев 5 за петље II и III. Ове цеви заједничке за две петље примају поправне протоке истовремено из прорачуна за сваку од две петље понаособ, које се алгебарски сабирају на основу посебних правила дефинисаних у овом докторату (поглавље В.1.1).

**Табела 4. Решење гасоводне дистрибутивне мреже са три петље према оригиналној Харди Крос методи (Слика 27)**

Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 1						
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q) /1,82	Δ <sub>1</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Δ <sub>2</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	
I	3	0,1234	360	-0,19444	-1264933339,23	6505371458,90	+0,13268		-0,06177
	4	0,1234	200	+0,02778	+20357137,09	732856935,22	+0,13268	+0,09722 ±	+0,25767
	7	0,1234	300	-0,30556	-2399620963,36	7853304971,00	+0,13268	+0,00881 ‡	-0,16407
			Σ	-3644197165,50	15091533365,12				
			Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		-0,13268				
II	1	0,1234	200	+0,27778	+1344982709,52	4841937754,28	-0,09722		+0,18056
	2	0,1586	100	-0,27778	-200615476,37	722215714,94	-0,09722		-0,37500
	4	0,1234	200	-0,02778	-20357137,09	732856935,22	-0,09722	-0,13268 ±	-0,25767
	5	0,1762	100	+0,02778	+1828425,70	65823325,31	-0,09722	+0,00881 ±	-0,06063
			Σ	1125838521,76	6362833729,74				
			Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		0,09722				
III	5	0,1762	100	-0,02778	-1828425,70	65823325,31	-0,00881	+0,09722 ‡	+0,06063
	6	0,0968	200	+0,02778	+65604940,93	2361777873,51	-0,00881		+0,01897
	7	0,1234	300	+0,30556	+2399620963,36	7853304971,00	-0,00881	-0,13268 =	+0,16407
	8	0,1098	450	-0,16667	-2096864105,78	12581184634,65	-0,00881		-0,17548
			Σ	366533372,81	22862090804,47				
			Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		0,00881				
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 2						
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q) /1,82	Δ <sub>1</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Δ <sub>2</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	
I	3	0,1234	360	-0,06177	-156904917,94	2540271135,77	-0,01128		-0,07305
	4	0,1234	200	+0,25767	+1173109335,72	4552672205,36	-0,01128	-0,05572 =	+0,19067
	7	0,1234	300	-0,16407	-773797561,89	4716290188,53	-0,01128	-0,04154 ±	-0,21689
			Σ	242406855,89	11809233529,66				
			Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		0,01128				
II	1	0,1234	200	+0,18056	+614087396,29	3401051347,17	+0,05572		+0,23628
	2	0,1586	100	-0,37500	-346390930,28	923715434,58	+0,05572		-0,31927
	4	0,1234	200	-0,25767	-1173109335,72	4552672205,36	+0,05572	+0,01128 ‡	-0,19067
	5	0,1762	100	-0,06063	-7569671,91	124844298,01	+0,05572	-0,04154 ±	-0,04645
			Σ	-912982541,63	9002283285,12				
			Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		-0,05572				
III	5	0,1762	100	+0,06063	+7569671,91	124844298,01	+0,04154	-0,05572 =	+0,04645
	6	0,0968	200	+0,01897	+32767180,23	1727426294,85	+0,04154		+0,06051
	7	0,1234	300	+0,16407	+773797561,89	4716290188,53	+0,04154	+0,01128 ±	+0,21689
	8	0,1098	450	-0,17548	-2302927589,41	13123914813,86	+0,04154		-0,13394
			Σ	-1488793175,37	19692475595,25				
			Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		-0,04154				
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 3						
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q) /1,82	Δ <sub>1</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Δ <sub>2</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	
I	3	0,1234	360	-0,07305	-212911909,40	2914784422,95	+0,03637		-0,03668
	4	0,1234	200	+0,19067	+678130226,18	3556511145,55	+0,03637	+0,00383 ±	+0,23087
	7	0,1234	300	-0,21689	-1285951161,56	5929122581,94	+0,03637	+0,00399 ‡	-0,17653
			Σ	-820732844,77	12400418150,44				
			Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		-0,03637				
II	1	0,1234	200	+0,23628	+1001912310,20	4240331299,62	-0,00383		+0,23245
	2	0,1586	100	-0,31927	-258471411,70	809559990,78	-0,00383		-0,32310
	4	0,1234	200	-0,19067	-678130226,18	3556511145,55	-0,00383	-0,03637 ±	-0,23087
	5	0,1762	100	-0,04645	-4660638,28	100338760,90	-0,00383	+0,00399 ‡	-0,04628
			Σ	60650034,04	8706741196,84				
			Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		0,00383				
III	5	0,1762	100	+0,04645	+4660638,28	100338760,90	-0,00399	+0,00383 ±	+0,04628
	6	0,0968	200	+0,06051	+270590087,41	4471941032,34	-0,00399		+0,05652
	7	0,1234	300	+0,21689	+1285951161,56	5929122581,94	-0,00399	-0,03637 =	+0,17653
	8	0,1098	450	-0,13394	-1408506432,12	10516262826,32	-0,00399		-0,13793
			Σ	152695455,12	21017665201,50				
			Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		0,00399				

Табела 4. Наставак (итерације 4, 5, 6)

Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 4						
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q) /1,82	Δ <sub>1</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Δ <sub>2</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	
I	3	0,1234	360	-0,03668	-60773343,58	1656869107,42	-0,00080		-0,03747
	4	0,1234	200	+0,23087	+960512382,41	4160472778,57	-0,00080	-0,01523=	+0,21484
	7	0,1234	300	-0,17653	-884069258,04	5008051992,38	-0,00080	-0,00979±	-0,18711
			Σ	15669780,78	10825393878,37				
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		0,00080			
II	1	0,1234	200	+0,23245	+972571072,16	4183925405,33	+0,01523		+0,24768
	2	0,1586	100	-0,32310	-264138399,28	817509435,96	+0,01523		-0,30787
	4	0,1234	200	-0,23087	-960512382,41	4160472778,57	+0,01523	+0,00080‡	-0,21484
	5	0,1762	100	-0,04628	-4630657,49	100047435,64	+0,01523	-0,00979±	-0,04084
				Σ	-256710367,02	9261955055,50			
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		-0,01523			
III	5	0,1762	100	+0,04628	+4630657,49	100047435,64	+0,00979	-0,01523=	+0,04084
	6	0,0968	200	+0,05652	+238983305,00	4228550138,79	+0,00979		+0,06630
	7	0,1234	300	+0,17653	+884069258,04	5008051992,38	+0,00979	+0,00080 †	+0,18711
	8	0,1098	450	-0,13793	-1485840083,73	10772590274,43	+0,00979		-0,12814
				Σ	-358156863,20	20109239841,23			
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		-0,00979			
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 5						
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q) /1,82	Δ <sub>1</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Δ <sub>2</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	
I	3	0,1234	360	-0,03747	-63192958,92	1686271573,58	+0,01029		-0,02718
	4	0,1234	200	+0,21484	+842643381,13	3922155646,44	+0,01029	+0,00020 †	+0,22534
	7	0,1234	300	-0,18711	-982876489,47	5252908146,02	+0,01029	+0,00018‡	-0,17664
			Σ	-203426067,26	10861335366,04				
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		-0,01029			
II	1	0,1234	200	+0,24768	+1091638328,38	4407398651,96	-0,00020		+0,24748
	2	0,1586	100	-0,30787	-241918905,01	785776481,38	-0,00020		-0,30807
	4	0,1234	200	-0,21484	-842643381,13	3922155646,44	-0,00020	-0,01029±	-0,22534
	5	0,1762	100	-0,04084	-3687712,68	90292799,06	-0,00020	+0,00018‡	-0,04087
				Σ	3388329,57	9205623578,83			
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		0,00020			
III	5	0,1762	100	+0,04084	+3687712,68	90292799,06	-0,00018	+0,00020 †	+0,04087
	6	0,0968	200	+0,06630	+319589919,79	4820169591,41	-0,00018		+0,06612
	7	0,1234	300	+0,18711	+982876489,47	5252908146,02	-0,00018	-0,01029=	+0,17664
	8	0,1098	450	-0,12814	-1299579776,88	10141730707,20	-0,00018		-0,12832
				Σ	6574345,05	20305101243,68			
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		0,00018			
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 6						
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q) /1,82	Δ <sub>1</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Δ <sub>2</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	
I	3	0,1234	360	-0,02718	-35230008,44	1295978861,40	+0,00007		-0,02712
	4	0,1234	200	+0,22534	+919042145,53	4078559103,21	+0,00007	-0,00440=	+0,22100
	7	0,1234	300	-0,17664	-885095711,68	5010670934,37	+0,00007	-0,00263±	-0,17920
			Σ	-1283574,59	10385208898,99				
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		-0,00007			
II	1	0,1234	200	+0,24748	+1090016632,75	4404447492,23	+0,00440		+0,25188
	2	0,1586	100	-0,30807	-242208204,99	786199712,38	+0,00440		-0,30368
	4	0,1234	200	-0,22534	-919042145,53	4078559103,21	+0,00440	-0,00007±	-0,22100
	5	0,1762	100	-0,04087	-3691713,06	90336916,50	+0,00440	-0,00263±	-0,03910
				Σ	-74925430,83	9359543224,33			
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		-0,00440			
III	5	0,1762	100	+0,04087	+3691713,06	90336916,50	+0,00263	-0,00440=	+0,03910
	6	0,0968	200	+0,06612	+318030972,08	4809561766,64	+0,00263		+0,06875
	7	0,1234	300	+0,17664	+885095711,68	5010670934,37	+0,00263	-0,00007=	+0,17920
	8	0,1098	450	-0,12832	-1302865315,09	10153274719,11	+0,00263		-0,12569
				Σ	-96046918,27	20063844336,63			
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )		-0,00263			

V. Дистрибуција гаса цевоводима; прорачун стационарне расподеле протока у задатој мрежи

Итерације између 7-47 се изостављају у табели 4.

**Табела 4. Наставак (итерације 48, 49, 50)**

Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 48					
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q) /1,82	Δ <sub>1</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Δ <sub>2</sub> (m <sup>3</sup> /s)	
I	3	0,1234	360	-0.02278	-25542360.07	1121186629.92	+1.03466·10 <sup>-14</sup>	
	4	0,1234	200	+0.22340	+904783952.67	4049927854.60	+1.03466·10 <sup>-14</sup>	-3.12233·10 <sup>-14</sup> =
	7	0,1234	300	-0.17599	-879241592.60	4995711995.46	+1.03466·10 <sup>-14</sup>	-1.81163·10 <sup>-14</sup> ±
			Σ	-0.00019145		10166826479.98		
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )			-1.03466·10 <sup>-14</sup>	
II	1	0,1234	200	+0.25381	+1141290908.84	4496616611.17	+3.12233·10 <sup>-14</sup>	
	2	0,1586	100	-0.30174	-233226923.30	772928441.67	+3.12233·10 <sup>-14</sup>	
	4	0,1234	200	-0.22340	-904783952.68	4049927854.60	+3.12233·10 <sup>-14</sup>	-1.03466·10 <sup>-14</sup> ±
	5	0,1762	100	-0.03829	-3280032.86	85650452.99	+3.12233·10 <sup>-14</sup>	-1.81163·10 <sup>-14</sup> ±
			Σ	-0.00053445		9405123360.43		
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )			-3.12233·10 <sup>-14</sup>	
III	5	0,1762	100	+0.03829	+3280032.86	85650452.99	+1.81163·10 <sup>-14</sup>	-3.12233·10 <sup>-14</sup> =
	6	0,0968	200	+0.06988	+351705304.19	5032673991.08	+1.81163·10 <sup>-14</sup>	
	7	0,1234	300	+0.17599	+879241592.61	4995711995.46	+1.81163·10 <sup>-14</sup>	-1.03466·10 <sup>-14</sup> =
	8	0,1098	450	-0.12456	-1234226929.66	9908688954.50	+1.81163·10 <sup>-14</sup>	
			Σ	-0.000660181		20022725394.03		
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )			-1.81163·10 <sup>-14</sup>	
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 49					
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q) /1,82	Δ <sub>1</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Δ <sub>2</sub> (m <sup>3</sup> /s)	
I	3	0,1234	360	-0.02278	-25542360.07	1121186629.92	+2.13439·10 <sup>-14</sup>	
	4	0,1234	200	+0.22341	+904783952.68	4049927854.60	+2.13439·10 <sup>-14</sup>	-4.68147·10 <sup>-15</sup> =
	7	0,1234	300	-0.17600	-879241592.61	4995711995.46	+2.13439·10 <sup>-14</sup>	-2.72823·10 <sup>-15</sup> ±
			Σ	-0.00039494		10166826479.98		
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )			-2.13439·10 <sup>-14</sup>	
II	1	0,1234	200	+0.25381	+1141290908.84	4496616611.17	+4.68147·10 <sup>-15</sup>	
	2	0,1586	100	-0.30174	-233226923.30	772928441.67	+4.68147·10 <sup>-15</sup>	
	4	0,1234	200	-0.22341	-904783952.68	4049927854.60	+4.68147·10 <sup>-15</sup>	-2.13439·10 <sup>-14</sup> ±
	5	0,1762	100	-0.03830	-3280032.86	85650452.99	+4.68147·10 <sup>-15</sup>	-2.72823·10 <sup>-15</sup> ±
			Σ	-0.00008013		9405123360.43		
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )			-4.68147·10 <sup>-15</sup>	
III	5	0,1762	100	+0.03830	+3280032.86	85650452.99	+2.72823·10 <sup>-15</sup>	-4.68147·10 <sup>-15</sup> =
	6	0,0968	200	+0.06988	+351705304.19	5032673991.08	+2.72823·10 <sup>-15</sup>	
	7	0,1234	300	+0.17600	+879241592.61	4995711995.46	+2.72823·10 <sup>-15</sup>	-2.13439·10 <sup>-14</sup> =
	8	0,1098	450	-0.12456	-1234226929.66	9908688954.50	+2.72823·10 <sup>-15</sup>	
			Σ	-0.00009942		20022725394.03		
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )			-2.72823·10 <sup>-15</sup>	
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 50					
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q) /1,82	Δ <sub>1</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Δ <sub>2</sub> (m <sup>3</sup> /s)	
I	3	0,1234	360	-0.02278	-25542360.07	1121186629.92	+3.17614·10 <sup>-15</sup>	
	4	0,1234	200	+0.22341	+904783952.68	4049927854.60	+3.17614·10 <sup>-15</sup>	-9.21125·10 <sup>-15</sup> =
	7	0,1234	300	-0.17600	-879241592.61	4995711995.46	+3.17614·10 <sup>-15</sup>	-5.31907·10 <sup>-15</sup> ±
			Σ	-0.00005877		10166826479.98		
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )			-3.17614·10 <sup>-15</sup>	
II	1	0,1234	200	+0.25381	+1141290908.84	4496616611.17	+9.21125·10 <sup>-15</sup>	
	2	0,1586	100	-0.30174	-233226923.30	772928441.67	+9.21125·10 <sup>-15</sup>	
	4	0,1234	200	-0.22341	-904783952.68	4049927854.60	+9.21125·10 <sup>-15</sup>	-3.17614·10 <sup>-15</sup> ±
	5	0,1762	100	-0.03830	-3280032.86	85650452.99	+9.21125·10 <sup>-15</sup>	-5.31907·10 <sup>-15</sup> ±
			Σ	-0.00015767		9405123360.43		
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )			-9.21125·10 <sup>-15</sup>	
III	5	0,1762	100	+0.03830	+3280032.86	85650452.99	+5.31907·10 <sup>-15</sup>	-9.21125·10 <sup>-15</sup> =
	6	0,0968	200	+0.06988	+351705304.19	5032673991.08	+5.31907·10 <sup>-15</sup>	
	7	0,1234	300	+0.17600	+879241592.61	4995711995.46	+5.31907·10 <sup>-15</sup>	-3.17614·10 <sup>-15</sup> =
	8	0,1098	450	-0.12456	-1234226929.66	9908688954.50	+5.31907·10 <sup>-15</sup>	
			Σ	-0.00019383		20022725394.03		
				Δ=F(Q)/(1,82· F'(Q) )			-5.31907·10 <sup>-15</sup>	

Гасоводна мрежа са слике 27 није ни приближно компликована колико дистрибутивне мреже у градовима могу да буду, али се ни после шест итерација не назире крајње решење. Мрежа се може сматрати уравнотеженом тек негде после педесете итерације, са дистрибуцијом протока:  $Q_1=913,72 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_2=1086,28 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_3=82,01 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_4=804,27 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_5=-137,86 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_6=251,58 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_7=633,60 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_8=448,42 \text{ m}^3/\text{h}$ . Знак минус (-) испред бројчане вредности крајњег протока у цеви 5 значи да је смер протока у овој цеви обрнут од првобитно претпостављеног<sup>1</sup>.

### **В.1.1 Одабир алгебарског знака за поправни проток**

Треба напоменути да су правила за поправке протока потпуно истоветна за оригинални Харди Крос метод, модификовани Харди Крос метод, све варијанте метода В.Г. Лобачева и М.М. Андријашева. Истоветна правила важе и за методу чворова, са тиме да то онда нису поправке протока већ падова притисака код водоводних мрежа, односно разлика квадрата притисака на улазу и излазу из цеви код гасоводних мрежа.

Поправни проток за сваку контуру понаособ се може израчунати према једначини (137). Овај поправни проток се алгебарски додаје са супротним знаком на проток који је претходно израчунат у претходној итерацији. За сваку контуру понаособ се рачуна поправни проток (137), с тим да цеви које су заједничке за две или више контура примају две или више поправки протока истовремено. На почетку прорачуна се зна колико флуида улази у мрежу, односно колико излази из мреже и то све сведено на чворове мреже. Прва расподела протока по цевима се бира тако да буде задовољен први Кирхофов закон за чворове, док се итеративним поступком по Харди Кросу рачуна расподела протока за коју ће бити задовољен и други Кирхофов закон (осим код методе чворова где је случај обрнут што ће бити објашњено у поглављу В.2). Када је једна цев заједничка за две контуре она прима поправни проток прорачунат за прву контуру којој припада и то тако да се на овај поправни проток додаје вредност протока кроз дату цев али са супротним знаком. Сам знак протока у цеви зависи од претпостављеног смера обилажења контуре.

Поправни проток из суседне контуре се додаје на основу одређених правила, за које ће се ради лакшег објашњења дефинисати појмови као нпр. 'доњи' знак и 'горњи' знак. Алгебарски знак за сабирање поправног протока вишег реда треба да буде супротан од доњег знака када је горњи знак исти као знак испред протока кроз дату цев у посматраној итерацији, односно треба да буде иста као доњи знак када је горњи знак супротан од знака испред протока кроз дату цев у посматраној итерацији. Знак испред протока кроз дату цев у посматраној итерацији зависи од прве претпостављене расподеле протока и замишљеног смера обилазак контуре. Наравно у каснијим итерацијама се први претпостављени смер протока у појединим цевима може и променити. Дакле уколико се смер обилазак контуре и претпостављени смер протока флуида кроз цев поклопе, тада је знак испред протока позитиван (+), а у супротном је (-). Горњи знак плус (+) значи да се смер протока у датој цеви поклапа са замишљеним смером обилазак суседне контуре, а

<sup>1</sup> У прилогу се иста мрежа прорачунава као да је водоводна; пример 17

ако не горњи знак је минус (-). Доњи знак је алгебарски знак који стоји уз корекцију у оној контури за коју је она првобитно била израчуната. Уколико се позитивни знак (+) замисли као логичка јединица (1) а Буловој алгебри, а негативан знак (-) као логичка нула (0), тада се на основу таблица истинитости (Табела 5) могу конструишати виртуелна логичка кола за одабир знака поправног протока из суседне контуре (Слика 5).

**Табела 5.** Комбинације за одабир алгебарског знака поправке из суседне контуре

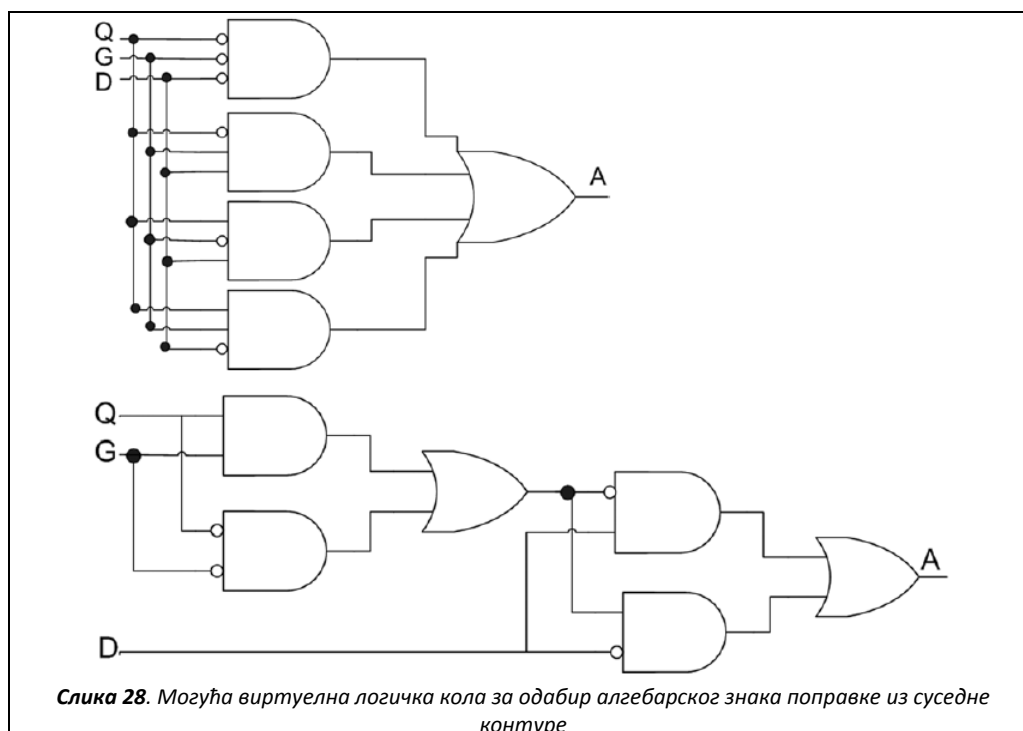
Испред протока <sup>а</sup> <b>Q</b>	Знакови иза поправке из суседне контуре <sup>б</sup>		Изабрани алгебарски знак <b>A</b>
	Горњи знак <sup>в</sup> <b>G</b>	Доњи знак <sup>г</sup> <b>D</b>	
0 (-)	0 (-)	0 (-)	1 (+)
0 (-)	0 (-)	1 (+)	0 (-)
0 (-)	1 (+)	0 (-)	0 (-)
0 (-)	1 (+)	1 (+)	1 (+)
1 (+)	0 (-)	0 (-)	0 (-)
1 (+)	0 (-)	1 (+)	1 (+)
1 (+)	1 (+)	0 (-)	1 (+)
1 (+)	1 (+)	1 (+)	0 (-)

*а- Означава да ли се одабрани смер обиласка контуре поклапа са смером протока кроз цев*

*б- Корекција из контуре са којима посматрана контура дели заједничке цеви*

*в- Узима се у односу на одабрани смер обиласка суседне контуре и цеви која је заједничка*

*г- Узима се алгебарски знак поправке протока у контури са којом се дели заједничка цев*



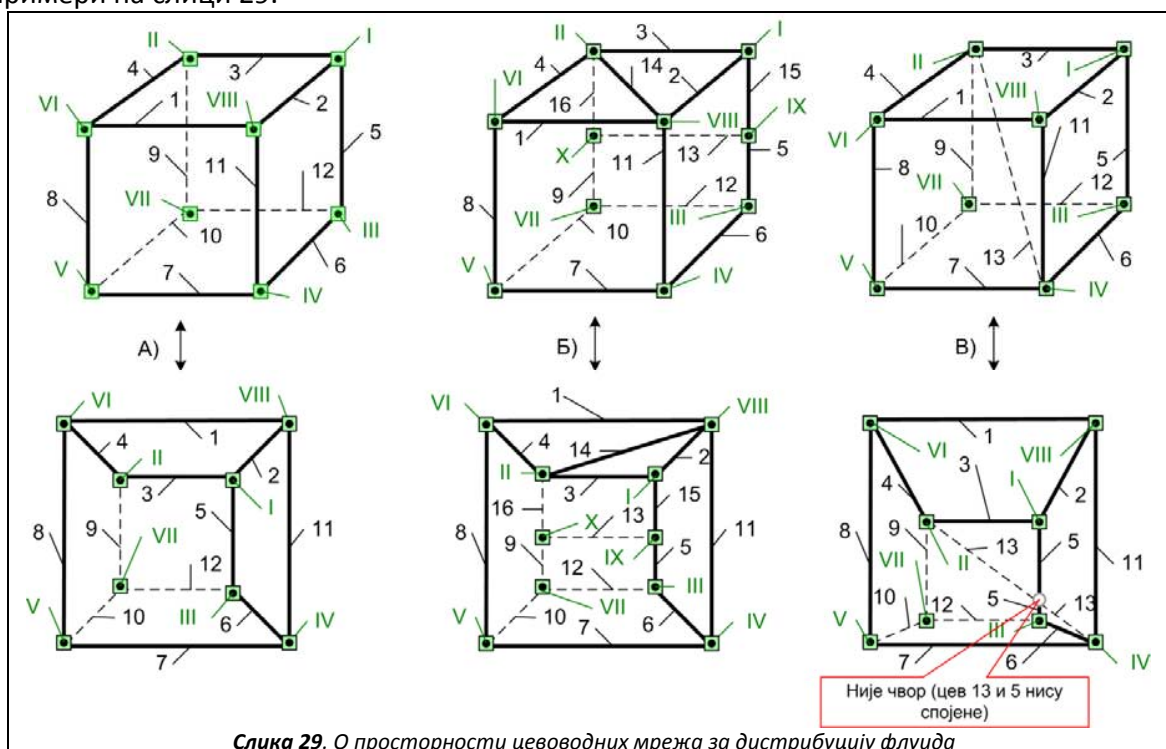
**Слика 28.** Могућа виртуелна логичка кола за одабир алгебарског знака поправке из суседне контуре

Наравно да логичка кола приказана на слици 28 стварно не постоје, већ их треба схватити као добар приказ како функционишу правила за одабир алгебарског знака за поправни

проток из суседне контуре. Да би се схватила комплексност проблема који може да се јави размотриће се случај једне просторне цевоводне мреже за дистрибуцију гаса. Наравно оваква мрежа се ретко среће, али када су у питању вентилациони системи у рудницима или у зградама, овакав тип мреже је уобичајен. Да се не би бавили отпорима који се јављају у вентилационим мрежама што је ван теме ове дисертације, обрадићемо овакав тип мреже као да је гасоводна мрежа.

### В.1.2 О просторности мрежа за дистрибуцију флуида

Уобичајена пракса је да се водоводна или гасоводна мрежа у градовима поставља у једној, приближно хоризонталној равни. Вентилациона мрежа у рудницима и стамбеним зградама насупрот, обично није у једној равни. Још је Харди Крос у раду из 1936. разматрао између осталог проток флуида у цевоводним мрежама које су дате у више равни, односно које су просторне. Да би се боље схватило шта је просторна мрежа дају се примери на слици 29.



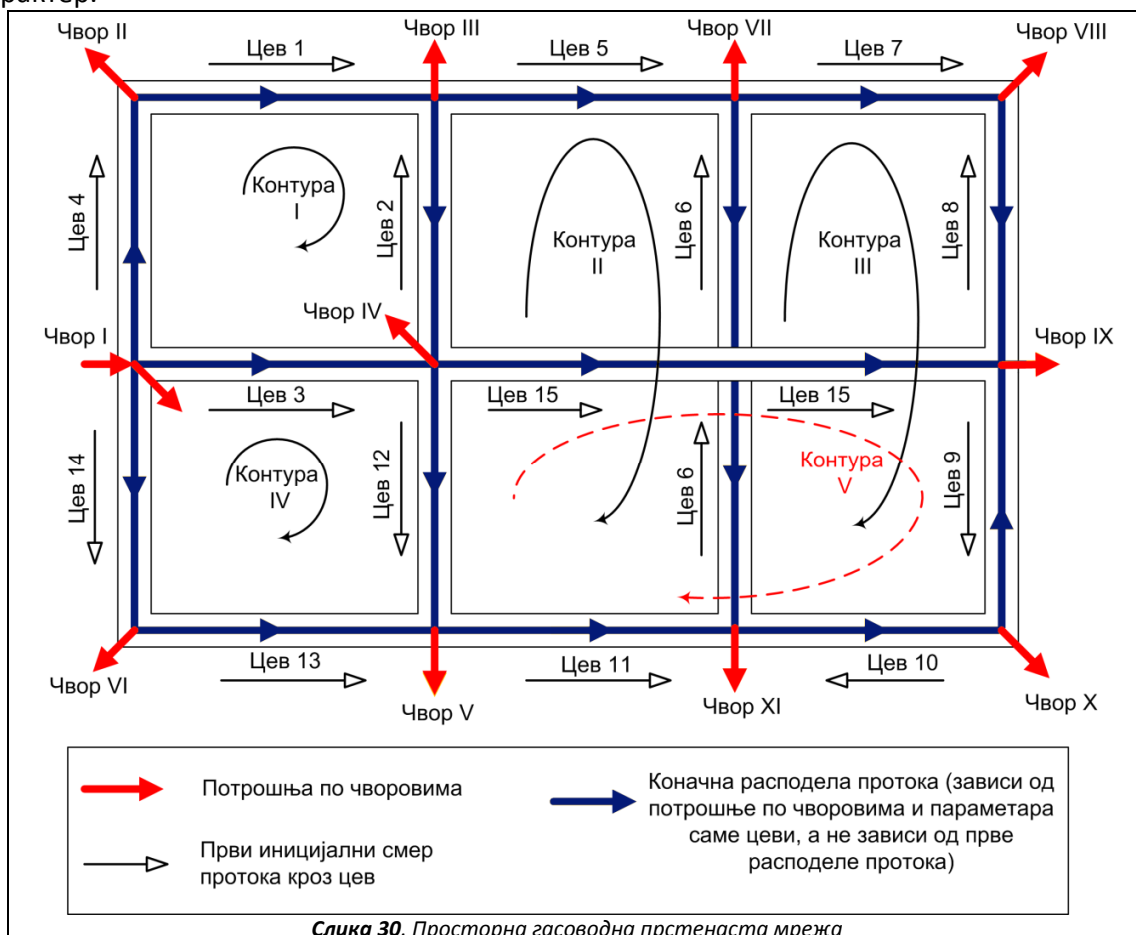
Слика 29. О просторности цевоводних мрежа за дистрибуцију флуида

На слици 29 у примеру А) се даје случај коцке која је несумњиво просторно геометријско тело. Међутим са аспекта прорачуна прстенасте мреже коцка се може представити у једној равни увођењем еквивалентних пречника и дужина цеви. Односно боље речено, за прорачун протока у прстенастој мрежи представљеној на слици 29 А) ниједна цев није заједничка за више од две контуре. Сличан је случај и са коцком која има дијагоналу на једној од својих страница како је и дато на слици 29 Б). Најзад увођење просторне дијагонале доводи до тога да бар једна цев буде заједничка за три контуре чиме се у прорачун уводи још један додатни поправни проток, односно постоји цев у мрежи која у



једној итерацији истовремено прима три корекције протока као што је случај са мрежом приказаном на слици 29 В).

На слици 30 даје се случај једне гасоводне мреже прстенастог типа која има просторни карактер.



Цевоводна мрежа приказана на слици 30 има просторни карактер пошто се цеви 6 и 15 укрштају без спајања. За решавање овако постављене цевоводне мреже потребно је поставити једначине за пет контура. Прве четири контуре се одабирају тако што се фиктивно уклони једна од укрштених цеви, нпр. 15. Затим се уобичајено одаберу контуре као и код тзв. раванске мреже. После овога се одабира још једна додатна контура која обухвата и цев 15. Наравно фиктивно се може уклонити цев 6, па се у том случају додатна пета контура бира тако да обухвати и цев 6. Последица која произилази из просторности овакве мреже је та да је цев 12 заједничка за три контуре, и то за контуру II, IV и V. Потрошње гаса по чворовима као и количина гаса која улази у мрежу дата је у табели 6, а расподела првих иницијалних протока у табели 7. Прорачун мреже са слике 30 по оригиналној Харди Крос методи се за прве две итерације даје у табели 8. Протоци за прву расподелу протока у мрежи могу да се одабирају произвољно али уз ограничење да

морају да задовоље први Кирхофов закон или се могу одабирати помоћу формуле<sup>j</sup>, наравно стриктно се придржавајући ограничења према првом Кирхофовом закону.

**Табела 6.** Потрошња гаса по чворовима мреже са слике 30 и 31

<sup>a</sup> Чвор	m <sup>3</sup> /h	m <sup>3</sup> /s
I	60	1/60
II	2100	7/12
III	170	17/360
IV	90	1/40
V	200	1/18
VI	2500	25/36
VII	300	1/12
VIII	170	17/360
IX	850	17/72
X	280	7/90
XI	280	7/90
Чвор		<sup>b</sup> Улаз гаса у мрежу
I	-7000	-1 17/18

<sup>a</sup> константа у прорачуну

<sup>b</sup> улаз у мрежу мора бити једнак збиру потрошњи по чворовима

**Табела 7.** Први претпостављени распоред протока<sup>a</sup>

Цев	Мрежа са слике 30		Мрежа са слике 31	
	m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /h	m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /h
1	1/18	200	1/36	100
2	5/72	250	1/12	300
3	17/30	2040	47/180	940
4	23/36	2300	5/9	2000
5	7/90	280	1/120	30
6	1/72	50	31/180	620
7	1/120	30	7/72	350
8	7/180	140	1/20	180
9	41/360	410	7/60	420
10	13/360	130	7/36	700
11	1/18	200	4/9	1600
12	1/12	300	1/12	300
13	1/36	100	5/12	1500
14	13/18	2600	1 1/9	4000
15	7/18	1400	5/72	250

<sup>a</sup> мора бити одабран тако да први Кирхофов закон буде задовољен у свакој итерацији за сваки чвор

<sup>j</sup> Нпр. израчунати проток  $Q$  из формуле што је у данашње време сувишно када се прорачун не ради ручно применог спороконвергентних метода (видети слику 34 на којој је показано да је разлика у броју потребних итерација занемарљива у случају да се примени формула из које се рачуна проток на основу пречника да буде усклађен са првим Кирхофовим законом или ако се прва расподела протока одабере произвољно али тако да буде усклађена са првим Кирхофовим законом)

Прорачун у табели 8 се даје за прве две итерације за иницијални распоред протока дат на слици 30. Два различита иницијална распореда протока се дају да би се показало да коначан распоред протока не зависи од ових иницијалних протока, већ само од карактеристика цеви, тј. пречника, дужина и храпавости цеви и наравно од потрошње по чворовима. Прорачун за случај иницијалних протока са слике 31 неће се приказивати да се не би оптерећивао текст, али је он урађен и коначни резултати, тј. коначан распоред протока је исти (табела 9), што је и логично јер су мреже са слика 30 и 31 потпуно исте.

**Табела 8.** Прорачун мреже са слике 30 по оригиналној Харди Крос методи за прве две итерације (итерација 1)

				Итерација 1			<sup>б</sup> Поправни протоци $\Delta$			Q (m <sup>3</sup> /s)
*	**	D <sub>u</sub> (m)	L (m)	<sup>а</sup> Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q) /1,82	1 (m <sup>3</sup> /s)	2 (m <sup>3</sup> /s)	3 (m <sup>3</sup> /s)	
I	1	0.4064	100	+1/18	114959	2069265	+35/123	...	...	+251/738
	2	0.3048	100	-5/72	-690438	9942302	+35/123	-6/619±	...	+91/443 <sup>б</sup>
	3	0.1524	100	-17/30	-889949040	1570498307	+35/123	+53/219‡	...	-31/773
	4	0.3048	100	+23/36	39193885	61346951	+35/123	...	...	+193/209
				$\Sigma$	-851330634	1643856824	$\Delta_I = \frac{-851330634}{1,82 \cdot 1643856824} = -\frac{35}{123}$			
II	5	0.1524	100	+7/90	23969880	308184165	+6/619	...	...	+37/423
	6	0.3048	200	-1/72	-73795	5313266	+6/619	+1/560‡	...	-1/415
	11	0.1524	100	-1/18	-12993101	233875825	+6/619	-114/731‡	...	-89/441
	12	0.1524	100	-1/12	-27176838	326122050	+6/619	+53/219‡	-114/731‡	+2/161 <sup>б</sup>
	2	0.3048	100	+5/72	690438	9942302	+6/619	-35/123=	...	-91/443 <sup>б</sup>
				$\Sigma$	-15583417	883437609	$\Delta_{II} = \frac{-15583417}{1,82 \cdot 883437609} = -\frac{6}{619}$			
III	7	0.1524	100	+1/120	411338	49360570	-1/560	...	...	+4/611
	8	0.1524	100	-7/180	-6788773	174568437	-1/560	...	...	-29/713
	9	0.3048	100	+41/360	1698792	14916225	-1/560	-114/731‡	...	-31/707 <sup>б</sup>
	10	0.1524	100	+13/360	5932191	164276062	-1/560	-114/731‡	...	-9/74 <sup>б</sup>
	6	0.3048	200	+1/72	73795	5313266	-1/560	-6/619=	...	+1/415
				$\Sigma$	1327344	408434560	$\Delta_{III} = \frac{1327344}{1,82 \cdot 408434560} = \frac{1}{560}$			
IV	3	0.1524	100	+17/30	889949040	1570498307	-53/219	-35/123=	...	+31/773
	12	0.1524	100	+1/12	27176838	326122050	-53/219	-6/619=	+114/731‡	-2/161 <sup>б</sup>
	13	0.1524	100	-1/36	-3679919	132477076	-53/219	...	...	-242/897
	14	0.4064	100	-13/18	-12243919	16953118	-53/219	...	...	-647/671
				$\Sigma$	901202040	2046050552	$\Delta_{IV} = \frac{901202040}{1,82 \cdot 2046050552} = \frac{53}{219}$			
V	15	0.1524	200	+7/18	897059511	2306724456	-114/731	...	...	+157/674
	9	0.3048	100	+41/360	1698792	14916225	-114/731	-1/560‡	...	-31/707 <sup>б</sup>
	10	0.1524	100	+13/360	5932191	164276062	-114/731	-1/560‡	...	-9/74 <sup>б</sup>
	11	0.1524	100	-1/18	-12993101	233875825	-114/731	+6/619=	...	-89/441
	12	0.1524	100	-1/12	-27176838	326122050	-114/731	+6/619=	+53/219‡	+2/161 <sup>б</sup>
				$\Sigma$	864520555	3045914618	$\Delta_V = \frac{864520555}{1,82 \cdot 3045914618} = \frac{114}{731}$			

Објашњења уз табелу 8:

\*-означава контуру,

\*\*-означава цев

<sup>а</sup> плус уколико се смер протока поклопи са замишљеним смером обиласка контуре

<sup>б</sup>  $\Delta_1$  додаје се са супротним алгебарским знаком од прорачунатог,  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  се додају према правилима приказаним у табели 5, односно према слици 28, <sup>в</sup> промена смера протока

Табела 8. Наставак (итерација 2)

Итерација 2										
*	**	D <sub>u</sub> (m)	L (m)	<sup>a</sup> Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q) /1,82	<sup>b</sup> Поправни протоци Δ			Q (m <sup>3</sup> /s)
							1 (m <sup>3</sup> /s)	2 (m <sup>3</sup> /s)	3 (m <sup>3</sup> /s)	
I	1	0.4064	100	+251/738	+3109446	9142515	-15/104	...	...	+19/97
	2	0.3048	100	+91/443 <sup>d</sup>	+4969810	24193844	-15/104	-4/73=	...	+5/782
	3	0.1524	100	-31/773	-7179519	179025918	-15/104	-89/743±	...	-59/194
	4	0.3048	100	+193/209	+76628349	82981252	-15/104	...	...	+60/77
					Σ	+77528086	295343529	$\Delta_I = \frac{77528086}{1,82 \cdot 295343529} = \frac{15}{104}$		
II	5	0.1524	100	+4/611	+29681838	339338041	+4/73	...	...	+34/239
	6	0.3048	200	-29/713	-3048	1264179	+4/73	-27/539±	...	+1/437 <sup>b</sup>
	11	0.1524	100	-31/707 <sup>d</sup>	-135931274	673547932	+4/73	-13/392∓	...	-20/111
	12	0.1524	100	-9/74 <sup>d</sup>	+850253	68463750	+4/73	-89/743=	-13/392‡	-3/35 <sup>d</sup>
	2	0.3048	100	+1/415	-4969810	24193844	+4/73	+15/104‡	...	-5/782
				Σ	-110372041	1106807745	$\Delta_{II} = \frac{-110372041}{1,82 \cdot 1106807745} = -\frac{4}{73}$			
III	7	0.1524	100	+4/611	+265211	40504396	+27/539	...	...	+29/512
	8	0.1524	100	-29/713	-7366742	181114454	+27/539	...	...	+5/531 <sup>b</sup>
	9	0.3048	100	-31/707 <sup>d</sup>	-299003	6819227	+27/539	-13/392 ∓	...	-7/260
	10	0.1524	100	-9/74 <sup>d</sup>	-54081552	444658880	+27/539	-13/392 ∓	...	-78/745
	6	0.3048	200	+1/415	+3048	1264179	+27/539	-4/73=	...	-1/437 <sup>b</sup>
				Σ	-61479037	674361136	$\Delta_{III} = \frac{-61479037}{1,82 \cdot 674361136} = -\frac{27}{539}$			
IV	3	0.1524	100	+31/773	+7179519	179025918	+89/743	+15/104 ∓	...	+59/194
	12	0.1524	100	-2/161 <sup>d</sup>	-850253	68463750	+89/743	-4/73±	+13/392‡	+3/35 <sup>b</sup>
	13	0.1524	100	-242/897	-230553185	854570432	+89/743	...	...	-3/20
	14	0.4064	100	-647/671	-20718132	21486648	+89/743	...	...	-38/45
				Σ	-244942051	1123546748	$\Delta_{IV} = \frac{-244942051}{1,82 \cdot 1123546748} = -\frac{89}{743}$			
V	15	0.1524	200	+157/674	+352954081	1515223735	-13/392	...	...	+177/886
	9	0.3048	100	-31/707 <sup>d</sup>	-299003	6819227	-13/392	+27/539=	...	-7/260
	10	0.1524	100	-9/74 <sup>d</sup>	-54081552	444658880	-13/392	+27/539=	...	-78/745
	11	0.1524	100	-89/441	-135931274	673547932	-13/392	+4/73 =	...	-20/111
	12	0.1524	100	+2/161 <sup>d</sup>	+850253	68463750	-13/392	+4/73 ±	-89/743=	-3/35 <sup>b</sup>
				Σ	+163492506	2708713524	$\Delta_V = \frac{163492506}{1,82 \cdot 2708713524} = \frac{13}{392}$			

Да би се избегле недоумице око алгебарског сабирања извршеног у табели 8, дају се примери,

итерација 1:

контура I, цев 1:  $+1/18+35/123=+251/738$

контура I, цев 2:  $-5/72+35/123-6/619=+91/443$  – промена смера протока

контура II, цев 12:  $-1/12+6/619++53/219--114/731=+2/161$  – промена смера протока

контура IV, цев 12:  $+1/12-53/219-6/619+114/731=-2/161$  – промена смера протока

итерација 2:

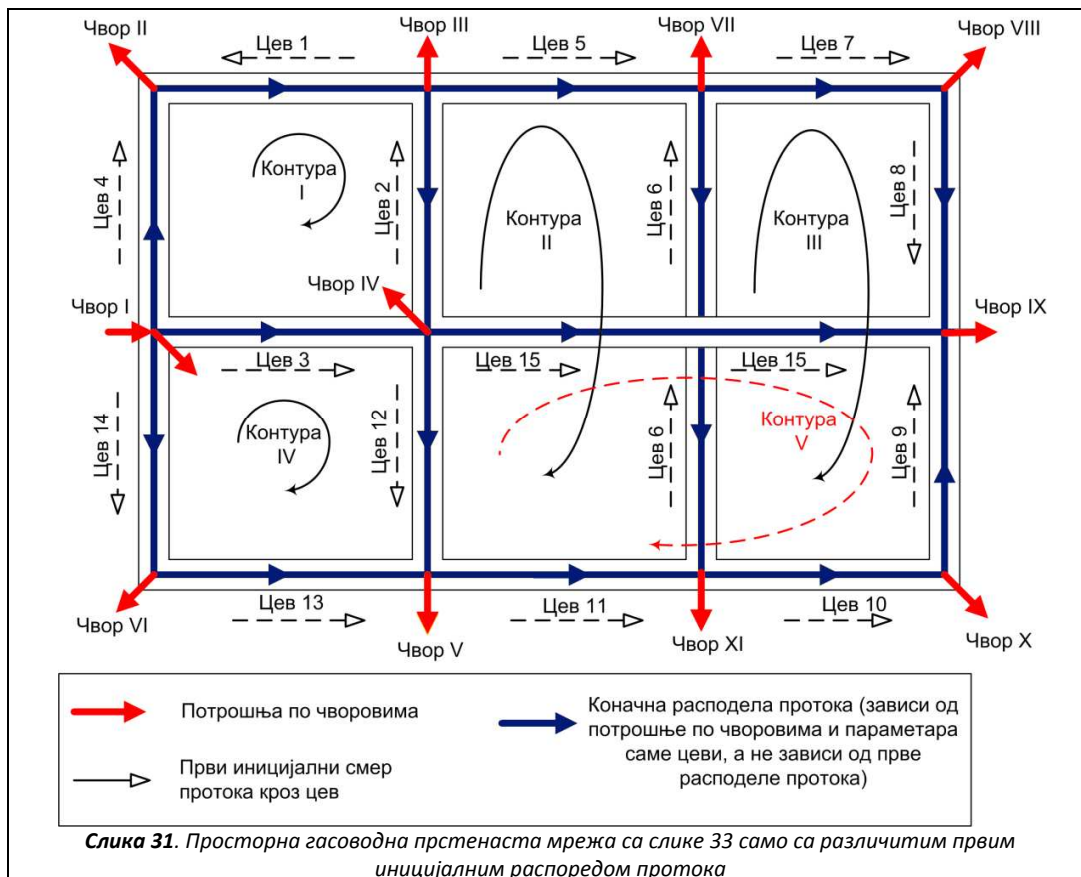
контура III, цев 10:  $-9/74+27/539-13/392=-78/745$

контура I, цев 2:  $+91/443-15/104-4/73=+5/782$

контура II, цев 12:  $+2/161+4/73-89/743-13/392=-3/35$  – промена смера протока

Провера првог Кирхофовог закона се врши у нпр. итерацији 2:

Чвор II,  $-7/12+193/209-251/738=0$ , Чвор,  $-1/18-2/161-242/897-89/441=0$



Табела 9. Крајње прорачунате вредности протока за мрежу са слика 30 и 31 (смерови обележени унутар цеви на датим сликама)

Цев	D <sub>u</sub> (m)	Конечан проток		аПровера брзине
		m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /h	m/s
1	0,4064	334/979	1228,19	0,66
2	0,3048	13/129	362,80	0,35
3	0,1524	82/539	547,68	2,08
4	0,3048	551/596	3328,19	3,17
5	0,1524	130/673	695,39	2,65
6	0,3048	1/71	50,73	0,05
7	0,1524	9/94	344,66	1,31
8	0,1524	18/371	174,66	0,66
9	0,3048	22/687	115,28	0,11
10	0,1524	28/255	395,28	1,50
11	0,1524	106/611	624,55	2,38
12	0,1524	17/235	260,43	0,99
13	0,1524	76/485	564,13	2,15
14	0,4064	223/262	3064,13	1,64
15	0,1524	7/45	560,05	2,13

<sup>а</sup> за притисак у мрежи 4·10<sup>5</sup> Pa abs.

У овом примеру су намерно изабрани велики пречници цеви, што показују брзине гаса дате у табели 9, које би требало да имају вредности и преко 10 m/s. Овај проблем ће се у даљем тексту разрешити оптимизацијом мреже (Пример 23 у прилогу).

### В.1.3. Модификовани Харди Крос метод (Simultaneous contour equation solution)

Од 1936. године када Харди Крос објавио свој рад који је поставио темеље на пољу прорачуна протока флуида у прстенастим мрежама морало је да прође преко тридесет година до појаве унапређеног метода. Еп и Фовлер (Ерр-Fowler 1970) су 1970. године предложили знатно побољшану методу за чију примену је потребно увођење матричног рачуна. Основни Харди Крос метод (Cross 1936) такође може бити представљен у матричном облику.

Основни Харди Кросов метод из 1936. за гасоводну мрежу приказану на слици 27 може се записати у матричној форми (142):

$$\begin{bmatrix} \left| \frac{\partial F_I(-Q_3, Q_4, -Q_7)}{\partial(\Delta Q_I)} \right| & 0 & 0 \\ 0 & \left| \frac{\partial F_{II}(Q_1, -Q_2, -Q_4, Q_5)}{\partial(\Delta Q_{II})} \right| & 0 \\ 0 & 0 & \left| \frac{\partial F_{III}(-Q_5, Q_6, Q_7, -Q_8)}{\partial(\Delta Q_{III})} \right| \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_I \\ \Delta_{II} \\ \Delta_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I \\ F_{II} \\ F_{III} \end{bmatrix} \quad (142)$$

Где је  $\Delta_I$  поправни проток за прву контуру,  $\Delta_{II}$  поправни проток за другу контуру и  $\Delta_{III}$  поправни проток за трећу контуру. Резултати у првој и другој итерацији су за исте почетне услове истоветни онима у табели 8.

Такође, основни Харди Кросов метод из 1936. за гасоводну мрежу приказану на слици 30 може бити записан у матричној форми (143):

$$\begin{bmatrix} \left| \frac{\partial F_I^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_I)} \right| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left| \frac{\partial F_{II}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{II})} \right| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left| \frac{\partial F_{III}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{III})} \right| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left| \frac{\partial F_{IV}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{IV})} \right| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left| \frac{\partial F_V^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_V)} \right| \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_I^{(m)} \\ \Delta_{II}^{(m)} \\ \Delta_{III}^{(m)} \\ \Delta_{IV}^{(m)} \\ \Delta_V^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I^{(m-1)} \\ F_{II}^{(m-1)} \\ F_{III}^{(m-1)} \\ F_{IV}^{(m-1)} \\ F_V^{(m-1)} \end{bmatrix} \quad (143)$$

У претходном изразу (m) представља број итерације. Функција  $F_I$  за прву итерацију према слици 30 (I се односи на контуру 1) се може написати као  $F_I=Q_1-Q_2-Q_3+Q_4$ , а нпр. функција  $F_V$  која одговара петој контури је  $F_V=Q_9+Q_{10}-Q_{11}-Q_{12}+Q_{15}$ . Потпуно исти резултати се добијају као и у случају када се не користи матрични рачун.

Мора се приметити да су матрице непогодне за тзв. ручне прорачуне тако да се матрични рачун уводи тек са појавом првих озбиљнијих рачунара. Данас се врло лако може оперисати са врло великим матрицама у стандардном програму *MS Excel* који је у данашње време уобичајено инсталиран на скоро сваком кућном или канцеларијском рачунару. Да би се унела матрица у *MS Excel 2007 (Enterprise edition)* потребно је селектовати поља која треба да обухвати матрица, затим притиснути функцијски тастер F2 и затим заједно тастере CTRL+SHIFT+ENTER. На идентичан начин се добијају и матрице након рачунских операција. Уколико се не примени описани поступак уместо целе матрице, као резултат се добија само први члан резултујуће матрице, тј. члан који се налази у пресеку прве колоне и прве врсте матрице. У релацијама (142 и 143) се примећује да су у првој матрици, тј. матрици извода која фигурише у оба израза сви чланови ван главне дијагонале једнаки нули. У модификованом Харди Крос методу при којем је конвергенција ка равнотежном стању знатно бржа постоје чланови и ван главне дијагонале који имају вредности различите од нуле<sup>k</sup>. Прва матрица, тј. матрица извода у релацијама (142 и 143) је квадратна, тј. има исти број колона и врста. Тако се нпр. у пресеку прве колоне и прве врсте уписује први извод функције прве контуре по протоку, у другу извод функције друге контуре по протоку, итд. колико има контура. На основу овога се може закључити да је ова матрица симетрична у односу на главну дијагоналу. Код модификованог Харди Крос метода ова симетричност је такође очувана. Редови у матрици извода одговарају утицајима заједничких цеви које посматрана контура има са другим контурама. Дакле, главну дијаголу чине чланови који чије су вредности исте као и у оригиналном Харди Крос методу, тј. то су апсолутне вредности збирова извода функције притиска за сваку цев у контури. Остали чланови су изводи функције притиска за сваку цев из суседних контура које су заједничке са предметном контуром узети са негативним предзнаком (ако их нема онда су ти чланови једнаки нули). Матрица извода код модификованог Харди Крос метода се уопштено може написати као (144):

$$[\text{grad}F(Q)] = [\nabla F(Q)] = \begin{bmatrix} \left| \frac{\partial F_I(Q_1, Q_2, \dots)}{\partial(\Delta Q_1)} \right| & - \left| \frac{\partial F_I(Q_1, Q_2, \dots)}{\partial(\Delta Q_2)} \right| & \dots & \dots \\ - \left| \frac{\partial F_{II}(Q_1, Q_2, \dots)}{\partial(\Delta Q_1)} \right| & \left| \frac{\partial F_{II}(Q_1, Q_2, \dots)}{\partial(\Delta Q_2)} \right| & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \quad (144)$$

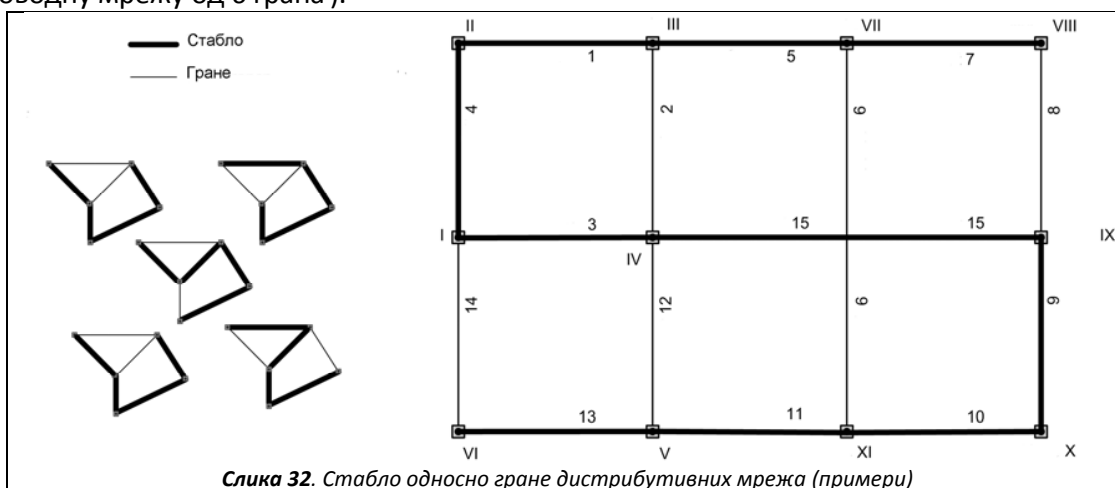
Модификовани Харди Крос метод има много бржу конвергенцију, у неким случајевима и 100 пута, у поређењу са оригиналним Харди Крос методом. Алгебарски знак испред

<sup>k</sup> У прилогу дисертације, у примеру 18, даје се једна простија гасоводна мрежа на којој је вршено поређење конвергенцијских особина оригиналног и модификованог Харди Крос метода

поправке протока добијене применом Харди Крос метода се одређује на исти начин као и код основног Харди Крос метода и то на начин који је и описан у поглављу V.1.1. ове дисертације.

Да би се успешно користио матрични рачун за прорачун гасоводних мрежа потребно је увести елементе теорије графова у прорачун. Математички опис просторне мреже са слике 30 ће се обрадити као пример. Све контуре мреже се обилазе у смеру казаљке на сату. Мрежа са слике 30 има  $X=15$  грана, тј. цеви и  $Y=11$  чворова. Мрежа са  $Y$  чворова има  $Y-1$  независних чворова (у нашем случају 10), и  $X-Y+1$  независних контура (у нашем случају 5), што је уједно и број грана у мрежи. Један чвор се бира да буде референтни, док су преостали независни. Број независних контура се утврђује тако што се сви чворови мреже повежу поштујући предвиђену трасу ценовода и то тако да линија која их повезује нигде не буде затворена. Ова линија се назива стаблом мреже и може бити одабрана на више начина. У нашем примеру стабло чине нпр. цеви 13, 11, 10, 9, 15, 3, 4, 1, 5, 7. Остале цеви су гране мреже. Контура се састоји од одређеног броја цеви које припадају стаблу и од једне гране.

Да би се боље схватио концепт одређивања гасоводна мрежа ће се представити графом приказаним на слици 32 (на истој слици се дају и примери могућих стабала за једну мању гасоводну мрежу од 6 грана<sup>1</sup>).



Слика 32. Стабло односно гране дистрибутивних мрежа (примери)

На слици 32 сложенија мрежа на десној страни има 5 независних контура пошто грана 6 прелази без спајања преко цеви 15 које припада стаблу.

Што се саме прерасподеле протока тиче, као и даљег тога прорачуна нема никакве разлике међу цевима које су фиктивно одабране да буду гране мреже и оних које представљају тзв. стабло. Тако нпр. знатно већи проток може бити кроз цев која фиктивно припада грани мреже него у оној која фиктивно припада стаблу мреже. Слична логика се примењује и у минералогiji када се одређује број страна и рогљева минерала (Ојлерова теорема).

<sup>1</sup> У прилогу, пример 19 видети математички опис ове простије мреже



За мрежу са слике 32, може се за сваки чвор написати једначина одржања масе по првом Кирхофовом закону (145):

$$\left. \begin{aligned}
 -Q_1 + Q_4 - Q_{\text{II-output}} &= 0 \\
 Q_1 + Q_2 - Q_5 - Q_{\text{III-output}} &= 0 \\
 -Q_2 + Q_3 - Q_{12} - Q_{15} - Q_{\text{IV-output}} &= 0 \\
 -Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} - Q_{\text{V-output}} &= 0 \\
 -Q_{13} + Q_{14} - Q_{\text{VI-output}} &= 0 \\
 Q_5 + Q_6 - Q_7 - Q_{\text{VII-output}} &= 0 \\
 Q_7 + Q_8 - Q_{\text{VIII-output}} &= 0 \\
 -Q_8 - Q_9 + Q_{15} - Q_{\text{IX-output}} &= 0 \\
 Q_9 - Q_{10} - Q_{\text{X-output}} &= 0 \\
 -Q_6 + Q_{10} + Q_{11} - Q_{\text{XI-output}} &= 0
 \end{aligned} \right\} \text{nodes} \quad (145)$$

Односно у матричном облику она гласи (146):

$$\begin{bmatrix}
 -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}
 Q_1 \\
 Q_2 \\
 Q_3 \\
 Q_4 \\
 Q_5 \\
 Q_6 \\
 Q_7 \\
 Q_8 \\
 Q_9 \\
 Q_{10} \\
 Q_{11} \\
 Q_{12} \\
 Q_{13} \\
 Q_{14} \\
 Q_{15}
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 Q_{\text{II-output}} \\
 Q_{\text{III-output}} \\
 Q_{\text{IV-output}} \\
 Q_{\text{V-output}} \\
 Q_{\text{VI-output}} \\
 Q_{\text{VII-output}} \\
 Q_{\text{VIII-output}} \\
 Q_{\text{IX-output}} \\
 Q_{\text{X-output}} \\
 Q_{\text{XI-output}}
 \end{bmatrix} \quad (146)$$

У скупу једначина (145 и 146) недостаје једначина за први чвор који је изабран да буде референтни. Овиме се не губи ниједна информација о мрежи, али се успоставља линеарна независност међу редовима матрице чворова.

Све потребне информације о чворовима мреже су садржане како у једначини (145), тако и у једначини (146), са логичним објашњењем да свака цев повезује два чвора, чиме се недвосмислено зна да уколико је чвор на једном крају те цеви улазни за флуид, последично је чвор на другој страни исте цеви излазни за флуид.

На пример, чвор XI може бити референтан, тако да се сад систем може написати као (147):



За сваку контуру се слично може написати једначина одржања енергије према другом Кирхофовом закону (149):

$$\begin{aligned}
 & \Delta \tilde{p}_1^2 - \Delta \tilde{p}_2^2 - \Delta \tilde{p}_3^2 + \Delta \tilde{p}_4^2 = \\
 & = 4810 \cdot \rho_r \left( \frac{L_1 \cdot Q_1^{1,82}}{D_1^{4,82}} - \frac{L_2 \cdot Q_2^{1,82}}{D_2^{4,82}} - \frac{L_3 \cdot Q_3^{1,82}}{D_3^{4,82}} + \frac{L_4 \cdot Q_4^{1,82}}{D_4^{4,82}} \right) \approx 0 \\
 & \Delta \tilde{p}_2^2 + \Delta \tilde{p}_5^2 - \Delta \tilde{p}_6^2 - \Delta \tilde{p}_{11}^2 + \Delta \tilde{p}_{12}^2 = \\
 & = 4810 \cdot \rho_r \left( \frac{L_2 \cdot Q_2^{1,82}}{D_2^{4,82}} + \frac{L_5 \cdot Q_5^{1,82}}{D_5^{4,82}} - \frac{L_6 \cdot Q_6^{1,82}}{D_6^{4,82}} - \frac{L_{11} \cdot Q_{11}^{1,82}}{D_{11}^{4,82}} + \frac{L_{12} \cdot Q_{12}^{1,82}}{D_{12}^{4,82}} \right) \approx 0 \\
 & \Delta \tilde{p}_6^2 + \Delta \tilde{p}_7^2 - \Delta \tilde{p}_8^2 + \Delta \tilde{p}_9^2 + \Delta \tilde{p}_{10}^2 = \\
 & = 4810 \cdot \rho_r \left( \frac{L_6 \cdot Q_6^{1,82}}{D_6^{4,82}} - \frac{L_7 \cdot Q_7^{1,82}}{D_7^{4,82}} - \frac{L_8 \cdot Q_8^{1,82}}{D_8^{4,82}} + \frac{L_9 \cdot Q_9^{1,82}}{D_9^{4,82}} + \frac{L_{10} \cdot Q_{10}^{1,82}}{D_{10}^{4,82}} \right) \approx 0 \\
 & \Delta \tilde{p}_3^2 + \Delta \tilde{p}_{12}^2 - \Delta \tilde{p}_{13}^2 - \Delta \tilde{p}_{14}^2 = \\
 & = 4810 \cdot \rho_r \left( \frac{L_3 \cdot Q_3^{1,82}}{D_3^{4,82}} + \frac{L_{12} \cdot Q_{12}^{1,82}}{D_{12}^{4,82}} - \frac{L_{13} \cdot Q_{13}^{1,82}}{D_{13}^{4,82}} - \frac{L_{14} \cdot Q_{14}^{1,82}}{D_{14}^{4,82}} \right) \approx 0 \\
 & \Delta \tilde{p}_9^2 + \Delta \tilde{p}_{10}^2 - \Delta \tilde{p}_{11}^2 - \Delta \tilde{p}_{12}^2 + \Delta \tilde{p}_{15}^2 = \\
 & = 4810 \cdot \rho_r \left( \frac{L_9 \cdot Q_9^{1,82}}{D_9^{4,82}} + \frac{L_{10} \cdot Q_{10}^{1,82}}{D_{10}^{4,82}} - \frac{L_{11} \cdot Q_{11}^{1,82}}{D_{11}^{4,82}} - \frac{L_{12} \cdot Q_{12}^{1,82}}{D_{12}^{4,82}} + \frac{L_{15} \cdot Q_{15}^{1,82}}{D_{15}^{4,82}} \right) \approx 0
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{array} \right\} \text{contours} \quad (149)$$

Претходне једначине се могу написати у матричном облику као (150):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \tilde{p}_1^2 \\ \Delta \tilde{p}_2^2 \\ \Delta \tilde{p}_3^2 \\ \vdots \\ \Delta \tilde{p}_{15}^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (150)$$

Где је  $\Delta \tilde{p} = p_u^2 - p_i^2$ , односно разлика квадрата улазног и излазног притиска. У случају дистрибуције воде уместо гаса, једначина (149) је нешто другачија и то само са гледишта хидрауличких отпора (151) што је детаљно обрађивано у поглављу Б ове дисертације:

$$\begin{aligned}
 & \Delta p_1 - \Delta p_2 - \Delta p_3 + \Delta p_4 = \\
 & = \frac{8 \cdot \rho}{\pi^2} \left( \frac{\lambda_1 \cdot L_1 \cdot Q_1^2}{D_1^5} - \frac{\lambda_2 \cdot L_2 \cdot Q_2^2}{D_2^5} - \frac{\lambda_3 \cdot L_3 \cdot Q_3^2}{D_3^5} + \frac{\lambda_4 \cdot L_4 \cdot Q_4^2}{D_4^5} \right) \approx 0 \\
 & \Delta p_2 + \Delta p_5 - \Delta p_6 - \Delta p_{11} + \Delta p_{12} = \\
 & = \frac{8 \cdot \rho}{\pi^2} \left( \frac{\lambda_2 \cdot L_2 \cdot Q_2^2}{D_2^5} + \frac{\lambda_5 \cdot L_5 \cdot Q_5^2}{D_5^5} - \frac{\lambda_6 \cdot L_6 \cdot Q_6^2}{D_6^5} - \frac{\lambda_{11} \cdot L_{11} \cdot Q_{11}^2}{D_{11}^5} + \frac{\lambda_{12} \cdot L_{12} \cdot Q_{12}^2}{D_{12}^5} \right) \approx 0 \\
 & \Delta p_6 + \Delta p_7 - \Delta p_8 + \Delta p_9 + \Delta p_{10} = \\
 & = \frac{8 \cdot \rho}{\pi^2} \left( \frac{\lambda_6 \cdot L_6 \cdot Q_6^2}{D_6^5} - \frac{\lambda_7 \cdot L_7 \cdot Q_7^2}{D_7^5} - \frac{\lambda_8 \cdot L_8 \cdot Q_8^2}{D_8^5} + \frac{\lambda_9 \cdot L_9 \cdot Q_9^2}{D_9^5} + \frac{\lambda_{10} \cdot L_{10} \cdot Q_{10}^2}{D_{10}^5} \right) \approx 0 \\
 & \Delta p_3 + \Delta p_{12} - \Delta p_{13} - \Delta p_{14} = \\
 & = \frac{8 \cdot \rho}{\pi^2} \left( \frac{\lambda_3 \cdot L_3 \cdot Q_3^2}{D_3^5} + \frac{\lambda_{12} \cdot L_{12} \cdot Q_{12}^2}{D_{12}^5} - \frac{\lambda_{13} \cdot L_{13} \cdot Q_{13}^2}{D_{13}^5} - \frac{\lambda_{14} \cdot L_{14} \cdot Q_{14}^2}{D_{14}^5} \right) \approx 0 \\
 & \Delta p_9 + \Delta p_{10} - \Delta p_{11} - \Delta p_{12} + \Delta p_{15} = \\
 & = \frac{8 \cdot \rho}{\pi^2} \left( \frac{\lambda_9 \cdot L_9 \cdot Q_9^2}{D_9^5} + \frac{\lambda_{10} \cdot L_{10} \cdot Q_{10}^2}{D_{10}^5} - \frac{\lambda_{11} \cdot L_{11} \cdot Q_{11}^2}{D_{11}^5} - \frac{\lambda_{12} \cdot L_{12} \cdot Q_{12}^2}{D_{12}^5} + \frac{\lambda_{15} \cdot L_{15} \cdot Q_{15}^2}{D_{15}^5} \right) \approx 0
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} F_I \\ F_{II} \\ F_{III} \\ F_{IV} \\ F_V \end{array} \right\} \text{contours} \quad (151)$$

Слично као и код матрица чворова, код матрица контура редови одговарају одређеној контури, док колоне одговарају цевима. Овде је битан усвојени смер обиласка контуре, тако да уколико се смер протока флуида у цеви поклопи са смером обиласка контуре на њеном месту стоји јединица са позитивним предзнаком (+1) и обрнуто, а уколико цев не припада датој контури стоји нула (0). Изрази (149-151) су једнаки нули тек на крају прорачуна када је мрежа уравнотежена. Одговарајућа матрична једначина (150) на крају прорачуна даје тзв. колону матрицу са свим члановима којих има колико и независних контура мреже и који су приближно једнаки нули са унапред задатом толеранцијом.

Прва матрица из израза (148), односно матрица чворова, матрично помножена са транспонованом матрицом контура, тј. транспонованом првом матрицом из израза (150) даје матрицу чији су сви чланови нуле, што је и показатељ да не постоји грешка у математичком опису мреже.

Матрица контура, тј. петљи, прва матрица у изразу (150) као и редукване матрице чворова, тј прве матрице у изразима (146 и 148), се не користе директно приликом прорачуна модификованим Харди Крос методом. Описане матричне релације приликом прорачуна Харди Крос методом имају контролну улогу, тј. могу се користити за проверу да током итеративног поступка не дође до грешке. Једначина (150) се може користити као критеријум за прекид итеративног поступка.

За сам прорачун расподеле протока флуида према модификованом Харди Крос методу кроз гране мреже приказане на слици 30, користи се следећи израз (152):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_I^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_I)} & \frac{\partial F_I^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{II})} & \frac{\partial F_I^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{III})} & \frac{\partial F_I^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{IV})} & \frac{\partial F_I^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_V)} \\ \frac{\partial F_{II}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_I)} & \frac{\partial F_{II}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{II})} & \frac{\partial F_{II}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{III})} & \frac{\partial F_{II}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{IV})} & \frac{\partial F_{II}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_V)} \\ \frac{\partial F_{III}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_I)} & \frac{\partial F_{III}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{II})} & \frac{\partial F_{III}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{III})} & \frac{\partial F_{III}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{IV})} & \frac{\partial F_{III}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_V)} \\ \frac{\partial F_{IV}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_I)} & \frac{\partial F_{IV}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{II})} & \frac{\partial F_{IV}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{III})} & \frac{\partial F_{IV}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{IV})} & \frac{\partial F_{IV}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_V)} \\ \frac{\partial F_V^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_I)} & \frac{\partial F_V^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{II})} & \frac{\partial F_V^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{III})} & \frac{\partial F_V^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{IV})} & \frac{\partial F_V^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_V)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_I^{(m)} \\ \Delta_{II}^{(m)} \\ \Delta_{III}^{(m)} \\ \Delta_{IV}^{(m)} \\ \Delta_V^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I^{(m-1)} \\ F_{II}^{(m-1)} \\ F_{III}^{(m-1)} \\ F_{IV}^{(m-1)} \\ F_V^{(m-1)} \end{bmatrix} \quad (152)$$

Чланови ван главне дијагонале у првој матрици у изразу (152) се односе на суседне цеви које су граничне за две контуре (или више у просторним мрежама какву овде и разматрамо). Ова матрица је увек симетрична у односу на главну дијагоналу, тј. важи (153):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_I^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{II})} &= \frac{\partial F_{II}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_I)} \\ \frac{\partial F_I^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{III})} &= \frac{\partial F_{III}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_I)} \\ \frac{\partial F_{II}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{III})} &= \frac{\partial F_{III}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{II})} \\ &\vdots \\ \frac{\partial F_{IV}^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_V)} &= \frac{\partial F_V^{(m-1)}}{\partial(\Delta Q_{IV})} \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

У конкретном примеру за мрежу са слике 30, овај израз се може написати као (154):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_I(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)}{\partial(\Delta Q_I)} & \frac{\partial F_I(-Q_2)}{\partial(\Delta Q_{II})} & 0 & \frac{\partial F_I(-Q_3)}{\partial(\Delta Q_{IV})} & 0 \\ \frac{\partial F_{II}(-Q_2)}{\partial(\Delta Q_I)} & \frac{\partial F_{II}(Q_2, Q_5, Q_6, Q_{11}, Q_{12})}{\partial(\Delta Q_{II})} & \frac{\partial F_{II}(-Q_6)}{\partial(\Delta Q_{III})} & \frac{\partial F_{II}(-Q_{12})}{\partial(\Delta Q_{IV})} & \frac{\partial F_{II}(Q_{11}, Q_{12})}{\partial(\Delta Q_V)} \\ 0 & \frac{\partial F_{III}(-Q_6)}{\partial(\Delta Q_{II})} & \frac{\partial F_{III}(Q_6, Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10})}{\partial(\Delta Q_{III})} & 0 & \frac{\partial F_{III}(Q_9, Q_{10})}{\partial(\Delta Q_V)} \\ \frac{\partial F_{IV}(-Q_3)}{\partial(\Delta Q_I)} & \frac{\partial F_{IV}(-Q_{12})}{\partial(\Delta Q_{II})} & 0 & \frac{\partial F_{IV}(Q_3, Q_{12}, Q_{13}, Q_{14})}{\partial(\Delta Q_{IV})} & \frac{\partial F_{IV}(-Q_{12})}{\partial(\Delta Q_V)} \\ 0 & \frac{\partial F_V(Q_{11}, Q_{12})}{\partial(\Delta Q_{II})} & \frac{\partial F_V(Q_9, Q_{10})}{\partial(\Delta Q_{III})} & \frac{\partial F_V(-Q_{12})}{\partial(\Delta Q_{IV})} & \frac{\partial F_V(Q_9, Q_{10}, Q_{11}, Q_{12}, Q_{15})}{\partial(\Delta Q_V)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_I^{(m)} \\ \Delta_{II}^{(m)} \\ \Delta_{III}^{(m)} \\ \Delta_{IV}^{(m)} \\ \Delta_V^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I^{(m-1)} \\ F_{II}^{(m-1)} \\ F_{III}^{(m-1)} \\ F_{IV}^{(m-1)} \\ F_V^{(m-1)} \end{bmatrix} \quad (154)$$

где је (155):

$$\begin{bmatrix} F_I^{(m-1)} \\ F_{II}^{(m-1)} \\ F_{III}^{(m-1)} \\ F_{IV}^{(m-1)} \\ F_V^{(m-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) \\ F_{II}(Q_2, Q_5, Q_6, Q_{11}, Q_{12}) \\ F_{III}(Q_6, Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10}) \\ F_{IV}(Q_3, Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}) \\ F_V(Q_9, Q_{10}, Q_{11}, Q_{12}, Q_{15}) \end{bmatrix} \quad (155)$$

Односно у првој итерацији нумерички подаци за прву матрицу у нашем случају су (156):

$$1.82 \begin{bmatrix} 1643856824 & -9942302 & 0 & -1570498307 & 0 \\ -9942302 & 883437609 & -5313266 & -326122050 & 559997875 \\ 0 & -5313266 & 408434560 & 0 & 179192287 \\ -1570498307 & -326122050 & 0 & 2046050552 & -179187940 \\ 0 & 559997875 & 179192287 & -179187940 & 3045914618 \end{bmatrix} \quad (156)$$

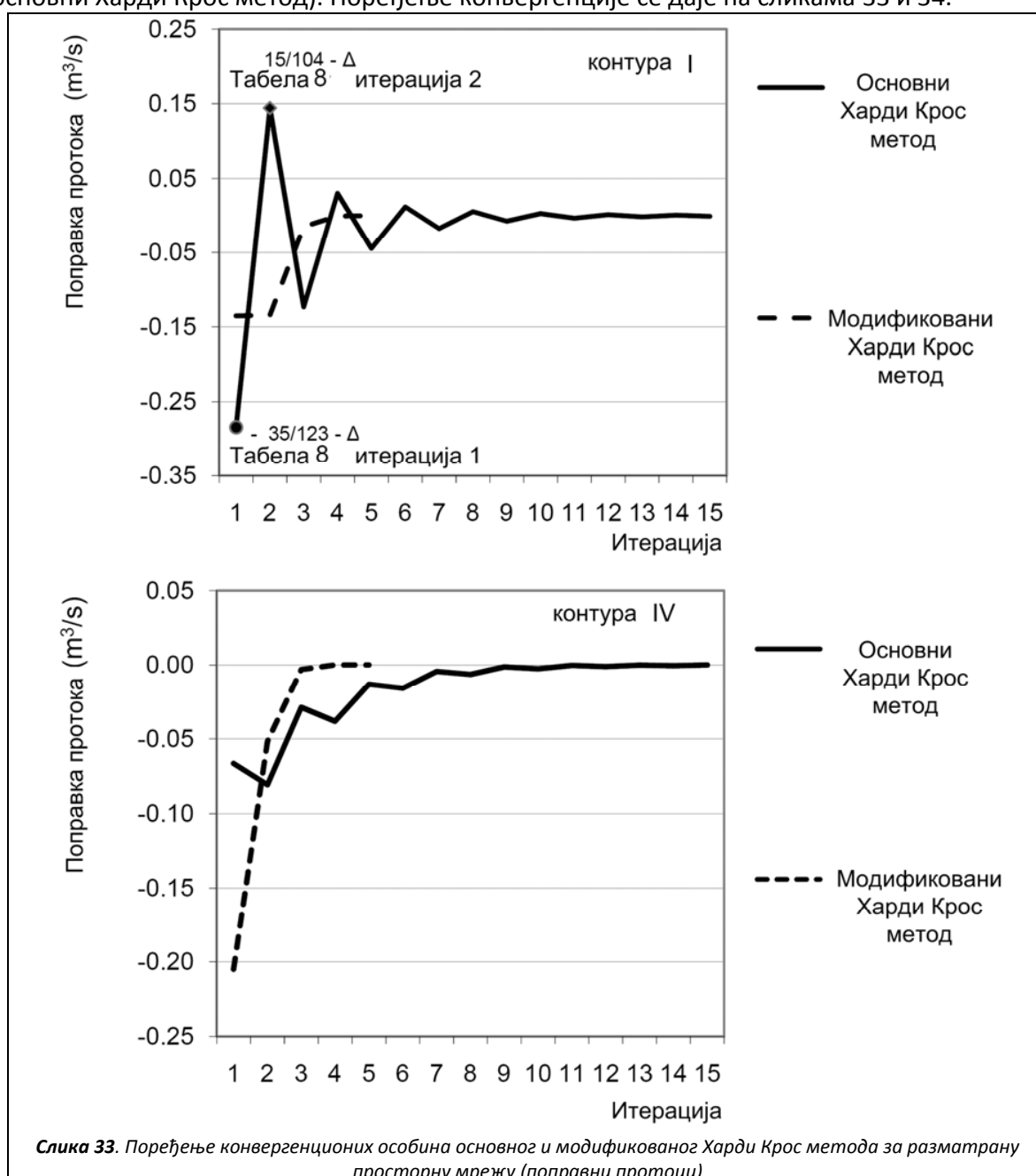
Модификовани Харди Крос метод показује знатно брже конвергенционе особине од основне варијанте, с тиме да код просторних мрежа нису сви чланови ван главне дијагонале негативни. Ово је отежавајућа чињеница јер врло лако може да се погрешно. Тако нпр. позитивни чланови из матрице (156) се добијају на следећи начин (видети Табелу 8; итерација 1, пошто су улазни подаци за прву итерацију исти за обе варијанте Харди Крос метода):

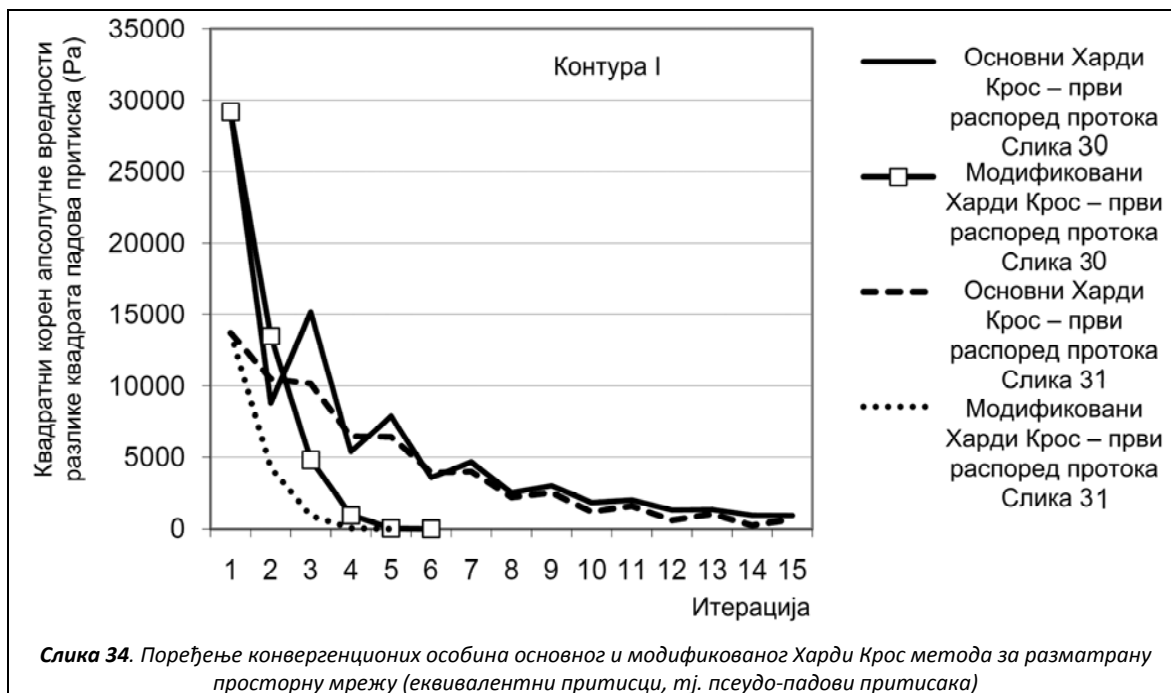
$$559997875 = 233875825 + 326122050 \text{ (односи се на цеви 11 и 12)}$$

$$179192287 = 14916225 + 164276062 \text{ (односи се на цеви 9 и 10)}$$

Разлог је што поједине цеви нису граничне само за две контуре, већ неке и за три као нпр. цев 12. Исто тако истовремено се узима поправка у цевима 11 и 12 из контура 2 и 5, и у цевима 9 и 10 из контура 3 и 5 које су истосмерно оријентисане и које се описују са истих страна цеви.

Пошто се после израчунавања поправки у свакој итерацији за сваку контуру понаособ даљи поступак уопште не разликује у поређењу са основним Харди Кросовим методом, то се детаљан прорачун неће приказивати табеларно (као што је у табели 8 урађено за основни Харди Крос метод). Поређење конвергенције се даје на сликама 33 и 34.



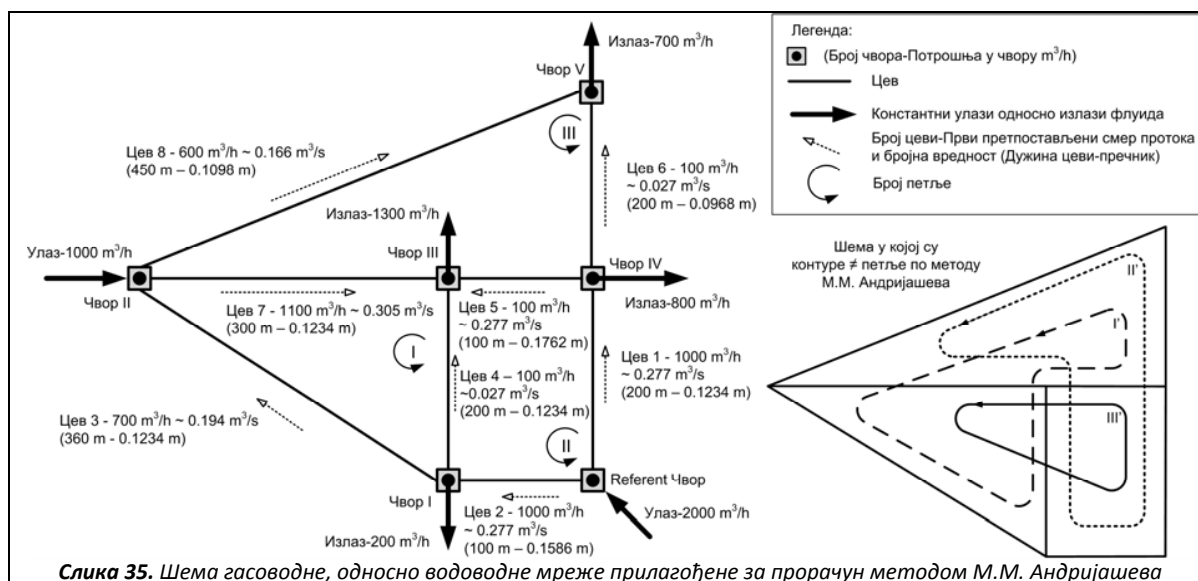


#### В.1.4. Варијације Харди Крос метода; метод М.М. Андријашева

Метод М.М. Андријашева представља у суштину једну варијанту Харди Кросове методе. Он може бити у основном или у модификованом облику, исто као што је случај и код Харди Крос метода. Једина разлика између Харди Крос метода и метода М.М. Андријашева је у томе што се код овог другог контура састоји од више петљи. Метод М.М. Андријашева и то варијанта коју овде називамо основном, се користио веома често у Русији за време Совјетске ере. Када се израчуна поправни проток, алгебарско сабирање се врши као што је случај и код Харди Крос методе (дато у поглављу В.1.1).

За гасоводну мрежу приказану на слици 35 ће се прорачунати стационарни распоред протока по цевима мреже модификованом методом М.М. Андријашева (прорачунати расподелу протока по цевима мреже за познате пречнике). Изабране контуре се дају на слици 35 (доњи десни угао; римски бројеви са апострофима).

У случају методе М.М. Андријашева више цеви је заједничко за више контура. Овима се донекле може очекивати брже уравнотежење мреже у пракси. Међутим ово најчешће није случај. Метод је сложенији од Харди Кросовог, тако да се лакше може погрешити, а не убрзава конвергенцију у итеративном поступку. Контура I' почиње од нпр. чвора I преко цеви 4, 5, 6, 8, 3, контура II' почиње од нпр. референтног чвора преко цеви 1, 6, 8, 7, 4, 2, и контура III' почиње такође у референтном чвору и иде преко цеви 1, 5, 7, 3, 2.



Прорачун се одвија преко једначине (157):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_I(-Q_3, Q_4, -Q_5, Q_6, -Q_8)}{\partial(\Delta Q_I)} & \frac{\partial F_I(-Q_4, Q_6, Q_8)}{\partial(\Delta Q_{II})} & \frac{\partial F_I(Q_3, -Q_5)}{\partial(\Delta Q_{III})} \\ \frac{\partial F_{II}(-Q_4, Q_6, Q_8)}{\partial(\Delta Q_I)} & \frac{\partial F_{II}(-Q_1, -Q_2, -Q_4, Q_6, Q_7, Q_8)}{\partial(\Delta Q_{II})} & \frac{\partial F_{II}(Q_1, Q_2, -Q_7)}{\partial(\Delta Q_{III})} \\ \frac{\partial F_{III}(Q_3, -Q_5)}{\partial(\Delta Q_I)} & \frac{\partial F_{III}(Q_1, Q_2, -Q_7)}{\partial(\Delta Q_{II})} & \frac{\partial F_{III}(Q_1, -Q_2, -Q_3, Q_5, -Q_7)}{\partial(\Delta Q_{III})} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_{I'} \\ \Delta_{II'} \\ \Delta_{III'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{I'} \\ F_{II'} \\ F_{III'} \end{bmatrix} \quad (157)$$

Овде треба бити врло опрезан. Код метода М.М. Андријашева је прва матрица у претходној једначини симетрична као и код модификованог Харди Крос метода. Међутим чланови ван главне дијагонале нису увек негативни (158) што је увек случај када се модификованом Харди Крос методом прорачунава распоред протока по цевима мреже ако је у питању мрежа која је постављена у једној равни.

$$\begin{bmatrix} 40489565894 & 25862392143 & 11719977603 \\ 25862392143 & 52949765748 & -4166255733 \\ 11719977603 & -4166255733 & 36379348868 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_{I'} \\ \Delta_{II'} \\ \Delta_{III'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3277663792.688400 \\ 1492371894.576840 \\ -2518358643.740400 \end{bmatrix} \quad (158)$$

На пример члан у првом реду и другој колони, односно у другом реду и првој колони се рачуна на следећи начин:  $25862392143 = 4298435730 + 22897756035 - 1333799622$ .

У првој итерацији се на основу израза (158) добија вектор поправки:

$$[\Delta_{I'}, \Delta_{II'}, \Delta_{III'}]^T = [-0.136692092, 0.09381301, -0.014444497]^T$$

Детаљан прорачун за прву итерацију се даје у табели 10.



Табела 10. Прорачун мреже са слике 35 по методи М.М. Андријашева

Итерација 1							
Контура	цев	Q	$F = p_1^2 - p_2^2$	$F' = \left  \frac{\partial(p_1^2 - p_2^2)(Q)}{\partial(Q)} \right $	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$Q_1$
I'	6	+0,027	65604940	4298435730	+0,136	-0,093‡	+0,070
	8	-0,166	-2096864105	22897756035	+0,136	-0,093‡	-0,123
	3	-0,194	-1264933339	11839776055	+0,136	+0,014=	-0,043
	4	+0,027	20357137	1333799622	+0,136	+0,093‡	+0,258
	5	-0,027	-1828425	119798452	+0,136	-0,014±	+0,094
	$\Sigma$		-3277663792	40489565894			
II'	6	+0,027	65604940	4298435730	-0,093	+0,136±	+0,070
	8	-0,166	-2096864105	22897756035	-0,093	+0,136=	-0,123
	7	+0,305	2399620963	14293015047	-0,093	-0,014=	+0,197
	4	-0,027	-20357137	1333799622	-0,093	-0,136±	-0,258
	2	-0,277	-200615476	1314432601	-0,093	+0,014=	-0,357
	1	+0,277	1344982709	8812326713	-0,093	+0,014±	+0,198
	$\Sigma$		1492371894	52949765748			
III'	1	+0,277	1344982709	8812326713	+0,014	-0,093‡	+0,198
	5	+0,027	1828425	119798452,1	+0,014	-0,136=	-0,094
	7	-0,305	-2399620963	14293015047	+0,014	+0,093‡	-0,197
	3	-0,194	-1264933339	11839776055	+0,014	+0,136=	-0,043
	2	-0,277	-200615476	1314432601	+0,014	-0,093‡	-0,357
	$\Sigma$		-2518358643	36379348868			

## B.2. Метод чворова (The Node Method)

За методу чворова важе иста алгебарска правила за алгебарско сабирање поправки дата у поглављу B.1.1, са тиме да то сада нису поправки протока већ падова притисака код водоводних мрежа, односно разлика квадрата притисака код гасоводних мрежа.

За разлику од свих осталих метода који су обрађивани у дисертацији, метод чворова се једини заснива на решењу једначина чворова. Сви остали методи описани у дисертацији се заснивају на решењу једначина контура.

Метод чворова је први пут у инжењерску праксу уведен 1968. године (Shamir-Howard 1968). Првобитна верзија овога метода је концептуално врло слична основном Харди Крос методу из 1936. године. Овиме је практично начињен први корак ка развоју нових метода за пројектовање цевоводних прстенстих мрежа. Идеја је слична Харди Кросовој с тиме да се уместо протока по цевима претпостављају падови притисака код водоводних мрежа, односно разлике квадрата притисака код гасоводних мрежа. Ови алгебарски збирови падова притисака код водоводних мрежа, односно квадрата разлике падова

притисака код гасоводних мрежа морају да се одаберу тако да задовоље други Кирхофов закон за сваку контуру. Даље се за разлику од Харди Кросове методе код које се налазе поправке протока, у случају методе чворова налазе поправке падова притисака, тј. разлике квадрата притисака на улазу и излазу цеви код гасоводних мрежа. У свакој итерацији мора супротно од Харди Кросове методе да буде задовољен услов по другом Кирхофовом закону, док услов по првом бива задовољен са унапред задатом тачношћу тек на крају прорачуна. Да би прорачун могао да отпочне, након претпоставки падова притисака, тј. разлике квадрата притисака на улазу и излазу цеви, потребно је полазне једначине које су, за све методе досад приказане у овој дисертацији, биле у облику  $\Delta p = f(Q)$  када су у питању водоводне мреже, односно у облику  $\Delta(p_1^2 - p_2^2) = f(Q)$  када су у питању гасоводи, трансформисати у облик  $Q = f(\Delta p)$ , тј. у  $Q = f(p_1^2 - p_2^2)$ . Односно укратко речено у свим једначинама треба експлицитно изразити проток  $Q$ . Тако нпр. за гасоводне мреже Реноарова једначина гласи (159):

$$Q = \left( \frac{(p_1^2 - p_2^2) \cdot D_{in}^{4.82}}{4810 \cdot L \cdot \rho_f} \right)^{\frac{1}{1.82}} \quad (159)$$

До сада се Реноарова једначина уобичајено користила у облику (109). Још простије је трансформисати Дарси-Вајсбахову једначина када су у питању водоводи пошто је у њој чисто квадратна зависност протока према паду притисака (160):

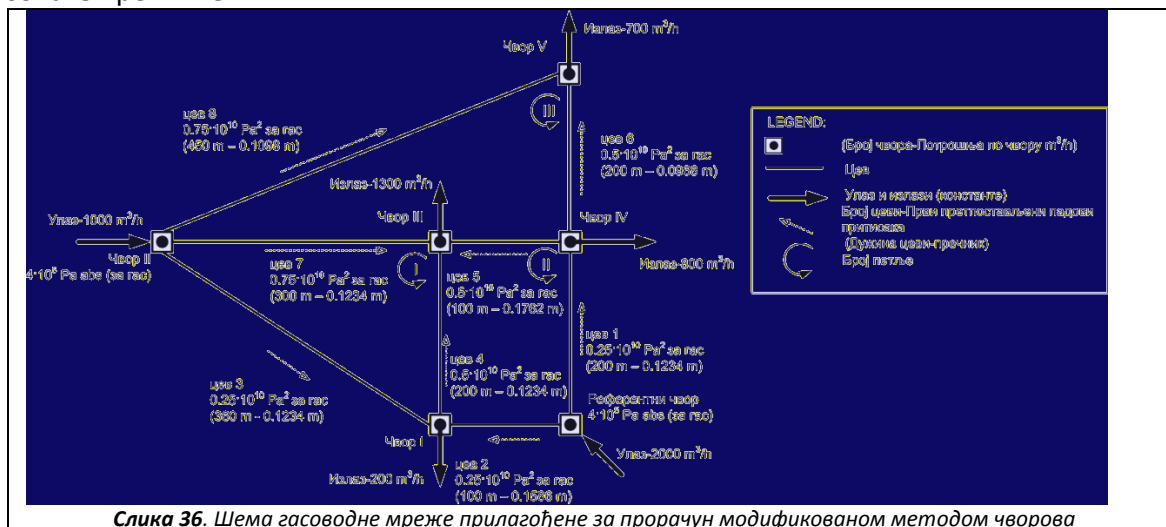
$$Q = \sqrt{\frac{(p_1 - p_2) \cdot D_u^5 \cdot \pi^2}{8 \cdot \lambda \cdot L \cdot \rho}} \quad (160)$$

Претходна једначина је у другачијем облику већ дата (3). У даљем поступку се рачунају поправке падова притисака, односно разлике квадрата притисака на улазу и излазу цеви за сваки чвор (161):

$$\Delta = \frac{F}{F'} = \frac{Q = f(p_1^2 - p_2^2)}{\left| \partial(Q)(p_1^2 - p_2^2) / \partial \Delta(p_1^2 - p_2^2) \right|} \quad (161)$$

У време кад је почео да се примењује метод чворова још није био уведен модификовани Харди Крос метод. У овој дисертацији ће метод чворова бити прилагођен по принципима модификованог Харди Крос метода чиме ће му се значајно убрзати конвергенција. Треба приметити да метод чворова показује нешто слабију брзину конвергенције у односу на све досада приказане методе. Међутим пошто се код свих осталих претпостављају почетни протоци који се за сваку методу ради поређења бирају да буду исти, код метода чворова се бирају падови притисака, односно разлика квадрата притисака на крају и на почетку цеви тако да почетни услови нису једнаки што значи да је поређење само делимично могуће.

Већ познату гасоводну мрежу приказану на слици 36 потребно је режити модификованом методом чворова тј. потребно је прорачунати расподелу протока по цевима мреже за познате пречнике.



Свакој цеву у мрежи са слике 36 придружује се разлика квадрата притисака, тако да њихов алгебарски збир према другом Кирхофовом закону буде једнак нули. Нпр. за контуру I разлика квадрата пада притиска у цеву 3 се претпоставља да је  $0,25 \cdot 10^{10} \text{ Pa}^2$ , за цев 4 се претпоставља  $0,5 \cdot 10^{10} \text{ Pa}^2$  и за цев 7 да је  $0,75 \cdot 10^{10} \text{ Pa}^2$ . Ове вредности су одабране тако да задовољавају услов по другом Кирхофовом закону, односно:

$$\text{За контуру I: } 0,75 \cdot 10^{10} - 0,5 \cdot 10^{10} - 0,25 \cdot 10^{10} = 0$$

$$\text{За контуру II: } 0,5 \cdot 10^{10} - 0,5 \cdot 10^{10} - 0,25 \cdot 10^{10} + 0,25 \cdot 10^{10} = 0$$

$$\text{За контуру III: } 0,5 \cdot 10^{10} - 0,75 \cdot 10^{10} + 0,75 \cdot 10^{10} - 0,5 \cdot 10^{10} = 0$$

Даље се на основу ових претпоставки рачуна проток у цевима; нпр:

$$\text{за цев 1: } Q = \left( \frac{(p_1^2 - p_2^2) \cdot D_{in}^{4.82}}{4810 \cdot L \cdot \rho_r} \right)^{\frac{1}{1.82}} = \left( \frac{0,25 \cdot 10^{10} \cdot 0,1234^{4.82}}{4810 \cdot 200 \cdot 0,64} \right)^{\frac{1}{1.82}} = 0,3905 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$\text{за цев 2: } Q = \left( \frac{(p_1^2 - p_2^2) \cdot D_{in}^{4.82}}{4810 \cdot L \cdot \rho_r} \right)^{\frac{1}{1.82}} = \left( \frac{0,25 \cdot 10^{10} \cdot 0,1586^{4.82}}{4810 \cdot 100 \cdot 0,64} \right)^{\frac{1}{1.82}} = 1,1108 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$\text{за цев 3: } Q = \left( \frac{(p_1^2 - p_2^2) \cdot D_{in}^{4.82}}{4810 \cdot L \cdot \rho_r} \right)^{\frac{1}{1.82}} = \left( \frac{0,25 \cdot 10^{10} \cdot 0,1234^{4.82}}{4810 \cdot 360 \cdot 0,64} \right)^{\frac{1}{1.82}} = 0,2827 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

итд.

Овако израчунати протоци не задовољавају услов за чворове према првом Кирхофовом закону, тако да се корекција разлике квадрата притисака рачуна према једначини (161) када је у питању основна замисао као и код основног Харди Крос метода. Кад је у питању модификована верзија методе чворова, тада се еквивалентно као и код модификованог Харди Крос метода примењује матрична једначина (162):

$$\begin{bmatrix} 3.69087 \cdot 10^{-10} & -6.21 \cdot 10^{11} & -6.28 \cdot 10^{11} & 0 & 0 \\ -6.21372 \cdot 10^{11} & 1.286 \cdot 10^{-10} & -4.19 \cdot 10^{11} & 0 & -2.46 \cdot 10^{11} \\ -6.28 \cdot 10^{11} & -4.18688 \cdot 10^{11} & 3.40752 \cdot 10^{-10} & -2.3608 \cdot 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & -2.36 \cdot 10^{-10} & 3.54921 \cdot 10^{-10} & -3.30 \cdot 10^{11} \\ 0 & -2.46 \cdot 10^{11} & 0 & -3.30 \cdot 10^{11} & 5.76114 \cdot 10^{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \tilde{p}_1 \\ \Delta \tilde{p}_2 \\ \Delta \tilde{p}_3 \\ \Delta \tilde{p}_4 \\ \Delta \tilde{p}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,766526052 \\ -0,912166138 \\ 2,930233439 \\ -2,280503105 \\ 0,441722506 \end{bmatrix} \quad (162)$$

Главна дијагонала одговара чворовима мреже, с тим да се један чвор као референтни изоставља из прорачуна како би се обезбедила линеарна независност између редова у матрици. Тако да, у првој матрици у изразу (162), члан у првом реду и првој колони одговара првом чвору, у другом реду и другој колони другом чвору, итд, а све према аналогији са модификованим Харди Крос методом.

Табела 11. Прорачун мреже са слике 41 по модификованој методи чворова

Итерација 1							
Чвор	Цев	$p_1^2 - p_2^2$	$^a F=Q$	$^b F'$	$^c \Delta_{p1}$	$^d \Delta_{p2}$	$(p_1^2 - p_2^2)_1$
1	2	$+0,25 \cdot 10^{10}$	1,1108	$2,44 \cdot 10^{-10}$	$-3,61 \cdot 10^9$		$-1,11 \cdot 10^9$
	3	$+0,25 \cdot 10^{10}$	0,2827	$6,21 \cdot 10^{-11}$	$-3,61 \cdot 10^9$	$-6,99 \cdot 10^8 =$	$-1,81 \cdot 10^9$
	4	$-0,50 \cdot 10^{10}$	-0,5715	$6,28 \cdot 10^{-11}$	$-3,61 \cdot 10^9$	$+9,70 \cdot 10^9 \ddagger$	$1,09 \cdot 10^9$
Константан излаз, проток			-0,0555				
$\Sigma$			0,7665	$3,69 \cdot 10^{-10}$			
2	3	$-0,25 \cdot 10^{10}$	-0,2827	$6,21 \cdot 10^{-11}$	$+6,99 \cdot 10^8$	$+3,61 \cdot 10^9 \ddagger$	$1,81 \cdot 10^9$
	7	$-0,75 \cdot 10^{10}$	-0,5715	$4,19 \cdot 10^{-11}$	$+6,99 \cdot 10^8$	$+9,70 \cdot 10^9 \ddagger$	$2,90 \cdot 10^9$
	8	$-0,75 \cdot 10^{10}$	-0,3357	$2,46 \cdot 10^{-11}$	$+6,99 \cdot 10^8$	$+7,80 \cdot 10^9 \ddagger$	$9,99 \cdot 10^8$
Константан улаз, проток			0,2777				
$\Sigma$			-0,9121	$1,28 \cdot 10^{-10}$			
3	4	$+0,50 \cdot 10^{10}$	0,5715	$6,28 \cdot 10^{-11}$	$-9,70 \cdot 10^9$	$+3,61 \cdot 10^9 \mp$	$-1,09 \cdot 10^9$
	5	$+0,50 \cdot 10^{10}$	2,1483	$2,36 \cdot 10^{-10}$	$-9,70 \cdot 10^9$	$+7,52 \cdot 10^8 \mp$	$-3,95 \cdot 10^9$
	7	$+0,75 \cdot 10^{10}$	0,5715	$4,19 \cdot 10^{-11}$	$-9,70 \cdot 10^9$	$-6,99 \cdot 10^8 =$	$-2,90 \cdot 10^9$
Константан излаз, проток			-0,3611				
$\Sigma$			2,9302	$3,40 \cdot 10^{-10}$			
4	1	$+0,25 \cdot 10^{10}$	0,3905	$8,58 \cdot 10^{-11}$	$-7,52 \cdot 10^8$		$1,75 \cdot 10^9$
	5	$-0,50 \cdot 10^{10}$	-2,1483	$2,36 \cdot 10^{-10}$	$-7,52 \cdot 10^8$	$+9,70 \cdot 10^9 \ddagger$	$3,95 \cdot 10^9$
	6	$-0,50 \cdot 10^{10}$	-0,3004	$3,30 \cdot 10^{-11}$	$-7,52 \cdot 10^8$	$+7,80 \cdot 10^9 \ddagger$	$2,05 \cdot 10^9$
Константан излаз, проток			-0,2222				
$\Sigma$			-2,2805	$3,54 \cdot 10^{-10}$			
5	6	$0,50 \cdot 10^{10}$	0,3004	$3,30 \cdot 10^{-11}$	$-7,80 \cdot 10^9$	$+7,52 \cdot 10^8 \mp$	$-2,05 \cdot 10^9$
	8	$0,75 \cdot 10^{10}$	0,3357	$2,46 \cdot 10^{-11}$	$-7,80 \cdot 10^9$	$-6,99 \cdot 10^8 =$	$-9,99 \cdot 10^8$
Константан излаз, проток			-0,1944				
$\Sigma$			0,4417	$5,76 \cdot 10^{-11}$			

Јасно је да се изостављањем чвора који је на слици 36 обележен као референтни ништа не губи, цеви 1 и 2 које су спојене са референтним чвором, спојене су и са чворовима IV и I респективно, тако да се преко тих чворова добијају рачунски протоци кроз те цеви. Прва матрица у изразу (162) је симетрична у односу на главну дијагоналу. Остали чланови у истој колони и реду представљају чворове који су директно цевима повезане са разматраним чвором. Тако нпр. чвор I је повезан са чворовима II и III, итд., до чвора V који је повезан са чворовима II и IV.

За алгебарско сабирање поправки се примењују исти принципи као и код Харди Кросовог метода, док се код модификоване методе чворова поправке рачунају према матричној једначини (163):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_I(C_1, C_3, C_4)}{\partial(C_1)} & \frac{\partial F_I(-C_3)}{\partial(\Delta C_2)} & \frac{\partial F_I(-C_3)}{\partial(\Delta C_3)} & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_{II}(-C_3)}{\partial(\Delta C_1)} & \frac{\partial F_{II}(C_3, C_7, C_8)}{\partial(\Delta C_2)} & \frac{\partial F_{II}(-C_7)}{\partial(\Delta C_3)} & 0 & \frac{\partial F_{II}(-C_8)}{\partial(\Delta C_5)} \\ \frac{\partial F_{III}(-C_3)}{\partial(\Delta C_1)} & \frac{\partial F_{III}(-Q_7)}{\partial(\Delta Q_2)} & \frac{\partial F_{III}(C_6, C_5, C_7)}{\partial(\Delta C_3)} & \frac{\partial F_{III}(-C_5)}{\partial(\Delta C_4)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_{IV}(-C_5)}{\partial(\Delta C_3)} & \frac{\partial F_{IV}(C_1, C_5, C_6)}{\partial(\Delta C_4)} & \frac{\partial F_{IV}(-C_6)}{\partial(\Delta C_5)} \\ 0 & \frac{\partial F_{VI}(-C_8)}{\partial(\Delta C_2)} & 0 & \frac{\partial F_V(-C_6)}{\partial(\Delta C_4)} & \frac{\partial F_V(C_6, Q_8)}{\partial(\Delta C_5)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_I^{(m)} \\ \Delta_{II}^{(m)} \\ \Delta_{III}^{(m)} \\ \Delta_{IV}^{(m)} \\ \Delta_V^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_I^{(m-1)} \\ F_{II}^{(m-1)} \\ F_{III}^{(m-1)} \\ F_{IV}^{(m-1)} \\ F_V^{(m-1)} \end{bmatrix} \quad (163)$$

Матрична једначина (163) се односи на мрежу са слике 36 где је са С обележена разлика квадрата притисака на почетку и крају цеви. Прва матрица из израза (163) је симетрична у односу на главну дијагоналу, и то тако да важи (164):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_{II}(-C_3)}{\partial(\Delta C_1)} &= \frac{\partial F_I(-C_3)}{\partial(\Delta C_2)} \\ \frac{\partial F_{III}(-C_3)}{\partial(\Delta C_1)} &= \frac{\partial F_I(-C_3)}{\partial(\Delta C_3)} \\ \frac{\partial F_{III}(-C_7)}{\partial(\Delta C_2)} &= \frac{\partial F_{II}(-C_7)}{\partial(\Delta C_3)} \\ &\vdots \\ \frac{\partial F_V(-C_6)}{\partial(\Delta C_4)} &= \frac{\partial F_{IV}(-C_6)}{\partial(\Delta C_5)} \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

### В.3. Обједињени метод чворова и петљи (The Node-Loop Method)

Метод чворова и петљи су први у праксу пројектовања водовода увели Вуд и Чарлс (Wood-Charles 1972). Вуд и Рејес су касније 1981. године исти метод унапредили (Wood-Rayes 1981). У овој дисертацији се износи нови метод који обједињује чворове и петље, тако да су наведени радови послужили само као основна идеја. Све методе које су претходно приказане у овој дисертацији се суштински свде на Харди Кросову методу пошто се у свакој прво израчунава тзв. поправка која се затим алгебарски сабира са величином из претходне итерације на основу посебних правила која су такође развијена у

овој дисертацији (поглавље В.1.1.). Поправка се може односити на различите величине, најчешће је то проток, или пречник када је у питању проблем оптимизације мреже који ће бити приказан у наредним поглављима (поглавље Г), док је код методе чворова ова величина у случају гасоводних мрежа разлика квадрата притисака, а код водоводних разлика притисака. Из овога се може извести закључак да је и метода чворова која је у овој дисертацији објашњена посебно у глави В.2. у ствари само подваријанта Харди Кросове методе. Најзад, метода чворова је само на први поглед различита од Харди Кросових метода, али свако ко концепцијски добро разуме Харди Кросову методу може врло лако да овлада и методом чворова.

Обједињена метода чворова и петљи је конципирана тако да се као резултат не добија поправка тражене величине, већ сама та величина. На овај начин је избегнута примена сложене алгебарске шеме за сабирање. Метода није значајније ефикаснија што се потребног броја итерација тиче од модификоване варијанте Харди Кросове методе, али није ни ништа мање ефикасна. На основу целокупног истраживања спроведеног за потребе ове дисертације као и консултација бројне литературе, овде развијена обједињена метода чворова и петљи се показала као најбоља од свих метода за прорачун прстенастих мрежа<sup>м</sup>.

У досадшњем тексту су се више пута помињале матрице чворова и матрице прстенова. Оне су до сада првенствено имале контролну улогу, тј. одговарајуће једначине у којима оне егзистирају су се користиле за проверу да ли је у свакој итерацији задовољен први Кирхофов закон код метода који се базирају на решењу једначина петљи какве су све методе које су досад приказане осим методе чворова. Код метода чворова наведени изрази служе за проверу првог Кирхофовог закона који мора бити задовољен у свакој итерацији пошто је ова метода како јој и само име говори заснована на решењу једначина чворова. У обједињеној методи чворова и прстенова ове матрице су обједињене у једну уз одређене модификације.

Као што је већ речено, у случају цевоводне мреже прстенастог типа, две тзв. тополошке матрице је могуће успоставити, и то, матрицу чворова и матрицу прстенова. Матрица чворова се успоставља на основу првог Кирхофовог закона, док се матрица прстенова успоставља на основу другог Кирхофовог закона. Први Кирхофов закон мора бити задовољен у свакој итерацији, док други бива задовољен тек на крају итеративног поступка са задовољавајућом тачношћу при чиме се тек тада сматра да је мрежа уравнотежена те се прорачун прекида. Изнета претпоставка важи у случају прорачуна мреже методама које су засноване на решавању једначина прстенова, док је код метода заснованих на решавању једначина чворова ситуацију обрнута, тј. услов по другом Кирхофовом закону мора бити задовољен у свакој итерацији а услов по првом тек на крају прорачуна.

---

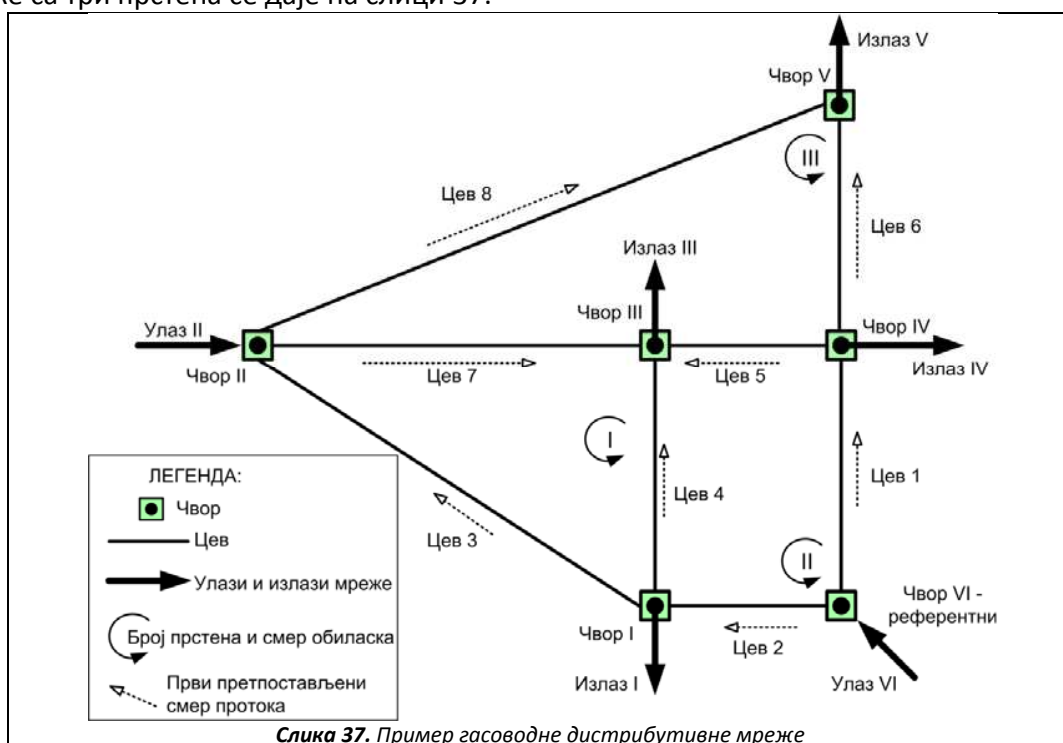
<sup>м</sup> У прилогу видети пример 20 у коме се даје поставка за прорачун стационарне расподеле протока гаса у једној простијој мрежи

Овде се приказује врло ефикасан метод који се заснива на решавању обједињене матрице чворова и прстенова. Метод спада у тзв. методе засноване на решавању једначина прстенова, док се једначине чворова користе у самом прорачуну али само као помоћне.

Обједињени метод чворова и петљи доноси значајна побољшања у односу на данас највише коришћени модификовани Харди Крос метод. Подсетимо да се Харди Крос метод заснива на решавању једначина прстенова, док се једначине чворова уопште и не користе у самом прорачуну. Приликом прорачуна мреже модификованим Харди Крос методом, матрица чворова има само контролну улогу, односно преко ње се проверава да ли је у свакој итерацији задовољен услов по првом Кирхифовом закону.

Подсетимо да  $\sqrt{\Delta c}$  не представља пад притиска у цевоводу. Иако је димензионо једнак паду притиска  $\Delta p$  ( $P_a$ ), нумеричка вредност им се разликује. Вредност параметра  $\sqrt{\Delta c}$  се стога може назвати псеудо-падом притиска и може се користити у прорачуну пошто се на тај начин искориштава чињеница да кад  $\sqrt{\Delta c} \rightarrow 0$  тада и  $\Delta c \rightarrow 0$ .

Да би се одредио притисак у чворовима мреже, треба поћи од познатог притиска у улазном чвору и користити вредности протока кроз цеви мреже који се добијају након завршетка прорачуна. Овде ће се прорачунати већ добро позната гасна дистрибутивна мреже са три прстена се даје на слици 37.



Први задатак пројектанта гасне дистрибутивне мреже је да осмисли трасе по којима ће ићи цеви и да чворовима мреже придружи највеће потрошње гаса (излазе из мреже) које могу да се јаве. Такође треба одредити и један или више улазних чворова у мрежу (који се

у методу третирају као негативни излази). На основу тако дефинисаних улаза и излаза по чворовима, треба одредити први иницијални распоред протока по цевима мреже тако да буде задовољен први Кирхофов закон за сваки чвор. За овако одабране протоке по цевима, други Кирхофов закон у највећем броју случајева није задовољен. Да би се и он задовољио са одређеном тачношћу али тако да се не поремети услов по првом Кирхофовом закону, потребно је извршити уравнотежење мреже које се овде врши користећи обједињену методу чворова и прстенова.

Граф мреже у општем случају има  $X$  грана (цеви) и  $Y$  чворова. У нашем примеру, цевоводна мрежа има  $X=8$  цеви и  $Y=6$  чворова. Граф са  $Y$  чворова (у нашем примеру б) има  $Y-1$  независних чворова (у нашем примеру 5) и  $X-Y+1$  независних прстенова (у нашем примеру 3). Стабло графа се састоји од било којих цеви које су одабране тако да пролазе кроз све чворове мреже (спајају их) али тако да не затварају ниједну контуру (не праве прстенове), односно тако да се цеви које чине стабло графа нигде не пресецају међусобно. Цеви које не припадају стаблу су гране графа. Број грана је  $X-Y+1$  (у нашем примеру 3), односно идентичан је броју независних контура (прстенова) мреже. Број независних прстенова мреже је идентичан броју грана графа. Независни прстен се састоји из цеви које чине стабло и затвара се једном граном графа.

Као што је већ речено, мрежа из нашег примера има шест чворова од којих је пет линеарно независних. Један чвор се може изоставити из прорачуна и тако да тиме ниједна информација о мрежи не буде изгубљена. Матрица са укљученим свим чворовима мреже се назива проширеном матрицом чворова. Редови у матрици чворова у коју су укључени сви чворови су линеарно зависни. Управо због тога се мора изоставити било који ред ове матрице како би се успоставила линеарна независност између редова матрице чворова. Ово се може објаснити врло просто пошто у мрежи не постоје двосмерно напajане деонице. Нпр. цев 6 се налази између чворова IV и V. Уколико гас пролази кроз чвор IV и улази у цев 6, без даље дискусије се изводи закључак да гас даље иде ка чвору V и у њега улази. Значи ако се каже да је чвор IV излазни ка цевима 6, не мора се експлицитно рећи да је чвор V улазни за исту цев пошто се то свакако подразумева. Први Кирхофов закон за све чворове мреже приказане на слици 1 се може записати сетом једначина (165):

$$\begin{aligned}
 \text{node}_I &\sim -Q_I + Q_2 - Q_3 - Q_4 = 0 \\
 \text{node}_{II} &\sim Q_{II} + Q_3 - Q_7 - Q_8 = 0 \\
 \text{node}_{III} &\sim -Q_{III} + Q_4 + Q_5 + Q_7 = 0 \\
 \text{node}_{IV} &\sim -Q_{IV} + Q_1 - Q_5 - Q_6 = 0 \\
 \text{node}_V &\sim -Q_V + Q_6 + Q_8 = 0 \\
 \text{node}_{VI} &\sim Q_{VI} - Q_1 - Q_2 = 0
 \end{aligned}
 \tag{165}$$

Чвор VI се изоставља у складу са претходном дискусијом како би се обезбедила линеарна независност редова у матрици чворова (166):



$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad (166)$$

Први Кирхофов закон који је суштински представљен матрицом чворова [N] мора бити задовољен у свакој итерацији пошто обједињена метода чворова и петљи припада групи метода код којих се тражи решење једначина петљи како је већ објашњено. Други Кирхофов закон за полазне претпостављене протоке се може представити сетом једначина (167):

$$\begin{aligned} \text{loop}_I &\sim -c_3 + c_4 - c_7 = C_I \\ \text{loop}_{II} &\sim c_1 - c_2 - c_4 + c_5 = C_{II} \\ \text{loop}_{III} &\sim -c_5 + c_6 + c_7 - c_8 = C_{III} \end{aligned} \quad (167)$$

Суштина другог Кирхофовог закона такође може бити представљена матрицом контура (168):

$$[L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ +1 & -1 & 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & +1 & -1 \end{bmatrix} \quad (168)$$

Други Кирхофов закон мора бити задовољен са унапред дефинисаном тачношћу тек на крају прорачуна (тј.  $C_I \rightarrow 0$ ,  $C_{II} \rightarrow 0$  и  $C_{III} \rightarrow 0$ ). Обједињена матрица чворова и прстенова се добија на основу матрице чворова, матрице прстенова и првог извода по протоку функције притиска (169):

$$[NL] = \begin{bmatrix} 0 & +1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 \cdot |c'_3| & +1 \cdot |c'_4| & 0 & 0 & -1 \cdot |c'_7| & 0 \\ +1 \cdot |c'_1| & -1 \cdot |c'_2| & 0 & -1 \cdot |c'_4| & +1 \cdot |c'_5| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \cdot |c'_5| & +1 \cdot |c'_6| & +1 \cdot |c'_7| & -1 \cdot |c'_8| \end{bmatrix} \quad (169)$$

Првих пет редова обједињене матрице чворова и прстенова [NL] се добија директно из матрице чворова [N], док се остала три реда добијају од матрице прстенова [L] и то тако што се сваки члан ове матрице помножи одговарајућим првим изводом по протоку ( $c'$ ) функције притиска (у нашем случају то је Реноарова једначина). Прва колона обједињене матрице чворова и прстенова [NL] одговара цеви 1, друга цеви 2, итд, све до последње осме колоне која одговара цеви 8. Да би се добили непознати протоци по цевима мреже на основу једначине (170), потребно је дефинисати и тзв. вектор матрицу која се налази са десне стране једнакости у истој једначини.

$$[NL] \times [Q] = [V] \quad (170)$$

Матрица [V] се увек састоји од само једне колоне (171):

$$[V] = \begin{bmatrix} |Q_I| \\ -|Q_{II}| \\ |Q_{III}| \\ |Q_{IV}| \\ |Q_V| \\ -C_I + \left( -|c_3| \cdot |c'_3| + |c_4| \cdot |c'_4| - |c_7| \cdot |c'_7| \right) \\ -C_{II} + \left( |c_1| \cdot |c'_1| - |c_2| \cdot |c'_2| - |c_4| \cdot |c'_4| + |c_5| \cdot |c'_5| \right) \\ -C_{III} + \left( -|c_5| \cdot |c'_5| + |c_6| \cdot |c'_6| + |c_7| \cdot |c'_7| - |c_8| \cdot |c'_8| \right) \end{bmatrix} \quad (171)$$

Матрица [V] у случају нашег примера има 8 редова, односно онолико колико има цеви у оквиру прстенастог дела мреже. Првих пет редова представљају константне улазе, односно излазе по чворовима, и то тако да се излази тј. чворне потрошње гаса узимају са позитивним предзнаком, а улази са негативним. У нашој мрежи су чворови II и VI улазни, али се чвор VI изоставља из прорачуна из истог разлога који је објашњен приликом успостављања матрице чворова [N]. Непозната матрица протока по цевима прстенастог дела мреже се даље добија као (172):

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = \text{inv}[NL] \times [V] \quad (172)$$

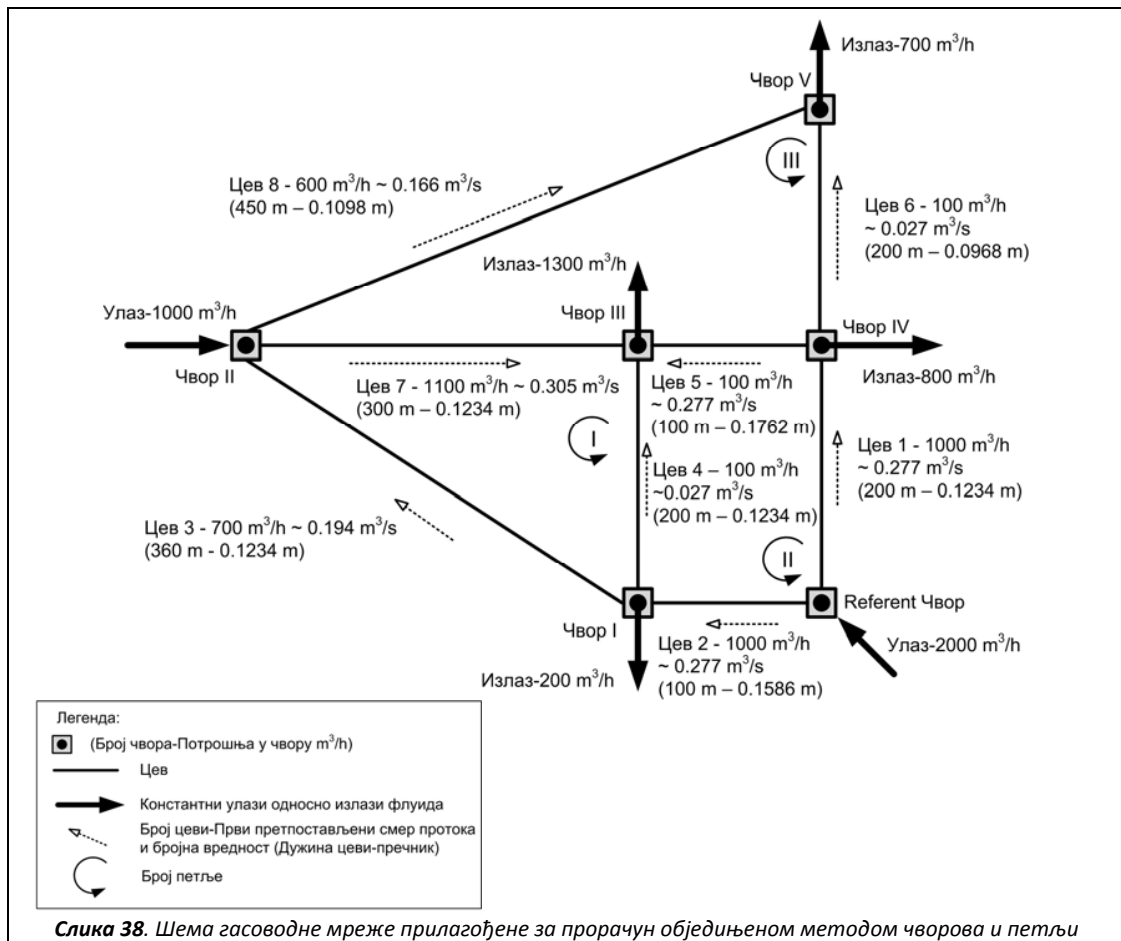
Уколико се приликом прорачуна појави негативан предзнак (-) испред било ког од протока  $Q$  у оквиру матрице  $[Q]$ , то значи да се променио смер протока кроз разматрану цев у односу на смер у претходној итерацији (односно ако се негативан предзнак појави у првој итерацији, то значи да се смер протока у тој конкретној цеви променио у односу на први иницијални распоред протока који је приказан на слици 1). Прорачун се наставља све док вредности алгебарских збирова функција протока за све контуре не буду приближно једнаки нули са унапред договореном толеранцијом (тј. да  $C_I \rightarrow 0$ ,  $C_{II} \rightarrow 0$  и  $C_{III} \rightarrow 0$ ), односно када се вредности чланова у матрици  $[Q]$  стабилишу око неке вредности.

Боулос и сарадници у својој књизи (Boulos et al 2006) дају приказ различитих метода који се користе за прорачун водоводних мрежа. За разлику од приступа који је приказан у нашем чланку, Боулос и сарадници (Boulos et al 2006) уместо изостављања једног чвора из прорачуна како би се осигурало да обједињена матрица чворова и контура буде квадратна  $[NL]$ , уводе један додатни прстен, тзв. псеудо-прстен. Да би се увео овај псеудо-прстен морају постојати бар два чвора која су на истом притиску што практично значи да таква мрежа мора да има најмање два улазна чвора. Метјус и Келер (Mathews-Köhler 1995) врше прорачун цевоводног система без увођења псеудо-прстенова, слично као у овој дисертацији.

Главна предност обједињеног метода чворова и прстенова се не огледа у смањењу броја итерација потребног да се прорачунају протоци за које је мрежа у равнотежном стању. Број итерација потребних за прорачун је уопштено гледано нешто мањи него код прорачуна модификованим Харди Крос методом. Ипак, код модификованог Харди Крос метода се као резултат прорачуна у свакој итерацији добијају поправке протока  $\Delta Q$ , а не сами протоци  $Q$ . Ове поправке протока треба затим сабрати помоћу не тако простих алгебарских правила. Применом обједињеног метода чворова и петљи као резултат прорачуна се добија директно проток  $Q$  у свакој итерацији уз чак, како је већ речено, извесно смањење броја потребних итерација у поређењу са Харди Крос методом који се данас узима као стандард за пројектовање гасних дистрибутивних мрежа прстенастог типа (нарочито у пројектанским предузећима у Србији).

Наравно уколико код појединих мрежа дође до извесних нелогичности приликом рада или прорачуна треба мрежу прорачунавати применом више различитих метода и онда тумачити разлике у резултатима ако постоје (Калуђерчић 2002).

У дисертацији се често дају поређења гасоводних мрежа са водоводним мрежа. За већ више пута разматрану мрежу (Слика 38), показаће се прорачун расподеле стационарног протока у првом случају да се дистрибуира природни гас, а затим и вода. Упоредиће се добијени резултати. Пошто је мрежа иста мрежа до сада прорачунавана применом оригиналне верзије Харди Крос метода, модификоване верзије Харди Крос метода, затим методом М.М. Андријашева, модификованом методом чворова и сада обједињеном методом чворова и прстенова, упоредиће се брзина конвергенције ка стационарном стању протока гаса по цевима мреже за сваку од наведених метода.



Слика 38. Шема гасоводне мреже прилагођене за прорачун обједињеном методом чворова и петљи

Почетни изрази у којима фигуришу матрице чворова (173) и петљи (174-5) се могу написати као:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 = 0,277 \\ Q_2 = 0,277 \\ Q_3 = 0,194 \\ Q_4 = 0,027 \\ Q_5 = 0,277 \\ Q_6 = 0,027 \\ Q_7 = 0,305 \\ Q_8 = 0,166 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_I = 200/3600 \\ Q_{II} = -1000/3600 \\ Q_{III} = 1300/3600 \\ Q_{IV} = 800/3600 \\ Q_V = 700/3600 \end{bmatrix} \quad (173)$$

Узимајући у обзир у ком облику је написана друга матрица у изразу (174), овај израз важи само за гасоводне мреже.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{ref}^2 - p_{IV}^2 \\ p_{ref}^2 - p_I^2 \\ \vdots \\ p_{II}^2 - p_V^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (174)$$

У случају дистрибуције течних флуида горњи израз се може написати као (175):

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{\text{ref}} - p_{IV} \\ p_{\text{ref}} - p_I \\ \vdots \\ p_{II} - p_V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (175)$$

Претходне три, односно суштински две, једна матрична једначина чворова која важи како за гасоводне, тако и за водоводне мреже, и матрична једначина петљи (174) која важи за гасоводне мреже, као и матрична једначина петљи (175) која важи за водоводне мреже у свим претходно приказаним методама служи за проверу тачности поступка. Логично је било запитати се да ли оне могу бити употребљене и за сам прорачун. То се може урадити преко матричне једначине (176) која важи за гасоводне мреже:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1183977605,5 & 1333799622 & 0 & 0 & -1429301504,7 & 0 \\ 8812326713 & -1314432601 & 0 & -1333799622 & 119798452,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -119798452,1 & 4298435730 & 1429301504,7 & -2289775603,5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,055 \\ -0,277 \\ 0,361 \\ 0,222 \\ 0,194 \\ -2988241676 \\ 923187587,8 \\ 300557365,7 \end{bmatrix} \quad (176)$$

Првих пет редова у првој матрици из матричне једначине је идентично преписано из матрице чворова, тј. из прве матрице из матричне једначине (173). Остали редови су из матрице петљи у којима је сваки члан помножен са првим изводом функције притиска одговарајуће цеви где се проток посматра као променљива, односно када су у питању гасоводи боље речено разлике квадрата улазног и излазног притиска одговарајуће цеви. За водоводне мрежу иста матрична једначина гласи (177):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -54299272,12 & 4978573,196 & 0 & 0 & -70157780,57 & 0 \\ 42622924,2 & -5879413,04 & 0 & -4978573,196 & 429677,4552 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -429677,4552 & 16717415,32 & 70157780,57 & -106491089,7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,055 \\ -0,277 \\ 0,361 \\ 0,222 \\ 0,194 \\ -15928498,86 \\ 5040086,332 \\ 2070510,915 \end{bmatrix} \quad (177)$$

Друга по реду матрица у матричним изразима је тзв. вектор матрица непознатих протока. Важно је напоменути да ово нису поправке протока које касније по посебним алгебарским правилима треба додавати на протоке који су били актуелни у претходној итерацији, односно на првопретпостављене протоке по цевима уколико се ради о првој итерацији као што је овде случај. Ово је и главно побољшање у односу на претходне методе и у овом делу који се односи на прорачун прстенстих мрежа, ова новина се може сматрати и главним научним доприносом у овом делу доктората.

Бројне вредности се у случају протока гаса узимају из табеле 12.

**Табела 12.** Решење гасоводне дистрибутивне мреже са три петље према обједињеној методи прстенова и чворова (Слика 38)

	Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 1			
				Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
I	3	0,1234	360	-0,19444	-1264933339,23	11839776055	-0,043307855
	4	0,1234	200	+0,02778	+20357137,09	1333799622	+0,25828288
	7	0,1234	300	-0,30556	-2399620963,36	14293015047	-0,197298048
			Σ		-3644197165,50		
II	1	0,1234	200	+0,27778	+1344982709,52	8812326713	+0,198409265
	2	0,1586	100	-0,27778	-200615476,37	1314432601	-0,357146291
	4	0,1234	200	-0,02778	-20357137,09	1333799622	-0,25828288
	5	0,1762	100	+0,02778	+1828425,70	119798452	-0,094469817
			Σ		1125838521,76		
III	5	0,1762	100	-0,02778	-1828425,70	119798452	+0,094469817
	6	0,0968	200	+0,02778	+65604940,93	4298435730	+0,07065686
	7	0,1234	300	+0,30556	+2399620963,36	14293015047	+0,197298048
	8	0,1098	450	-0,16667	-2096864105,78	22897756035	-0,123787585
			Σ		366533372,81		
	Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 2			
				Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
I	3	0,1234	360	-0,043307855	-156904917,94	3455539181	-0,02252766
	4	0,1234	200	+0,25828288	+1173109335,72	8301891430	+0,222632021
	7	0,1234	300	-0,197298048	-773797561,89	9985057887	-0,176199255
			Σ		242406855,89		
II	1	0,1234	200	+0,198409265	+614087396,29	6687432899	+0,254840319
	2	0,1586	100	-0,357146291	-346390930,28	1615251716	-0,300715237
	4	0,1234	200	-0,25828288	-1173109335,72	8301891430	-0,222632021
	5	0,1762	100	-0,094469817	-7569671,91	326858346	-0,037720164
			Σ		-912982541,63		
III	5	0,1762	100	+0,094469817	+7569671,91	326858346	+0,037720164
	6	0,0968	200	+0,07065686	+32767180,23	9242405949	+0,070338261
	7	0,1234	300	+0,197298048	+773797561,89	9985057887	+0,176199255
	8	0,1098	450	-0,123787585	-2302927589,41	17942054130	-0,124106183
			Σ		-1488793175,37		
	Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 3			
				Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
I	3	0,1234	360	-0,02252766	-212911909,40	2021893800	-0,02278105
	4	0,1234	200	+0,222632021	+678130226,18	7349884184	+0,223407512
	7	0,1234	300	-0,176199255	-1285951161,56	9100667243	-0,175998895
			Σ		-820732844,77		
II	1	0,1234	200	+0,254840319	+1001912310,20	8211046571	+0,253811437
	2	0,1586	100	-0,300715237	-258471411,70	1402793769	-0,301744118
	4	0,1234	200	-0,222632021	-678130226,18	7349884184	-0,223407512
	5	0,1762	100	-0,037720164	-4660638,28	153960599	-0,038295296
			Σ		60650034,04		
III	5	0,1762	100	+0,037720164	+4660638,28	153960599	+0,038295296
	6	0,0968	200	+0,070338261	+270590087,41	9208218646	+0,069884511
	7	0,1234	300	+0,176199255	+1285951161,56	9100667243	+0,175998895
	8	0,1098	450	-0,124106183	-1408506432,12	17979911651	-0,124559933
			Σ		152695455,12		

В. Дистрибуција гаса цевоводима; прорачун стационарне расподеле протока у задатој мрежи

Последња матрица у матричним изразима (176-7), у претходном примеру обележена са [V], се добија тако што се прва четири реда односе на потрошњу по чворовима, где су чворови 1, 3, 4 и 5 излазни, тако да се узимају са позитивним предзнаком, док је чвор 2 улазни тако да се узима са негативним предзнаком. Последња три реда се добијају на нешто сложенији начин, и то када је у питању гасоводна мрежа на следећи начин:

Шести ред (први ред после пет редова који се односе на чворове), односи се на петљу I;

-2988241676=

=3644197165,5+(-0,194·11839776055+0,027·1333799622+(-0,305)·14293015047)

Седми ред (други ред после пет редова који се односе на чворове), односи се на петљу II; 923187587,8=-1125838521,7+

+(0,277·8812326713+(-0,277·1314432601)+(-0,027)·1333799622)+0,027·119798452)

Осми ред (трећи ред после пет редова који се односе на чворове), односи се на петљу III; 300557365,7=-366533372,8+

+(-0,027·119798452+0,027·4298435730+0,305·14293015047+(-0,166·22897756035))

Односно у општим ознакама, како је већ и напомено претходно у оквиру општег разматрања обједињеног метода чворова и петљи (178):

$$[V]=\begin{bmatrix} +|Q_{I/I}| \\ -|Q_{II/I}| \\ +|Q_{III/I}| \\ +|Q_{IV/I}| \\ +|Q_{V/I}| \\ -F_I + (-|Q_3| \cdot F_3' + |Q_4| \cdot F_4' - |Q_7| \cdot F_7') \\ -F_{II} + (+|Q_1| \cdot F_1' - |Q_2| \cdot F_2' - |Q_4| \cdot F_4' + |Q_5| \cdot F_5') \\ -F_{III} + (-|Q_5| \cdot F_5' + |Q_6| \cdot F_6' + |Q_7| \cdot F_7' - |Q_8| \cdot F_8') \end{bmatrix} \quad (178)$$

За прве три итерације када је у питању гасоводна мрежа, резултујући вектори непознатих протока гласе; за прву итерацију (179):

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1984092655 \\ 0,3571462917 \\ 0,043307855 \\ 0,258282882 \\ -0,0944698174 \\ 0,070656866 \\ 0,197298048 \\ 0,123787585 \end{bmatrix} \quad (179)$$

У претходној матрици је негативан предзнак само испред члана у петом реду, што значи да се промени смер протока у цеви 5 у односу на претходну итерацију. То даље значи да треба променити предзнак испред одговарајуће, тј. пете цеви у табели 12 у наредној итерацији.

За другу итерацију вектор непознатих протока гласи (180):

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25484 \\ 0,300715 \\ 0,022528 \\ 0,222632 \\ 0,03772 \\ 0,070338 \\ 0,176199 \\ 0,124106 \end{bmatrix} \quad (180)$$

Пошто су предзнаци испред свих протока позитивни значи да се није мењао прорачунски смер протоку у односу на прорачунате смерове из претходне итерације. За трећу итерацију вектор непознатих протока гласи (181):

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,253811 \\ 0,301744 \\ 0,022781 \\ 0,223408 \\ 0,038295 \\ 0,069885 \\ 0,175999 \\ 0,12456 \end{bmatrix} \quad (181)$$

У претходне три матрице (179-181) се бројчане вредности донекле разликују од оних у табели 12 само због различитог заокруживања. Све вредности су из истог *MS Excel* фајла и израчунате су на много децимала, само су овде презентоване са мање децимала како се не би текст преоптеретио.

Крајњи резултати прорачуна се дају у табели 13, како за прорачун протока гаса кроз цеви, тако и за прорачун воде кроз цеви.

**Табела 13.** Крајњи прорачунати протоци за мрежу са слике 38, у случају протока воде и гаса

Цев	1	2	3	4	5	6	7	8
Вода	902,27	1097,73	94,86	802,87	-146,23	248,50	643,36	451,50
Гас	913,72	1086,28	82,01	804,27	-137,86	251,58	633,60	448,42

У табели 12 прорачун је вршен применом Реноарове једначине прилагођене за природни гас. У табели 14 прорачун је вршен преко Колбрук-Вајтове једначине за прорачун Дарсијевог коефицијента хидрауличког отпора, као и Дарси-Вајсбахове формуле како је већ објашњено и уобичајено рађено у овом докторату када су у питању водоводне мреже. У осталоме се прорачун који је спроведен обједињеном методом чворова и петљи ни у чему не разликује у односу на прорачун гасоводних мрежа.

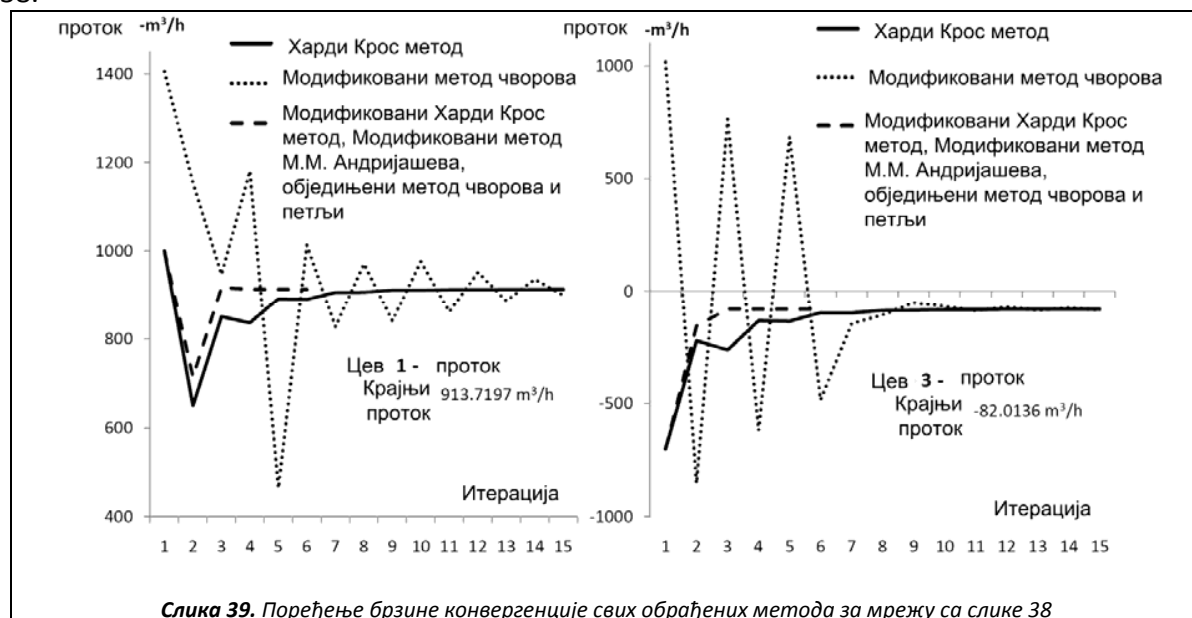
У случају прорачуна водоводне мреже ће се дати само табеларни приказ (Табела 14):



**Табела 14.** Решење водоводне дистрибутивне мреже са три петље према обједињеној методи прстенова и чворова (Слика 38)

	Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 1			
				Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
I	3	0,1234	360	-0,19444	-5279095,9	54299272,12	-0,052496097
	4	0,1234	200	+0,02778	69146,84995	4978573,196	0,249784106
	7	0,1234	300	-0,30556	-10718549,81	70157780,57	-0,204133702
			Σ	-15928498,859737			
II	1	0,1234	200	+0,27778	5919850,583	42622924,2	0,197719798
	2	0,1586	100	-0,27778	-816585,1439	5879413,036	-0,357835758
	4	0,1234	200	-0,02778	-69146,84995	4978573,196	-0,249784106
	5	0,1762	100	+0,02778	5967,742434	429677,4552	-0,092806697
			Σ	5040086,332051			
III	5	0,1762	100	-0,02778	-5967,742434	429677,4552	0,092806697
	6	0,0968	200	+0,02778	232186,3239	16717415,32	0,068304272
	7	0,1234	300	+0,30556	10718549,81	70157780,57	0,204133702
	8	0,1098	450	-0,16667	-8874257,476	106491089,7	-0,126140172
			Σ	2070510,915301			
	Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 2			
				Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
I	3	0,1234	360	-0,052496097	-416023,6857	15849699,8	-0,027443402
	4	0,1234	200	0,249784106	4800902,228	38440414,08	0,221717071
	7	0,1234	300	-0,204133702	-4840373,04	47423556,13	-0,180151417
			Σ	-455494,497491			
II	1	0,1234	200	0,197719798	3030676,207	30656274,61	0,250839527
	2	0,1586	100	-0,357835758	-1342789,99	7505063,208	-0,304716028
	4	0,1234	200	-0,249784106	-4800902,228	38440414,08	-0,221717071
	5	0,1762	100	-0,092806697	-57430,28599	1237632,369	-0,040757377
			Σ	-3170446,297195			
III	5	0,1762	100	0,092806697	57430,28599	1237632,369	0,040757377
	6	0,0968	200	0,068304272	1312311,089	38425446,8	0,069374682
	7	0,1234	300	0,204133702	4840373,04	47423556,13	0,180151417
	8	0,1098	450	-0,126140172	-5136680,706	81444009,71	-0,125069762
			Σ	1073433,708555			
	Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 3			
				Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
I	3	0,1234	360	-0,027443402	-121663,4582	8866499,826	-0,026380586
	4	0,1234	200	0,221717071	3796367,031	34245148,66	0,22299381
	7	0,1234	300	-0,180151417	-3786876,498	42041040,35	-0,178747376
			Σ	-112172,925877			
II	1	0,1234	200	0,250839527	4840968,682	38598132,73	0,250625603
	2	0,1586	100	-0,304716028	-979159,6125	6426702,381	-0,304929952
	4	0,1234	200	-0,221717071	-3796367,031	34245148,66	-0,22299381
	5	0,1762	100	-0,040757377	-12164,00848	596898,492	-0,040630076
			Σ	53278,030489			
III	5	0,1762	100	0,040757377	12164,00848	596898,492	0,040630076
	6	0,0968	200	0,069374682	1352612,652	38994417,3	0,069033457
	7	0,1234	300	0,180151417	3786876,498	42041040,35	0,178747376
	8	0,1098	450	-0,125069762	-5051679,146	80781782,12	-0,125410988
			Σ	99974,013028			

На слици 39 се пореде све до сада обрађене методе у случају прорачуна мреже са слике 38.

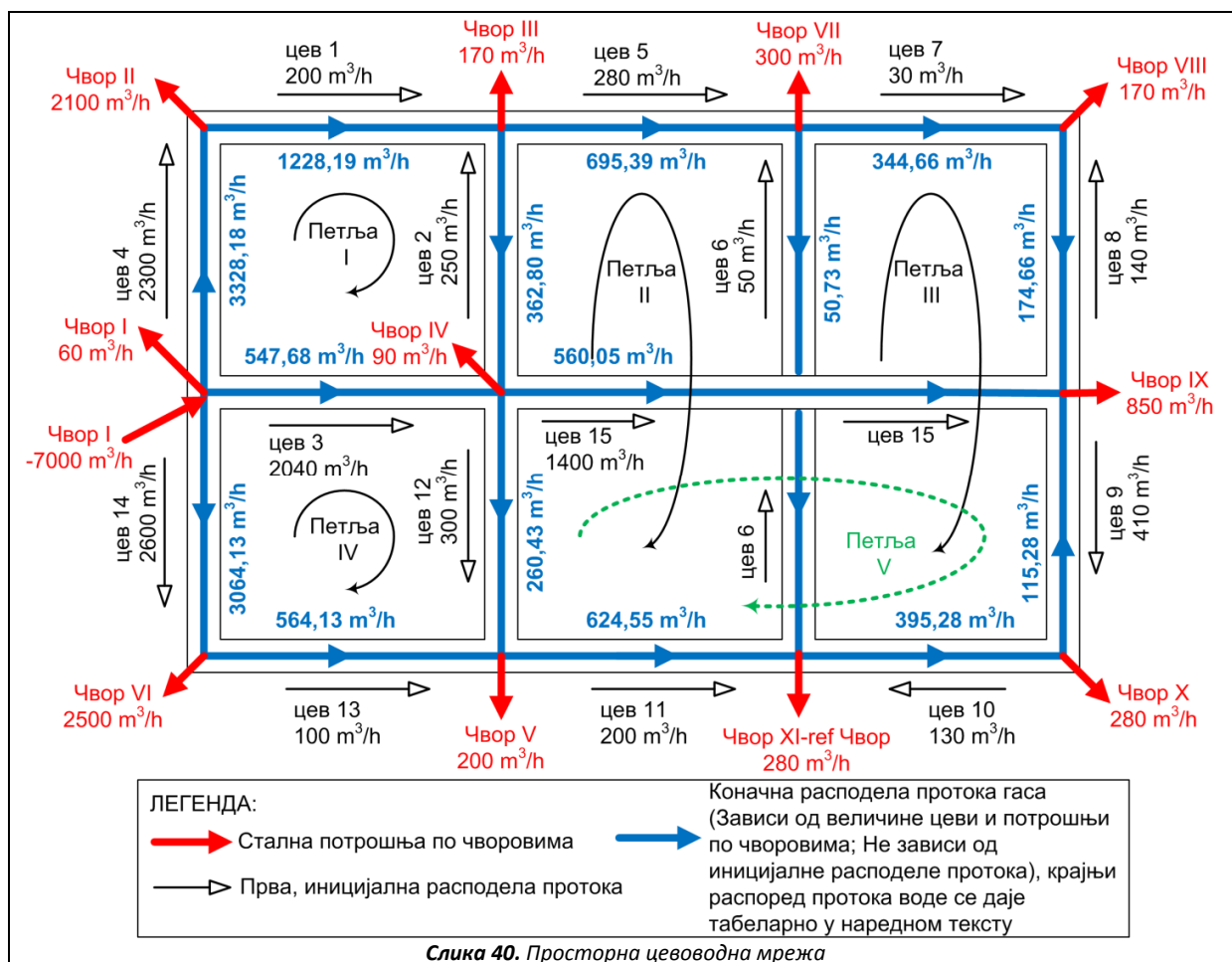


На основу слике 39 се закључује да модификовани метод Харди Кроса, модификовани метод М.М. Андријашева и обједињени метод чворова и петљи имају исту брзину конвергенције и то најбржу у поређењу са преостала два метода. Модификовани метод чворова има најспорију конвергенцију, али се овде при доношењу било каквог закључка мора бити обазрив пошто су почетни услови за прорачун по методи чворова концепцијски потпуно различити у поређењу са свим осталим приказаним методама који су међусобно потпуно упоредиви.

Обједињени метод чворова и прстенова је нарочито погодан за прорачун просторних цевоводних мрежа. Потребно је само идентификовати чворове и прстенове и затим цео поступак наставити као и код раванских мрежа.

Овде ће се извршити прорачун стационарне расподеле протока по гранама просторне гасоводне мреже која је већ прорачунавана у овој дисертацији другим расположивим методама. Графички ће се упоредити добијени резултати са резултатима осталих метода како би се упоредиле конвергенционе особине.

Да прорачун не би био монотон, а и да би се показало да избор референтног чвора не утиче на крајњи резултат, референтни чвор је промењен, и то је сада чвор XI. Једначине петљи су исте као и у претходном тексту. Да би се оне конституисале и објединиле у једну матричну једначину, потребно је дефинисати тзв. функцију сваке цеви која се разликује за гасоводне и водоводне мреже.



Слика 40. Просторна цевоводна мрежа

Функција цеви у случају гасовода се дефинише као (182):

$$F_g = p_1^2 - p_2^2 = 4810 \cdot \frac{\rho_r \cdot L \cdot Q^{1,82}}{D^{4,82}} \quad (182)$$

Претходна једначина (182) је у ствари Реноарова једначина за гасоводе у свом основном облику (која се усваја на основу дискусије изнете у претходном тексту). Пошто се овде ради о класичном проблему, а не о оптимизационом, тј. за познату мрежу се тражи расподела протока кроз цеви, први извод се тражи у односу на проток, тј. проток је променљива величина док су остале величине константе (183):

$$F_g' = \frac{\partial F_g(Q)}{\partial Q} = 1,82 \cdot 4810 \cdot \frac{\rho_r \cdot L \cdot Q^{0,82}}{D^{4,82}} \quad (183)$$

За гасоводе једначине петљи гласе (184):

$$\begin{aligned}
 & \Delta \tilde{p}_1^2 - \Delta \tilde{p}_2^2 - \Delta \tilde{p}_3^2 + \Delta \tilde{p}_4^2 = \\
 & = 4810 \cdot \rho_r \left( \frac{L_1 \cdot Q_1^{1,82}}{D_1^{4,82}} - \frac{L_2 \cdot Q_2^{1,82}}{D_2^{4,82}} - \frac{L_3 \cdot Q_3^{1,82}}{D_3^{4,82}} + \frac{L_4 \cdot Q_4^{1,82}}{D_4^{4,82}} \right) = 0 \\
 & \Delta \tilde{p}_2^2 + \Delta \tilde{p}_5^2 - \Delta \tilde{p}_6^2 - \Delta \tilde{p}_{11}^2 + \Delta \tilde{p}_{12}^2 = \\
 & = 4810 \cdot \rho_r \left( \frac{L_2 \cdot Q_2^{1,82}}{D_2^{4,82}} + \frac{L_5 \cdot Q_5^{1,82}}{D_5^{4,82}} - \frac{L_6 \cdot Q_6^{1,82}}{D_6^{4,82}} - \frac{L_{11} \cdot Q_{11}^{1,82}}{D_{11}^{4,82}} + \frac{L_{12} \cdot Q_{12}^{1,82}}{D_{12}^{4,82}} \right) = 0 \\
 & \Delta \tilde{p}_6^2 + \Delta \tilde{p}_7^2 - \Delta \tilde{p}_8^2 + \Delta \tilde{p}_9^2 + \Delta \tilde{p}_{10}^2 = \\
 & = 4810 \cdot \rho_r \left( \frac{L_6 \cdot Q_6^{1,82}}{D_6^{4,82}} - \frac{L_7 \cdot Q_7^{1,82}}{D_7^{4,82}} - \frac{L_8 \cdot Q_8^{1,82}}{D_8^{4,82}} + \frac{L_9 \cdot Q_9^{1,82}}{D_9^{4,82}} + \frac{L_{10} \cdot Q_{10}^{1,82}}{D_{10}^{4,82}} \right) = 0 \\
 & \Delta \tilde{p}_3^2 + \Delta \tilde{p}_{12}^2 - \Delta \tilde{p}_{13}^2 - \Delta \tilde{p}_{14}^2 = \\
 & = 4810 \cdot \rho_r \left( \frac{L_3 \cdot Q_3^{1,82}}{D_3^{4,82}} + \frac{L_{12} \cdot Q_{12}^{1,82}}{D_{12}^{4,82}} - \frac{L_{13} \cdot Q_{13}^{1,82}}{D_{13}^{4,82}} - \frac{L_{14} \cdot Q_{14}^{1,82}}{D_{14}^{4,82}} \right) = 0 \\
 & \Delta \tilde{p}_9^2 + \Delta \tilde{p}_{10}^2 - \Delta \tilde{p}_{11}^2 - \Delta \tilde{p}_{12}^2 + \Delta \tilde{p}_{15}^2 = \\
 & = 4810 \cdot \rho_r \left( \frac{L_9 \cdot Q_9^{1,82}}{D_9^{4,82}} + \frac{L_{10} \cdot Q_{10}^{1,82}}{D_{10}^{4,82}} - \frac{L_{11} \cdot Q_{11}^{1,82}}{D_{11}^{4,82}} - \frac{L_{12} \cdot Q_{12}^{1,82}}{D_{12}^{4,82}} + \frac{L_{15} \cdot Q_{15}^{1,82}}{D_{15}^{4,82}} \right) = 0
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} F_I \\ F_{II} \\ F_{III} \\ F_{IV} \\ F_V \end{array} \text{ loops} \quad (184)$$

Ова једначина се може записати и у матричној форми и тада гласи (185):

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \tilde{p}_1^2 \\ \Delta \tilde{p}_2^2 \\ \Delta \tilde{p}_3^2 \\ \vdots \\ \Delta \tilde{p}_{15}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (185)$$

Једначине чворова имају исти облик и за водоводне и за гасоводне мреже (186):

$$\begin{aligned}
 & -Q_3 - Q_4 - Q_{14} - Q_{I\text{-output}} + Q_{I\text{-input}} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{node}_I \\ \text{node}_{II} \\ \text{node}_{III} \\ \text{node}_{IV} \\ \text{node}_V \\ \text{node}_{VI} \\ \text{node}_{VII} \\ \text{node}_{VIII} \\ \text{node}_{IX} \\ \text{node}_X \\ \text{node}_{XI} - \text{ref} \end{array} \\
 & -Q_1 + Q_4 - Q_{II\text{-output}} = 0 \\
 & Q_1 + Q_2 - Q_5 - Q_{III\text{-output}} = 0 \\
 & -Q_2 + Q_3 - Q_{12} - Q_{15} - Q_{IV\text{-output}} = 0 \\
 & -Q_{11} + Q_{12} + Q_{13} - Q_{V\text{-output}} = 0 \\
 & -Q_{13} + Q_{14} - Q_{VI\text{-output}} = 0 \\
 & Q_5 + Q_6 - Q_7 - Q_{VII\text{-output}} = 0 \\
 & Q_7 + Q_8 - Q_{VIII\text{-output}} = 0 \\
 & -Q_8 - Q_9 + Q_{15} - Q_{IX\text{-output}} = 0 \\
 & Q_9 - Q_{10} - Q_{X\text{-output}} = 0 \\
 & -Q_6 + Q_{10} + Q_{11} - Q_{XI\text{-output}} = 0
 \end{aligned} \quad (186)$$

У овом случају је чвор XI изабран да буде референтни, тако да се он у матричном облику изоставља чиме се не губи ниједна информација о мрежи али се успоставља линеарна независност између редова матрице чворова (187):

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 Q_1 \\
 Q_2 \\
 Q_3 \\
 Q_4 \\
 Q_5 \\
 Q_6 \\
 Q_7 \\
 Q_8 \\
 Q_9 \\
 Q_{10} \\
 Q_{11} \\
 Q_{12} \\
 Q_{13} \\
 Q_{14} \\
 Q_{15}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 Q_{I\text{-output}} - Q_{I\text{-input}} \\
 Q_{II\text{-output}} \\
 Q_{III\text{-output}} \\
 Q_{IV\text{-output}} \\
 Q_{V\text{-output}} \\
 Q_{VI\text{-output}} \\
 Q_{VII\text{-output}} \\
 Q_{VIII\text{-output}} \\
 Q_{IX\text{-output}} \\
 Q_{X\text{-output}}
 \end{bmatrix}
 \quad (187)$$

Проблем се даље решава обједињеном методом чворова и петљи (188):

$$[Q] = \text{inv}[NL] \cdot x[V] \quad (188)$$

Обједињена матрица чворова и петљи [NL] гласи (189):

$$[NL] = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 \cdot a_1 & -1 \cdot a_2 & -1 \cdot a_3 & 1 \cdot a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 \cdot b_5 & 0 & 0 & 1 \cdot b_1 & -1 \cdot b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \cdot b_3 & -1 \cdot b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \cdot c_5 & 1 \cdot c_1 & -1 \cdot c_2 & 1 \cdot c_3 & 1 \cdot c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \cdot d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \cdot d_2 & -1 \cdot d_3 & -1 \cdot d_4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \cdot e_2 & 1 \cdot e_3 & -1 \cdot e_4 & -1 \cdot e_5 & 0 & 0 & 1 \cdot e_1 & 0
 \end{bmatrix} \quad (189)$$

Матрица [NL] се добија сажимањем матрице чворова [N] и матрице петљи [L], где су одговарајуће матрице (190-1):

$$[N]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (190)$$

$$[L]=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (191)$$

Матрица петљи [L] се уноси у обједињену матрицу у коригованом облику, тј. сваки члан се множи са одговарајућим изводом као што је већ раније напоменуто. Вредности ових првих извода за прву итерацију се дају у табели 15.

Матрица [V] из матричне једначине (188) гласи (192):

$$[V]=\begin{bmatrix} Q_{I-output} - |Q_{I-input}| \\ Q_{II-output} \\ Q_{III-output} \\ Q_{IV-output} \\ Q_{V-output} \\ Q_{VI-output} \\ Q_{VII-output} \\ Q_{VIII-output} \\ Q_{IX-output} \\ Q_{X-output} \\ -A + (A_1 \cdot a_1 + A_2 \cdot a_2 + A_3 \cdot a_3 + A_4 \cdot a_4) \\ -B + (B_1 \cdot b_1 + B_2 \cdot b_2 + B_3 \cdot b_3 + B_4 \cdot b_4 + B_5 \cdot b_5) \\ -C + (C_1 \cdot c_1 + C_2 \cdot c_2 + C_3 \cdot c_3 + C_4 \cdot c_4 + C_5 \cdot c_5) \\ -D + (D_1 \cdot d_1 + D_2 \cdot d_2 + D_3 \cdot d_3 + D_4 \cdot d_4) \\ -E + (E_1 \cdot e_1 + E_2 \cdot e_2 + E_3 \cdot e_3 + E_4 \cdot e_4 + E_5 \cdot e_5) \end{bmatrix} \quad (192)$$

Бројчане вредности у табели 15 се односе на прву итерацију. Првих 5 итерација за гасоводну мрежу се даје у табели 16.

Табела 15. Подаци за прорачун гасоводне мреже са слике 40 обједињеном методом петљи и чворова

Петља	Цев	D (m)	L (m)	<sup>a</sup> Q(m <sup>3</sup> /s)	*	F <sub>g</sub>	F <sub>g</sub> '
I	1	0,4064	100	<sup>b</sup> A <sub>1</sub> =0,0556	+1	114959	a <sub>1</sub> =3766062
	2	0,3048	100	A <sub>2</sub> =-0,0694	-1	-690438	a <sub>2</sub> =18094990
	3	0,1524	100	A <sub>3</sub> =-0,5667	-1	-889949040	a <sub>3</sub> =2858306918
	4	0,3048	100	A <sub>4</sub> =0,6389	+1	39193885	a <sub>4</sub> =111651451
						Σ A=-851330634	
II	5	0,1524	100	B <sub>1</sub> =0,0778	+1	23969880	b <sub>1</sub> =560895181
	6	0,3048	200	B <sub>2</sub> =-0,0139	-1	-73795	b <sub>2</sub> =9670144
	11	0,1524	100	B <sub>3</sub> =-0,0556	-1	-12993101	b <sub>3</sub> =425654001
	12	0,1524	100	B <sub>4</sub> =-0,0833	-1	-27176838	b <sub>4</sub> =593542132
	2	0,3048	100	B <sub>5</sub> =0,0694	+1	690438	b <sub>5</sub> =18094990
						Σ B=-15583417	
III	7	0,1524	100	C <sub>1</sub> =0,0083	+1	411338	c <sub>1</sub> =89836237
	8	0,1524	100	C <sub>2</sub> =-0,0389	-1	-6788773	c <sub>2</sub> =317714556
	9	0,3048	100	C <sub>3</sub> =0,1139	+1	1698792	c <sub>3</sub> =27147529
	10	0,1524	100	C <sub>4</sub> =0,0361	+1	5932191	c <sub>4</sub> =298982433
	6	0,3048	200	C <sub>5</sub> =0,0139	+1	73795	c <sub>5</sub> =9670144
						Σ C=1327344	
IV	3	0,1524	100	D <sub>1</sub> =0,5667	+1	889949040	d <sub>1</sub> =2858306918
	12	0,1524	100	D <sub>2</sub> =0,0833	+1	27176838	d <sub>2</sub> =593542132
	13	0,1524	100	D <sub>3</sub> =-0,0278	-1	-3679919	d <sub>3</sub> =241108279
	14	0,4064	100	D <sub>4</sub> =-0,7222	-1	-12243919	d <sub>4</sub> =30854675
						Σ D=901202040	
V	15	0,1524	200	E <sub>1</sub> =0,3889	+1	897059511	e <sub>1</sub> =4198238510
	9	0,3048	100	E <sub>2</sub> =0,1139	+1	1698792	e <sub>2</sub> =27147529
	10	0,1524	100	E <sub>3</sub> =0,0361	+1	5932191	e <sub>3</sub> =298982433
	11	0,1524	100	E <sub>4</sub> =-0,0556	-1	-12993101	e <sub>4</sub> =425654001
	12	0,1524	100	E <sub>5</sub> =-0,0833	-1	-27176838	e <sub>5</sub> =593542132
						Σ E=864520555	

\*предзнак испред протока

Применом обједињеног метода чворова и петљи се добијају директно протоци чиме се избегава сложена алгебарска шема за сабирање поправки која је потребна код свих осталих приказаних метода чиме се могућност грешке смањује на минимум. Такође се у случају просторних мрежа на елегантан начин избегава проблем одабира знака за чланове који су ван главне дијагонале у тзв. симетричној матрици извода. Треба подсетити да је већ објашњено да су код раванских мрежа када се разматра класичан проблем (који се тиче одређивања протока у већ датој мрежи), у симетричној матрици извода која се користи у модификованом Харди Крос методу, сви чланови ван главне дијагонале негативни док су они на главној дијагонали позитивни. У оптимизационом проблему, када се задају фиксни протоци по гранама мреже при чему се траже пречници, код раванских мрежа је обрнут случај, тј. чланови на главној дијагонали су негативни, док

су сви остали позитивни. Што се тиче просторних мрежа, код њих су чланови на главној дијагонали такође негативни у оптимизационој проблему, док су остали чланови углавном позитивни, али постоје и изузеци, тј. неки чланови су негативни. Наредна поглавља ће бити посвећена проблему оптимизације мрежа. У досадашњем тексту су мреже посматране као већ дате, тј. било је потребно прорачунати расподелу протока по цевима. На овај начин су брзине флуида у појединим цевима биле сувише мале а у неким сувише велике.

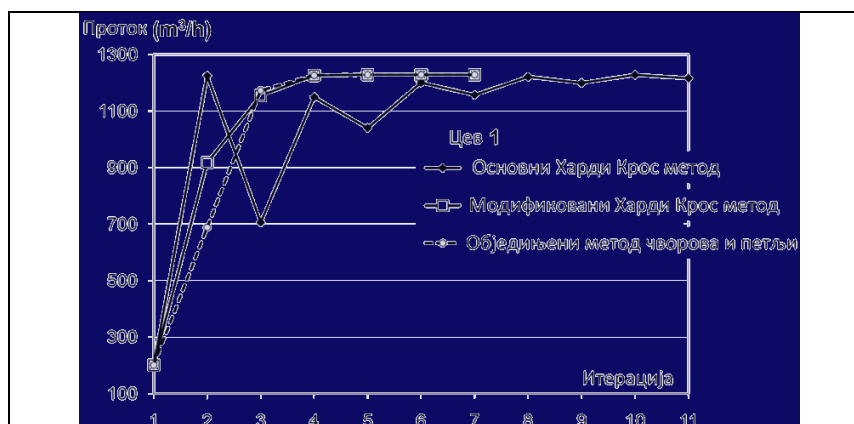
**Табела 16.** Првих пет итерација за гасоводну мрежу са слике 45 према обједињеној методи чворова и прстенова

Проток у $m^3/h$							<sup>c</sup> Брзина гаса
Итерација	<sup>a</sup> 0	1	2	3	4	<sup>b</sup> 5	m/s
Цев 1	200	687,38	1172,23	1225,74	1228,19	1228,19	10,5
Цев 2	250	33,55	-307,01	360,38	362,80	362,80	5,5
Цев 3	2040	988,81	618,87	550,48	547,68	547,68	33,4
Цев 4	2300	2787,38	3272,23	3325,74	3328,19	3328,19	50,7
Цев 5	280	550,93	695,22	695,36	695,39	695,39	42,4
Цев 6	50	78,54	-60,99	50,63	50,73	50,73	0,8
Цев 7	30	329,48	334,23	344,74	344,66	344,66	21,0
Цев 8	140	-159,48	164,23	174,74	174,66	174,66	10,6
Цев 9	410	20,26	-121,61	115,19	115,28	115,28	1,8
Цев 10	130	-259,74	401,61	395,19	395,28	395,28	24,1
Цев 11	200	618,28	620,62	624,57	624,55	624,55	38,0
Цев 12	300	154,48	271,72	260,79	260,43	260,43	15,9
Цев 13	100	663,80	548,90	563,78	564,13	564,13	34,4
Цев 14	2600	3163,80	3048,90	3063,78	3064,13	3064,13	26,2
Цев 15	1400	710,78	564,16	560,07	560,05	560,05	34,1

<sup>a</sup>Први претпостављени протоци по цевима усклађени са првим Кирхофовим законом

<sup>b</sup>Вредности у итерацији 5 су исте као и у итерацији 4 тако да је критериум за прекид итеративног поступка испуњен

<sup>c</sup>Брзина гаса (препоручена 10-15 m/s);  $v=(4 \cdot p \cdot Q)/(D^2 \cdot \pi)$ ; где је  $p=p_a/p_n$  а  $P_a$  је апсолутни притисак гаса у цевоводу, овде  $p_a=400\ 000\ Pa$ , а  $p_n$ =нормални притисак  $\sim 100\ 000\ Pa$ ,  $p=400\ 000\ Pa/100\ 000\ Pa=4$



**Слика 41.** Поређење брзине конвергенције за различите методе у случају просторне цевоводне мреже приказане на слици 40



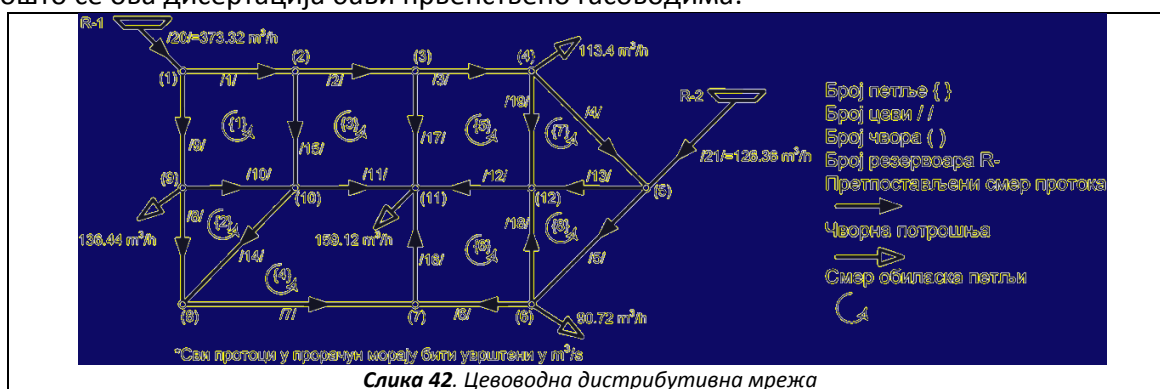
На слици 41 се пореди основна Харди Крос метода, модификована Харди Крос метода и обједињена метода чворова и петљи. Метода М.М. Андријашева која додатно усложњава већ ионако сложен проблем овде није рађена за овај пример. Модификована метода чворова може да се примени у овом случају али пошто су резултати практично неупоредиви због концепцијских разлика, то овде није рађено.

## Г. Дистрибуција гаса цевоводима, проблем оптимизације пречника цеви при константним протоцима

У тзв. класично постављеном проблему прорачуна прстенстих мрежа за дистрибуцију флуида, проток се посматра као променљива док се све остале величине посматрају као константе. Боље речено, у већ постојећој мрежи која постоји са конкретним цевима, прорачунава се проток кроз те цеви, тј. кроз гране мреже. У оптимизационом проблему, за фиксне протоке који се бирају тако да задовоље први Кирхофов закон за сваки чвор мреже, траже се пречници цеви који се сада посматрају као константе. Прорачунати протоци у класичном проблему су највећи могући, тј. када сви потрошачи повлаче највеће пројектне количине флуида. У оптимизационом проблему се бирају протоци такође за пројектно оптерећење мреже, с тим да се пречници прорачунавају тако да буде оптимална брзина флуида унутар цеви.

Овде се узима да протиче течни флуид кроз цеви да не би долазило до забуне око усвојених брзина пошто код гасовитог флуида, као што је већ напоменуто, постоје две вредности протока, тј. она сведена на нормалне услове и она за вредност притиска у цевоводу. Проблем је општи, пошто гасоводи по препоруци АГА, као што је већ објашњено могу да се прорачунавају применом Колбрукове једначине (35) са тиме да коефицијент 2,51 буде замењен коефицијентом 2,825.

Прорачунати расподелу флуида по цевима мреже приказане на слици 42 применом обједињене методе чворова и прстенова, а затим извршити оптимизацију мреже за брзину воде 1 m/s применом модификоване методе Харди Кроса. На слици 42, резервоари за воду су постављени на одређене коте и испуњени су водом чиме се природним падом остварује притисак. Овакав приступ проблему постоји у пракси пројектовања водовода, где је могуће да се притисак да уместо у  $P_a$  у еквивалентним  $m$ . Овде ће се проблем надаље решавати тако што се притисци изражавају у  $P_a$  као и досад пошто се ова дисертација бави првенствено гасоводима.



Слика 42. Цевоводна дистрибутивна мрежа

Проблем се састоји из два дела. Дата је мрежа и потребно је прорачунати протоке кроз цеви. Ово је тзв. класичан проблем који је обрађиван у глави В овога доктората. Проблем ће бити решен применом обједињене методе чворова која је развијена у овом докторату

и која се показала као најбоља. Иако је овај тип проблема већ детаљно објашњен у претходном поглављу, ова мрежа је нова па није згорег поновити поступак како би се отклониле све недоумице ако још увек постоје. Решење као и улазни подаци су дати у табели 17:

**Табела 17.** Подаци и решења за класичан проблем за мрежу са слике 47

Број цеви	Пречник (m)	Дужина (m)	Проток (m <sup>3</sup> /h)		Брзина (m/s)
			Претпостављени	Прорачунати	
/1/	0,305	457,2	173,32	200,67	0,76
/2/	0,203	304,8	150	144,10	1,24
/3/	0,203	365,8	130	59,29	0,51
/4/	0,203	609,6	6,6	-37,23	0,32
/5/	0,203	853,4	100	31,27	0,27
/6/	0,203	335,3	0,28	-45,17	0,39
/7/	0,203	304,8	16,88	53,90	0,46
/8/	0,203	762,0	13,56	34,82	0,30
/9/	0,203	243,8	200	172,65	1,48
/10/	0,152	396,2	50	1,39	0,02
/11/	0,152	304,8	70	38,88	0,60
/12/	0,254	335,3	51,96	26,70	0,15
/13/	0,254	304,8	32,96	57,86	0,32
/14/	0,152	548,6	3,32	19,09	0,29
/15/	0,152	335,3	23,32	56,57	0,87
/16/	0,152	548,6	17,16	8,73	0,13
/17/	0,254	365,9	20	84,81	0,46
/18/	0,152	548,6	9	-14,28	0,22
/19/	0,152	396,2	10	-16,88	0,26

За сваки чвор мреже се може успоставити једначина по првом Кирхофовом закону (193). Чвор 12 се бира да буде референтни.

$$\left. \begin{aligned}
 -Q_{/1/} - Q_{/9/} + Q_{(1)\text{-input}} &= 0 \\
 Q_{/1/} - Q_{/2/} - Q_{/15/} &= 0 \\
 Q_{/2/} - Q_{/3/} - Q_{/17/} &= 0 \\
 Q_{/3/} - Q_{/4/} - Q_{/19/} - Q_{(4)\text{-output}} &= 0 \\
 Q_{/4/} - Q_{/5/} - Q_{/13/} + Q_{(5)\text{-input}} &= 0 \\
 Q_{/5/} - Q_{/6/} - Q_{/18/} - Q_{(6)\text{-output}} &= 0 \\
 Q_{/6/} + Q_{/7/} - Q_{/16/} &= 0 \\
 -Q_{/7/} + Q_{/8/} + Q_{/14/} &= 0 \\
 -Q_{/8/} + Q_{/9/} - Q_{/10/} - Q_{(9)\text{-output}} &= 0 \\
 Q_{/10/} - Q_{/11/} - Q_{/14/} + Q_{/15/} &= 0 \\
 Q_{/11/} + Q_{/12/} + Q_{/16/} + Q_{/17/} - Q_{(11)\text{-output}} &= 0 \\
 -Q_{/12/} + Q_{/13/} + Q_{/18/} + Q_{/19/} &= 0
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l}
 \text{node}_{(1)} \\
 \text{node}_{(2)} \\
 \text{node}_{(3)} \\
 \text{node}_{(4)} \\
 \text{node}_{(5)} \\
 \text{node}_{(6)} \\
 \text{node}_{(7)} \\
 \text{node}_{(8)} \\
 \text{node}_{(9)} \\
 \text{node}_{(10)} \\
 \text{node}_{(11)} \\
 \text{node}_{(12)} - \text{ref.}
 \end{array} \quad (193)$$

На основу једначине (193) се може успоставити редукована матрица чворова (194):



$$[L] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (196)$$

Пад притиска у свакој цеви се рачуна као и досад на основу Дарси-Вајсбахове једначине, при чему се њен први извод у класично постављеном проблему тражи тако да се проток посматра као променљива величина (197):

$$F' = \frac{\partial(\Delta p)}{\partial Q} = \frac{\partial\left(\frac{8 \cdot \rho \cdot \lambda \cdot L \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot D^5}\right)}{\partial Q} = \frac{\partial(R \cdot Q^2)}{\partial Q} = \frac{16 \cdot \rho \cdot \lambda \cdot L \cdot Q}{\pi^2 \cdot D^5} = 2 \cdot R \cdot Q \quad (197)$$

Решење се добија на основу израза (198):

$$[Q] = \text{inv}[NL] \cdot x[V] \quad (198)$$

Матрица [Q] је матрица, тј. вектор непознатих протока, док се матрица [V] добија на следећи начин (199):

$$[V] = \begin{bmatrix} -|Q_{(1)\text{-input}}| \\ 0 \\ 0 \\ |Q_{(4)\text{-output}}| \\ -|Q_{(5)\text{-input}}| \\ |Q_{(6)\text{-output}}| \\ 0 \\ 0 \\ |Q_{(9)\text{-output}}| \\ 0 \\ |Q_{(11)\text{-output}}| \\ -C_1 + \left( \frac{\partial(\Delta p_{/1/})}{\partial Q_{/1/}} \cdot Q_{/1/} + \frac{\partial(\Delta p_{/9/})}{\partial Q_{/9/}} \cdot Q_{/9/} + \frac{\partial(\Delta p_{/10/})}{\partial Q_{/10/}} \cdot Q_{/10/} + \frac{\partial(\Delta p_{/15/})}{\partial Q_{/15/}} \cdot Q_{/15/} \right) \\ -C_2 + \left( \frac{\partial(\Delta p_{/8/})}{\partial Q_{/8/}} \cdot Q_{/8/} + \frac{\partial(\Delta p_{/10/})}{\partial Q_{/10/}} \cdot Q_{/10/} + \frac{\partial(\Delta p_{/14/})}{\partial Q_{/14/}} \cdot Q_{/14/} \right) \\ -C_3 + \left( \frac{\partial(\Delta p_{/2/})}{\partial Q_{/2/}} \cdot Q_{/2/} + \frac{\partial(\Delta p_{/11/})}{\partial Q_{/11/}} \cdot Q_{/11/} + \frac{\partial(\Delta p_{/15/})}{\partial Q_{/15/}} \cdot Q_{/15/} + \frac{\partial(\Delta p_{/17/})}{\partial Q_{/17/}} \cdot Q_{/17/} \right) \\ -C_4 + \left( \frac{\partial(\Delta p_{/7/})}{\partial Q_{/7/}} \cdot Q_{/7/} + \frac{\partial(\Delta p_{/11/})}{\partial Q_{/11/}} \cdot Q_{/11/} + \frac{\partial(\Delta p_{/14/})}{\partial Q_{/14/}} \cdot Q_{/14/} + \frac{\partial(\Delta p_{/16/})}{\partial Q_{/16/}} \cdot Q_{/16/} \right) \\ -C_5 + \left( \frac{\partial(\Delta p_{/3/})}{\partial Q_{/3/}} \cdot Q_{/3/} + \frac{\partial(\Delta p_{/12/})}{\partial Q_{/12/}} \cdot Q_{/12/} + \frac{\partial(\Delta p_{/17/})}{\partial Q_{/17/}} \cdot Q_{/17/} + \frac{\partial(\Delta p_{/19/})}{\partial Q_{/19/}} \cdot Q_{/19/} \right) \\ -C_6 + \left( \frac{\partial(\Delta p_{/6/})}{\partial Q_{/6/}} \cdot Q_{/6/} + \frac{\partial(\Delta p_{/12/})}{\partial Q_{/12/}} \cdot Q_{/12/} + \frac{\partial(\Delta p_{/16/})}{\partial Q_{/16/}} \cdot Q_{/16/} + \frac{\partial(\Delta p_{/18/})}{\partial Q_{/18/}} \cdot Q_{/18/} \right) \\ -C_7 + \left( \frac{\partial(\Delta p_{/4/})}{\partial Q_{/4/}} \cdot Q_{/4/} + \frac{\partial(\Delta p_{/13/})}{\partial Q_{/13/}} \cdot Q_{/13/} + \frac{\partial(\Delta p_{/19/})}{\partial Q_{/19/}} \cdot Q_{/19/} \right) \\ -C_8 + \left( \frac{\partial(\Delta p_{/5/})}{\partial Q_{/5/}} \cdot Q_{/5/} + \frac{\partial(\Delta p_{/13/})}{\partial Q_{/13/}} \cdot Q_{/13/} + \frac{\partial(\Delta p_{/18/})}{\partial Q_{/18/}} \cdot Q_{/18/} \right) \end{bmatrix} \quad (199)$$

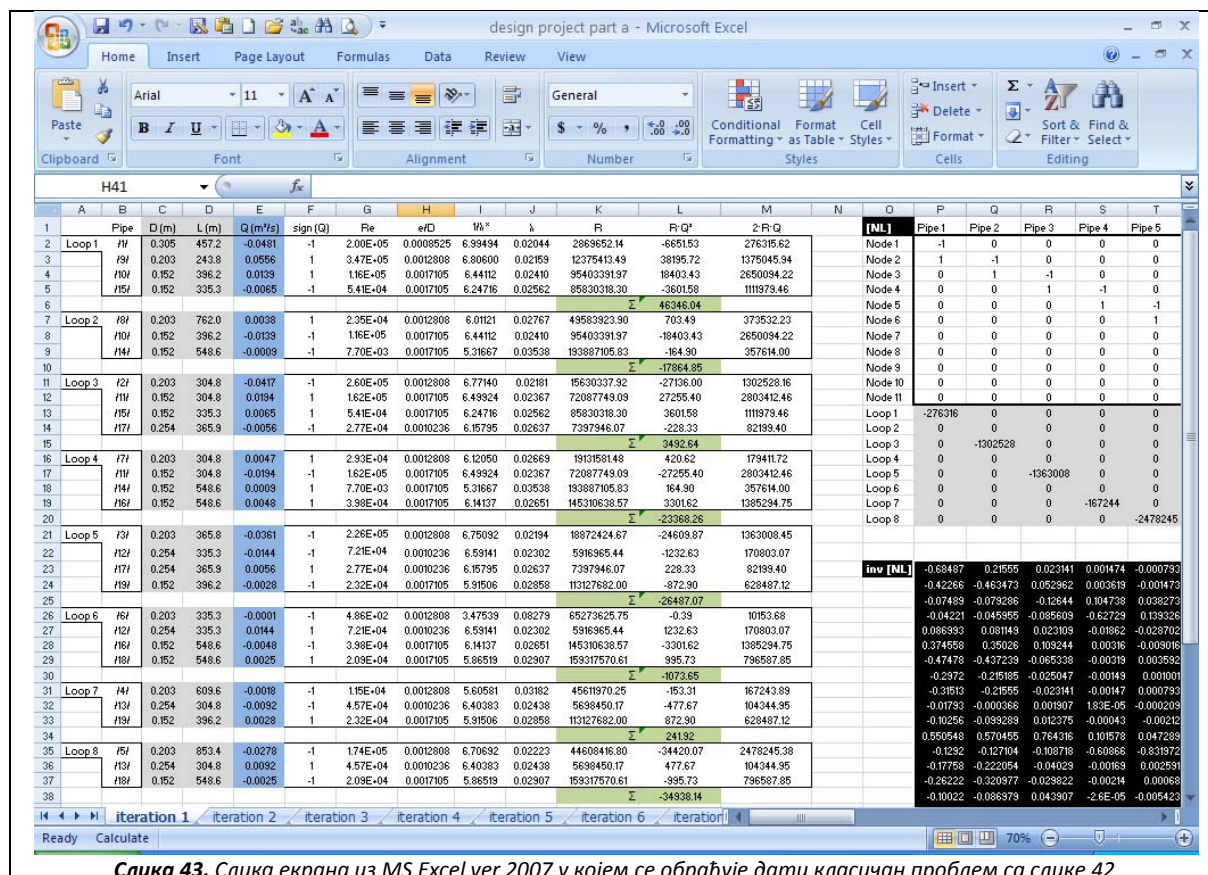
Где је [NL] обједињена матрица чворова и петљи (200):



Као и досад, првих 11 редова обједињене матрице чворова и прстенова [NL] се узима из матрице [N'], док се осталих осам редова узима из матрице петљи [L], при чему је сваки члан помножен првим изводом функције цеви, како је већ претходно и објашњено. У претходне две матрице (199 и 200) први изводи тзв. функције цеви по протоку се другачије објектају, пошто нотација која се користи у (201) физички не би стала у (200):

$$\begin{aligned}
 F'_{1/1} &= \left| \frac{\partial(\Delta p_{1/1})}{\partial Q_{1/1}} \right| \\
 F'_{2/2} &= \left| \frac{\partial(\Delta p_{2/2})}{\partial Q_{2/2}} \right| \\
 &\vdots \\
 F'_{19/19} &= \left| \frac{\partial(\Delta p_{19/19})}{\partial Q_{19/19}} \right|
 \end{aligned}
 \tag{201}$$

Прорачун је рађен у MS Excel-у ver 2007 као и сви прорачуни урађени у овој дисертацији. Слика екрана из MS Excel ver 2007 у којем се обрађује дати проблем се ради илустрације даје на слици 43<sup>n</sup>:



Слика 43. Слика екрана из MS Excel ver 2007 у којем се обрађује дати класичан проблем са слике 42

<sup>n</sup> У прилогу, пример 21 су приказани сви кораци у прорачуну преузети из MS Excel датотеке

Како је у свакој контури алгебарска сума;  $\sum R \cdot Q^2 \approx 0$  са тачношћу од две децимале, дистрибутивна мрежа се сматра уравнотеженом.

Како се види из табеле 17, брзина протока је у свим цевима мреже осим једне мање од 1 m/s што значи да су цеви предимензионисане. Због тога ће се приступити проблему оптимизације који ће овде бити урађен применом модификованог Харди Крос метода.

Пошто се овде третира флуид, брзина се рачуна по формули (202):

$$v = \frac{4 \cdot Q}{D_u^2 \cdot \pi} \quad (202)$$

Иако се формула (202) чини тривијалном, она је узрок грешака при пројектовању гасоводних мрежа. Наиме гас је по својој природи компресибилен (стишљив) флуид, и брзина у многоме зависи од тога на ком притиску се одвија проток гаса. Овај притисак је у гасоводној мрежи око  $4 \cdot 10^5$  Pa abs, односно  $3 \cdot 10^5$  Pa манометарског, односно мереног притиска (натпритиска). Грешка настаје у томе што се каже уобичајено да су падови притиска у гасоводној мрежи тако мали да се он може посматрати као нестишљив флуид, тј. као вода или нафта (Brkić 2009i). То је тачно, међутим треба имати у виду да гас претходно са вишег притиска експандује, и улази у гасоводну мрежу у којој влада  $4 \cdot 10^5$  Pa abs и даље у гасоводној мрежи минимално, тј. занемарљиво експандује при чему се може правилно рећи да се понаша као нестишљив флуид. Међутим ако се каже да је проток гаса  $100 \text{ m}^3/\text{h}$ , то значи да је то количина која је сведена на нормалне или стандардне услове, а да је гас у мрежи компримован и да та иста количина коју потрошачи преузму за један сат у мрежи има запремину од  $25 \text{ m}^3/\text{h}$ . При прорачунима гасних мрежа не сме се заборавити да гас није течност и да је утолико само условно нестишљив. У Реноаровој једначини улази проток на нормалним условима, док у једначини (202) конфигурише проток на условима у мрежи. За сада се вратимо проблему оптимизације мреже са слике 42, који је донекле простији у односу на случај гасоводне мреже из горе наведених разлога.

Дакле, у проблему оптимизације дистрибутивних мрежа полази се од исте основне једначине цеви као и код класичног проблема. То је у случају водоводних мрежа Дарси-Вајсбахова једначина, при чему се Дарсијев коефицијент хидрауличког отпора на основу Колбрукове једначине, а у случају гасоводних мрежа то је Реноарова једначина. Једина разлика је у томе што се сада узима да је пречник променљива величина (203):

$$\frac{\partial(\Delta p)}{\partial D} = \frac{\partial \left( \frac{8 \cdot \rho \cdot \lambda \cdot L \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot D_u^5} \right)}{\partial D} = \frac{\partial (R \cdot D_u^{-5})}{\partial D_u} = \frac{-40 \cdot \rho \cdot \lambda \cdot L \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot D_u^6} = 2 \cdot R \cdot D_u^{-6} \quad (203)$$

Даље ће се оптимизација радити према модификованој Харди Крос методи (204):



$$\begin{bmatrix} \frac{\partial C_1(D)}{\partial D_{\{1\}}} & -\frac{\partial \Delta p_{10}(D)}{\partial D_{\{1\}}} & -\frac{\partial \Delta p_{15}(D)}{\partial D_{\{1\}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial \Delta p_{10}(D)}{\partial D_{\{2\}}} & \frac{\partial C_2(D)}{\partial D_{\{2\}}} & 0 & -\frac{\partial \Delta p_{14}(D)}{\partial D_{\{2\}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial \Delta p_{10}(D)}{\partial D_{\{3\}}} & 0 & \frac{\partial C_3(D)}{\partial D_{\{3\}}} & -\frac{\partial \Delta p_{11}(D)}{\partial D_{\{3\}}} & -\frac{\partial \Delta p_{17}(D)}{\partial D_{\{3\}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial \Delta p_{14}(D)}{\partial D_{\{4\}}} & -\frac{\partial \Delta p_{11}(D)}{\partial D_{\{4\}}} & \frac{\partial C_4(D)}{\partial D_{\{4\}}} & 0 & -\frac{\partial \Delta p_{16}(D)}{\partial D_{\{4\}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial \Delta p_{17}(D)}{\partial D_{\{3\}}} & 0 & \frac{\partial C_5(D)}{\partial D_{\{5\}}} & -\frac{\partial \Delta p_{12}(D)}{\partial D_{\{5\}}} & -\frac{\partial \Delta p_{19}(D)}{\partial D_{\{5\}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial \Delta p_{16}(D)}{\partial D_{\{6\}}} & -\frac{\partial \Delta p_{12}(D)}{\partial D_{\{6\}}} & \frac{\partial C_6(D)}{\partial D_{\{6\}}} & 0 & -\frac{\partial \Delta p_{18}(D)}{\partial D_{\{6\}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial \Delta p_{19}(D)}{\partial D_{\{7\}}} & 0 & \frac{\partial C_7(D)}{\partial D_{\{7\}}} & -\frac{\partial \Delta p_{13}(D)}{\partial D_{\{7\}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial \Delta p_{18}(D)}{\partial D_{\{8\}}} & -\frac{\partial \Delta p_{13}(D)}{\partial D_{\{8\}}} & \frac{\partial C_8(D)}{\partial D_{\{8\}}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta D_{\{1\}} \\ \Delta D_{\{2\}} \\ \Delta D_{\{3\}} \\ \Delta D_{\{4\}} \\ \Delta D_{\{5\}} \\ \Delta D_{\{6\}} \\ \Delta D_{\{7\}} \\ \Delta D_{\{8\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{\{1\}} \\ C_{\{2\}} \\ C_{\{3\}} \\ C_{\{4\}} \\ C_{\{5\}} \\ C_{\{6\}} \\ C_{\{7\}} \\ C_{\{8\}} \end{bmatrix} \quad (204)$$

Ознака С се у матричној једначини (204) односи на целе контуре, тако да је нпр. за контуру 1, први извод функције С по пречнику као промењивој величини (205):

$$\frac{\partial C_1(D)}{\partial D_{\{1\}}} = \frac{\partial(-\Delta p_1(D_1) + \Delta p_9(D_9) + \Delta p_{10}(D_{10}) - \Delta p_{15}(D_{15}))}{\partial D_{\{1\}}} = \frac{-40 \cdot \rho}{\pi^2} \cdot \left( -\frac{\lambda_1 \cdot L_1 \cdot Q_1^2}{D_1^6} + \frac{\lambda_9 \cdot L_9 \cdot Q_9^2}{D_9^6} + \frac{\lambda_{10} \cdot L_{10} \cdot Q_{10}^2}{D_{10}^6} - \frac{\lambda_{15} \cdot L_{15} \cdot Q_{15}^2}{D_{15}^6} \right) \quad (205)$$

Остали чланови се односе на цеви које су заједничке за више контура. Прва матрица, тј. матрица извода у матричној једначини (205) је симетрична у односу на главну дијагоналу, тако да је нпр. (206):

$$-\frac{\partial \Delta p_{10}(D)}{\partial D_{\{1\}}} = -\frac{\partial \Delta p_{10}(D)}{\partial D_{\{2\}}} \quad (206)$$

Што уједно значи да је цев 10 у мрежи са слике 42 заједничка за контуре {1} и {2}. Пошто је мрежа раванска сви чланови на главној дијагонали су негативни, док су сви чланови ван главне дијагонале позитивни (када су бројне вредности у питању; слике 44 и 45). Код класичног проблема стање је обрнуто, као што је већ објашњено. У случају матричне интерпретације основног Харди Крос метода из 1936. године сви чланови ван главне дијагонале у матрици извода (222) су једнаки нули.

-86667148.87	85111306.5	1014122.486	0	0	0	0	0	0	0
85111306.5	-94813307.34	0	5705781.743	0	0	0	0	0	0
1014122.486	0	-3445776.97	1410241.948	700304.9761	0	0	0	0	0
0	5705781.743	1410241.948	-22066162.74	0	13976444.68	0	0	0	0
0	0	700304.9761	0	-8868171.95	2378203.032	4740566.887	0	0	0
0	0	0	13976444.68	2378203.032	-25613751.23	0	7950463.223	0	0
0	0	0	0	4740566.887	0	-8602143.78	898631.9108	0	0
0	0	0	0	0	7950463.223	898631.9108	-13905486.97	0	0
=0 in original Hardy Cross									

Слика 44. Матрица извода за оптимизациони проблем за мрежу са слике 42, бројчане вредности, итерација 1

-31320439.11	29997853.78	747298.4091	0	0	0	0	0
29997853.78	-35991125.83	0	2846889.79	0	0	0	0
747298.4091	0	-3660963.83	1307945.599	1106391.699	0	0	0
0	2846889.79	1307945.599	-8665464.06	0	3977255.866	0	0
0	0	1106391.699	0	-8232367.31	2634585.224	3285300.919	0
0	0	0	3977255.866	2634585.224	-14790398.12	0	6970020.239
0	0	0	0	3285300.919	0	-7234159.84	737730.991
0	0	0	0	0	6970020.239	737730.991	-13816269.43
=0 in original Hardy Cross							

Слика 45. Матрица извода за оптимизациони проблем за мрежу са слике 42, бројчане вредности, итерација 2

Овде се дају такође прикази екрана на којима се види прорачун, са тиме да се одабир алгебарског знака поправки врши у скривеним слојевима у оквиру MS Excel датотеке<sup>o</sup>.

Поступак је потпуно исти као и код примене модификоване Харди Крос методе кад је у питању класичан проблем са тиме да се као резултат добија не поправка протока, већ поправка пречника који се затим додаје на вредност пречника из претходне итерације на основу истих алгебарских правила која су већ показана у поглављу В.1.1. Улазни подаци и решења за оптимизациони проблем мреже са слике 42 се дају у табели 18:

Табела 18. Подаци и решења за оптимизациони проблем за мрежу са слике 42

Број цеви	<sup>a</sup> Проток (m <sup>3</sup> /h)	Дужина (m)	Пречник (m)		Брзина (m/s)	
			<sup>b</sup> Почетни	<sup>c</sup> Крајњи	<sup>d</sup> Пре	После оптимизације
/1/	200,67	457,2	0,2664	0,2483	0,76	1,15
/2/	144,10	304,8	0,2257	0,2025	1,24	1,24
/3/	59,29	365,8	0,1448	0,1417	0,51	1,04
/4/	-37,23	609,6	0,1147	0,1125	0,32	1,04
/5/	31,27	853,4	0,1051	0,1043	0,27	1,02
/6/	-45,17	335,3	0,1263	0,1236	0,39	1,05
/7/	53,90	304,8	0,1380	0,1690	0,46	0,67
/8/	34,82	762,0	0,1109	0,1173	0,30	0,89
/9/	172,65	243,8	0,2471	0,2651	1,48	0,87
/10/	1,39	396,2	0,0221	0,0338	0,02	0,43
/11/	38,88	304,8	0,1172	0,1094	0,60	1,15
/12/	26,70	335,3	0,0971	0,0912	0,15	1,13
/13/	57,86	304,8	0,1430	0,1460	0,32	0,96
/14/	19,09	548,6	0,0821	0,1067	0,29	0,59
/15/	56,57	335,3	0,1414	0,1465	0,87	0,93
/16/	8,73	548,6	0,0555	0,0893	0,13	0,39
/17/	84,81	365,9	0,1731	0,1531	0,46	1,28
/18/	-14,28	548,6	0,0710	0,0746	0,22	0,91
/19/	-16,88	396,2	0,0772	0,0825	0,26	0,88

<sup>a</sup> Обрнут смер протока од оног приказаног на слици 42

<sup>b</sup> према (202) – наставка напомена уз табелу се даје на следећој страни

<sup>o</sup> Видети у прилогу пример 22

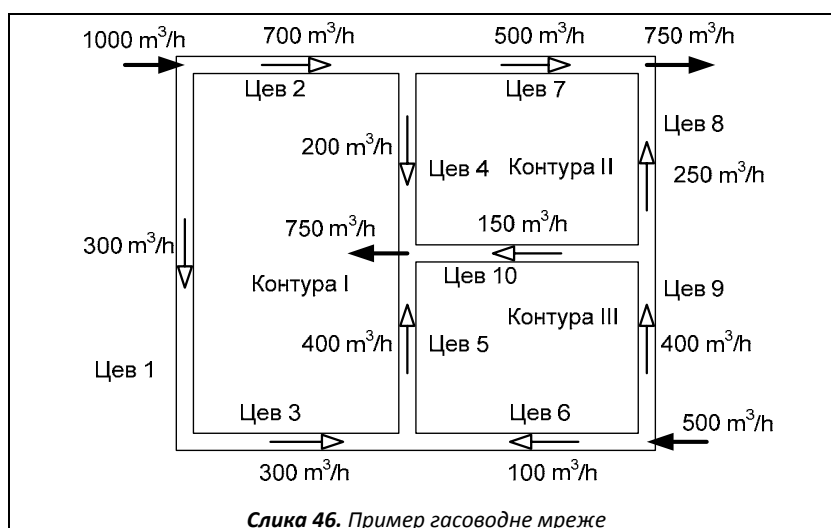
Наставак напомена уз табелу 18 са претходне стране

<sup>c</sup>Ово су крајњи прорачунати пречници, међутим такве цеви у стварности не постоје тако да се морају одабрати цеви са стандардним пречницима и то тако да се бира први већи уколико је брзина већа од 1 m/s односно први мањи ако је брзина испод 1 m/s. Након овога би се пореметили протоци, што би захтевало класичан прорачун протока са тако одабраним стандардним пречницима

<sup>d</sup>вредности из табеле 17; не постоји директна корелација између пречника у табели 17 и овде прорачунатих (оптимизованих)

За разлику од решења класичног проблема које је јединствено, код проблема оптимизације постоји бесконачно много решења. Међутим ако се претпостави брзина флуида за коју се мрежа оптимизује то решење је јединствено (у нашем случају та брзина је 1 m/s а оптимизовани пречници су дати у табели 18). Као што се види из табеле прорачунска брзина је када се све цеви узму у обзир у просеку око 1 m/s. Да се оптимизација вршила нпр. за брзину од 2 m/s, цеви би биле мањег пречника.

Сада се може приступити оптимизацији гасоводне мреже приказане на слици 46. На улазима у мрежу гас је под притиском од  $4 \cdot 10^5$  Pa abs. Гасоводну мрежу треба оптимизовати за брзину од 15 m/s применом модификоване Харди Крос методе. Дужина свих цеви са слике 46 је 100m, осим цеви 1 чија је дужина 200m.



Код тзв. класичног проблема мрежа се посматра као већ дата, тј. са унапред одређеним пречницима, дужинама и храпавостима цеви, као и са унапред одређеним максималним потрошњама флуида по чворовима мреже (улази флуида у мрежу се посматрају као негативна потрошња), док се прерасподела протока по гранама (цевима) мреже прорачунава. Код проблема оптимизације, унапред је позната расподела протока по гранама цевоводне мреже, док се пречници прорачунавају у итеративном поступку. У случају протока гаса кроз полиетиленске цеви вредност релативне храпавости се занемарује јер је у овом случају режим протока уобичајено хидраулички 'гладак'. У овом раду ће се посматрати само проблем дистрибуције гаса као сложенији у односу на проблем дистрибуције воде из тог разлога што је гас компресибилан флуид. Наиме у типичној градској мрежи за дистрибуцију гаса притисак је отприлике  $4 \cdot 10^5$  Pa abs., што

значи да иста маса гаса има четири пута мању запремину од запремине исте масе гаса на нормалним или стандардним условима. Последица овога је да брзина гаса у цевоводу зависи од притиска који влада у истом (207):

$$v = \frac{4 \cdot p_{st} \cdot Q}{D_u^2 \cdot \pi \cdot p} \quad (207)$$

Једначина (202) се примењује за нестишљив проток течног флуида, док се формула (207) примењује за стишљив проток гасовитог флуида.

На основу једначине (207) лако се може изразити непознати пречник (208):

$$D_u = \sqrt{\frac{4 \cdot p_{st} \cdot Q}{v \cdot \pi \cdot p}} \quad (208)$$

У претходној једначини (208) једина непозната величина је брзина флуида која се у случају протока гаса усваја да буде мања од 20 m/s, док се за мреже којима се дистрибуира течни флуид брзина усваја као знатно нижа и то у опсегу 0,75-1,5 m/s. Усвојиће се да је у нашем случају брзина струјања гаса кроз цеви 15 m/s. Израчунати полазни пречници за пример са слике 46 се дају у табели 19:

**Табела 19.** Полазни (А) и коначни (Б) пречници (модификована Харди Крос метода)

Цев	D <sub>u</sub> (mm)		Цев	D <sub>u</sub> (mm)	
	(А)	(Б)		(А)	(Б)
1	42,05	45,86	6	24,28	23,94
2	64,24	60,43	7	54,29	52,75
3	42,05	45,86	8	38,39	39,93
4	34,34	32,07	9	48,56	48,90
5	48,56	52,03	10	29,74	28,53

Пречници цеви у табели 19 су добијене за  $p/p_{st}=4$ . Падови притиска за гасне мреже се добијају на основу добро познате и у овој дисертацији много пута помињане Реноарове једначине (209):

$$F = p_2^2 - p_1^2 = 4810 \cdot \frac{p_f \cdot L \cdot Q_{st}^{1,82}}{D_u^{4,82}} \quad (209)$$

Са слике 46 може се закључити да је за сваки чвор мреже задовољен услов по првом Кирхофовом закону који мора и да се одржи за сваку наредну итерацију. Међутим за пречнике дате у табели 19 под (А), други Кирхофов закон није задовољен, тако да се мора приступити уравнотежењу мреже које се може извести на два начина, и то:

1. **Класично**, тако што се пречници цеви сматрају константама, а протоци по цевима се прорачунавају погодном методом, или

2. **Оптимизацијом**, где се пречници сматрају променљивима а протоци по гранама мреже константама.

Слично као и код класичног метода дефинисаће се функције контура (210) полазећи од једначине (209) за мрежу са слике 46.

$$\left. \begin{aligned} F_I &= F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 \\ F_{II} &= F_4 - F_7 + F_8 - F_{10} \\ F_{III} &= -F_5 - F_6 + F_9 + F_{10} \end{aligned} \right\} \quad (210)$$

Функције контура (210) су написане тако што је свака контура описивана у смеру супротном од кретања казаљке на сату. За разлику од класичног приступа, за методу оптимизације пречника је потребно наћи изводе и то тако ако се пречници посматрају као променљиве величине (211):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_I(D_u)}{\partial D_u} &= \frac{\partial F_1(D_u)}{\partial D_u} - \frac{\partial F_2(D_u)}{\partial D_u} + \frac{\partial F_3(D_u)}{\partial D_u} - \frac{\partial F_4(D_u)}{\partial D_u} + \frac{\partial F_5(D_u)}{\partial D_u} \\ \frac{\partial F_{II}(D_u)}{\partial D_u} &= \frac{\partial F_4(D_u)}{\partial D_u} - \frac{\partial F_7(D_u)}{\partial D_u} + \frac{\partial F_8(D_u)}{\partial D_u} - \frac{\partial F_{10}(D_u)}{\partial D_u} \\ \frac{\partial F_{III}(D_u)}{\partial D_u} &= -\frac{\partial F_5(D_u)}{\partial D_u} - \frac{\partial F_6(D_u)}{\partial D_u} + \frac{\partial F_9(D_u)}{\partial D_u} + \frac{\partial F_{10}(D_u)}{\partial D_u} \end{aligned} \right\} \quad (211)$$

На пример, за цев 1 први извод је (212):

$$F_I' = \frac{\partial F_I(D_u)}{\partial D_u} = -4,82 \cdot 4810 \cdot \frac{\rho_r \cdot L \cdot Q_1^{1,82}}{D_1^{5,82}} \quad (212)$$

Поправка пречника за прву контуру се према класичној Харди Крос методу рачуна, нпр. за контуру I као (213):

$$\Delta_I(D_u) = \Delta_I = \frac{F_I(D_u)}{\frac{\partial F_I(D_u)}{\partial D_u}} \quad (213)$$

Пошто ће се оптимизација у нашем случају вршити унапређеном Харди Кросовом методом за коју је потребно увести матрични рачун, прорачун поправних пречника записати у матричном облику (214):

$$\left[ \nabla F(D_u)^{(i-1)} \right]_X \left[ \Delta D_u^i \right] = \left[ F(D_u)^{(i-1)} \right] \quad (214)$$

У нашем случају матрица, тј. вектор непознатих поправки протока се може записати као (215):

$$[\Delta D_u^i] = \begin{bmatrix} \Delta_I(D_u) \\ \Delta_{II}(D_u) \\ \Delta_{III}(D_u) \end{bmatrix}_i \quad (215)$$

Вектор функција контура се даје у матричном облику као (216):

$$[F(D_u)^{(i-1)}] = \begin{bmatrix} F_I(D_u) \\ F_{II}(D_u) \\ F_{III}(D_u) \end{bmatrix}_{i-1} \quad (216)$$

Матрица извода се у случају оригиналне Харди Крос методе даје као (217):

$$[\nabla F(D_u)^{(i-1)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_I(D_u)}{\partial D_u} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_{II}(D_u)}{\partial D_u} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_{III}(D_u)}{\partial D_u} \end{bmatrix}_{i-1} \quad (217)$$

Бројач  $i$  се односи на одређену итерацију. Разлика између оригиналне и унапређене Харди Крос методе је у томе што се код оригиналне методе јављају само 0 на местима свих чланова ван главне дијагонале у матрици извода функција контура (218). Код модификоване Харди Крос методе ова празна поља се попуњавају на основу суседности контура. Тако нпр. цев 4 је заједничка за контуре I и II, цев 10 за контуре II и III, док је цев 5 заједничка за контуре I и III. Тако се у случају унапређеног Харди Крос метода може написати матрица извода као (218). Матрица извода је симетрична у односу на главну дијагоналу. Тако се нпр. у пресеку прве колоне и другог реда, као и у пресеку првог реда и друге колоне уписује исти члан, односно извод функције цеви 4 пошто је ова цев заједничка контуре I и II. Сви елементи ван главне дијагонале у матрици извода се узимају са супротним предзнаком од оних на главној дијагонали.

$$[\nabla F(D_u)^{(i-1)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_I(D_u)}{\partial D_u} & -\frac{\partial F_4(D_u)}{\partial D_u} & -\frac{\partial F_5(D_u)}{\partial D_u} \\ -\frac{\partial F_4(D_u)}{\partial D_u} & \frac{\partial F_{II}(D_u)}{\partial D_u} & -\frac{\partial F_{10}(D_u)}{\partial D_u} \\ -\frac{\partial F_5(D_u)}{\partial D_u} & -\frac{\partial F_{10}(D_u)}{\partial D_u} & \frac{\partial F_{III}(D_u)}{\partial D_u} \end{bmatrix}_{i-1} \quad (218)$$

Након прорачуна матрице непознатих, тј. матрице поправних протока, на пречник сваке цеви у одређеној контури који је прорачунат у претходној итерацији потребно је додати одговарајућу поправку за припадајућу контуру са негативним предзнаком. Тако нпр. поравни пречник  $\Delta_i$  се додаје са негативним предзнаком на пречнике свих цеви из прве контуре, тј. на цеви 1, 2, 3, 4 и 5. Пречници цеви 1, 3 и 5 у првој итерацији се узимају као позитивни јер се њихов смер поклапа са усвојеним смером обиласка контуре.

Цеви заједничке за две контуре морају примити додатну корекцију пречника на основу правила, тако да алгебарско сабирање треба извршити на основу следећих правила која су већ претходно објашњена и која гласе (поглавље В.1.1):

- Алгебарски знак за поправку  $\Delta_1$  треба узети са различитим предзнаком од свог знака, тј. потребно је сабрати када је знак – (минус), и обрнуто;
- Алгебарска операција за поправку  $\Delta_2$  треба да буде супротна од њеног доњег знака када је горњи знак исти као онај уз проток срачунат у претходној итерацији (односно у првој итерацији знак уз претпостављен иницијални проток), у супротном је исти као доњи знак.

Горњи знак који се обично пише уз поправку пречника која потиче из суседне контуре ( $\Delta_2$ ) при прорачуну; + (плус) или – (минус), указује нам на начин обилажења суседне контуре у односу на претпостављени смер протока. Уколико се смер претпостављеног протока поклопи са смером обилажења суседне контуре усваја се горњи знак + (плус), у супротном –(минус). Доњи знак се преписује из прве поправке суседне контуре са којом постоји заједничка цев. Корекција  $\Delta_1$  се односи на припадајућу контуру, док се корекција  $\Delta_2$  усваја из контура којима припадају заједничке цеви (видети табелу 5 за појмове горњи и доњи знак).

Прорачун се зауставља када услов по другом Кирхофовом закону буде приближно 0 у складу са унапред претпостављеном тачношћу. У литератури се често први Кирхофов закон назива и првим законом хидраулике, а други Кирхофов закон другим законом хидраулике. Први закон суштински одговара принципу одржања масе, а други одржања енергије. Прва итерација за овај прорачун се даје у табели 20:

**Табела 20.** Пример прорачуна модификованом Харди Крос методом (прва итерација за мрежу са слике 46)

Цев	D (m)	F	F'	Корекција 1	Корекција 2	D (m)	
I	1	+0,04205	+28746376456	-3294893153110	+0,003400943	+0,045453	
	2	-0,06424	-8718601136	-654209195465	+0,003400943	-0,060835	
	3	+0,04205	+14373188228	-1647446576555	+0,003400943	+0,045453	
	4	-0,03434	-18257737380	-2563013020964	+0,003400943	-0,001280657±	-0,032215
	5	+0,04856	+12129398327	-1204004519864	+0,003400943	-0,000240858=	+0,051718
	$\Sigma$	+28272624496	-9363566465958				
		$\Delta_1(D_{ij})=-0,003400943$ ; према j-ни (231)					
II	4	+0,03434	+18257737380	-2563013020964	+0,001280657	-0,003400943=	+0,032215
	7	-0,05429	-10633160046	-944052622692	+0,001280657		-0,053009
	8	+0,03839	+16005529575	-2009642924520	+0,001280657		+0,039669
	10	-0,02974	-21635194830	-3506986026540	+0,001280657	-0,000240858±	-0,028696
	$\Sigma$	+1994912078	-9023694594716				
		$\Delta_2(D_{ij})=-0,001280657$ ; према j-ни (231)					
III	5	-0,04856	-12129398327	-1204004519864	+0,000240858	-0,003400943±	-0,051718
	6	-0,02428	-27482399807	-5455989273507	+0,000240858		-0,024038
	9	+0,04856	+12129398327	-1204004519864	+0,000240858		+0,048799
	10	+0,02974	+21635194830	-3506986026540	+0,000240858	-0,001280657=	+0,028696
	$\Sigma$	-5847204976	-11370984339774				
		$\Delta_3(D_{ij})=-0,000240858$ ; према j-ни (231)					

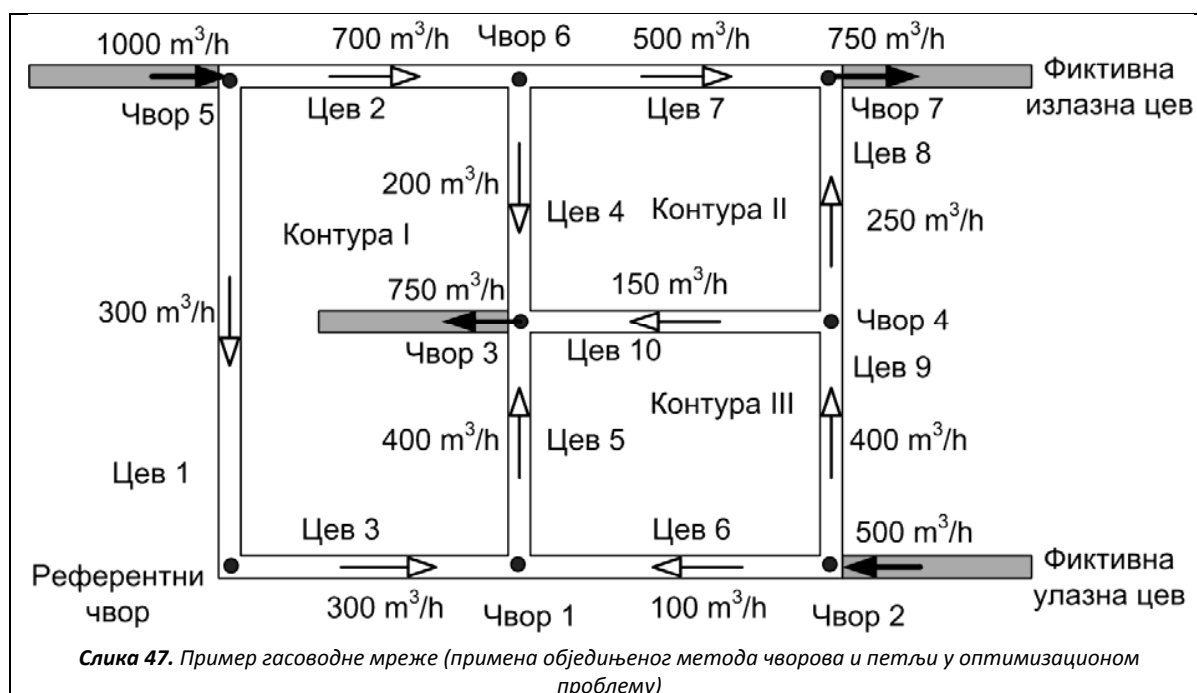
По завршетку прорачуна, брзина протока флуида неће бити она за коју је вршена оптимизација, већ ће та брзина (у нашем случају 15 m/s), бити отприлике средња брзина протока у мрежи. У неким гранама ће бити мања, док ће у неким бити већа од ове 'оптимизирајуће' брзине, али се ниуједној цеви неће јавити превелико одступање (Табела 21). Наравно, крајњи резултати који се добију за пречнике неће одговарати стандардним пречницима цеви, тако да је потребно усвојити први већи или мањи стандардни пречник. Ово ће унеколико покварити расподелу протока по цевима тако да би било добро са овим стандардним пречницима још једном прорачунати мрежу на класичан начин код кога се протоци посматрају као променљиве.

За прорачун приказан у табели 20 су потребни протоци по цевима који су дати на слици 46, док је потребна дужина цеви дата у претходном тексту. Протоци у прорачуну приказаном у табели 20 морају бити у m<sup>3</sup>/s. Коначне брзине протока гаса по цевима су дате у табели 21. Прорачун је вршен у десет итерација.

Табела 21. Крајње брзине протока (модификована Харди Крос метода)

Цев	u (m/s)	Цев	u (m/s)
1	12,61	6	15,43
2	16,95	7	15,89
3	12,61	8	13,86
4	17,20	9	14,79
5	13,07	10	16,29

Оптимизација исте мреже (Слика 46) се може извршити и применом обједињене методе чворова и прстенова. Извесна прилагођења потребна за прорачун се дају на слици 47.





Мрежа приказана на слици 47 је истоветна са мрежом са слике 46, са тиме да су на мрежи 47 додељени редни бројеви чворовима а исто тако су додате и фиктивне излазне цеви. Да би се оптимизовала мрежа обједињеном методом чворова и прстенова, потребно је излазне и улазне протоке који су константни, заменити фиктивним цевима са константним пречницима. Већ је раније напоменуто да у оптимизационој проблему, за разлику од класичног, решење није јединствено. Иако се очекује да се за одређену фиксну оптимизирајућу брзину добије истоветно решење применом било које методе, то овде није случај. Обједињени метод чворова и петљи више “разбаца” решења око оптималне брзине за разлику од модификованог Харди Крос метода. У поглављу В.3 ове дисертације је приказан класичан поступак решавања дистрибуционе мреже обједињеном методом чворова и петљи. Овде ће се тај метод прилагодити за решавање оптимизационог проблема. Даље решење се односи на мрежу са слике 47 за коју се може написати проширена матрица чворова (219):

$$[N^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (219)$$

Први ред проширене матрице чворова (219) се односи на референтни чвор па се он изоставља без икаквог губитка информација о матрици чиме се добија матрица чворова (220):

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (220)$$

На сличан начин се успоставља и матрица контура (221):

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (221)$$

Даље се матрице чворова и контура могу објединити у јединствену матрицу на следећи начин (222):

$$[NL]= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 \cdot \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/1/)}{\partial D_{/1/}} & -1 \cdot \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/2/)}{\partial D_{/2/}} & 1 \cdot \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/3/)}{\partial D_{/3/}} & -1 \cdot \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/4/)}{\partial D_{/4/}} & 1 \cdot \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/5/)}{\partial D_{/5/}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdot \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/4/)}{\partial D_{/4/}} & 0 & 0 & -1 \cdot \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/7/)}{\partial D_{/7/}} & 1 \cdot \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/8/)}{\partial D_{/8/}} & 0 & -1 \cdot \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/10/)}{\partial D_{/10/}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \cdot \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/5/)}{\partial D_{/5/}} & -1 \cdot \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/6/)}{\partial D_{/6/}} & 0 & 0 & 1 \cdot \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/9/)}{\partial D_{/9/}} & 1 \cdot \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/10/)}{\partial D_{/10/}} \end{bmatrix} \quad (222)$$

Док се матрица [V] може написати као (223):

$$[V]= \begin{bmatrix} 0 \\ \sim D(Q_{(2\text{-input})}) \\ \sim D(Q_{(3\text{-output})}) \\ 0 \\ \sim D(Q_{(5\text{-input})}) \\ 0 \\ \sim D(Q_{(6\text{-output})}) \\ -C_1 + \left( - \left| \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/1/)}{\partial D_{/1/}} \right| \cdot D_{/1/} - \left| \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/2/)}{\partial D_{/2/}} \right| \cdot D_{/2/} - \left| \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/3/)}{\partial D_{/3/}} \right| \cdot D_{/3/} - \left| \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/4/)}{\partial D_{/4/}} \right| \cdot D_{/4/} - \left| \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/5/)}{\partial D_{/5/}} \right| \cdot D_{/5/} \right) \\ -C_2 + \left( - \left| \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/4/)}{\partial D_{/4/}} \right| \cdot D_{/4/} - \left| \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/7/)}{\partial D_{/7/}} \right| \cdot D_{/7/} - \left| \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/8/)}{\partial D_{/8/}} \right| \cdot D_{/8/} - \left| \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/10/)}{\partial D_{/10/}} \right| \cdot D_{/10/} \right) \\ -C_3 + \left( - \left| \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/5/)}{\partial D_{/5/}} \right| \cdot D_{/5/} - \left| \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/6/)}{\partial D_{/6/}} \right| \cdot D_{/6/} - \left| \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/9/)}{\partial D_{/9/}} \right| \cdot D_{/9/} - \left| \frac{\partial(\Delta\tilde{p}^2/10/)}{\partial D_{/10/}} \right| \cdot D_{/10/} \right) \end{bmatrix} \quad (223)$$

Где се обе матрице, и [NL] и [V] користе у изразу (224):

$$[Q]=\text{inv}[NL]x[V] \quad (224)$$

За разлику од класичног проблема код кога су први чланови (онолико колико има чворова умањено за један референтни чвор) потрошње по чворовима, или улази флуида уколико имају негативан предзнак, код оптимизационог проблема то место заузимају фиктивне цеви, чији се пречник израчуна преко следеће формуле (225):

$$\sim D(Q_{(x\text{-input})}) = \sqrt{\frac{4 \cdot Q}{v \cdot \pi}} \quad (225)$$

Када је гас у питању, исто као што је и случај са водом, тј. течним флуидом у претходној формули не постоји корекција запремине у односу на притисак. Разлог овоме треба тражити у томе што ни ког класичног проблема овај улазно/излазни проток не узимамо сведен на притисак у цевоводу, већ га узимамо на стандардним условима. У даљем току прорачуна све је истоветно као и код класичног проблема. Почетни, као и прорачунати пречници се дају у табели 24, с тиме да се другачији пречници добијају за исте почетне

услове применом модификоване Харди Крос методе (упоредити са резултатима у табели 21). Разлика у решењима потиче отуда што је обједињена метода чворова као метода која има већи тзв. Корак прескочи нека од ближих, а самим тим и оптималнијих решења за дату брзину. Нумеричке вредности за прве две итерације се дају у Табелама 22 и 23.

**Табела 22.** Пример прорачуна обједињеном методом чворова и петљи (прва итерација за мрежу са слике 47)

	Цев	L (m)	Q (m <sup>3</sup> /s)	D (m)	F	F'	v (m/s)
I	1	200	+0,08333	+0,04205	+28746376456	-3294893153110	15
	2	100	-0,19444	-0,06424	-8718601136	-654209195465	15
	3	100	+0,08333	+0,04205	+14373188228	-1647446576555	15
	4	100	-0,05556	-0,03434	-18257737380	-2563013020964	15
	5	100	+0,11111	+0,04856	+12129398327	-1204004519864	15
				Σ	+28272624496		
II	4	100	+0,05556	+0,03434	+18257737380	-2563013020964	15
	7	100	-0,13889	-0,05429	-10633160046	-944052622692	15
	8	100	+0,06944	+0,03839	+16005529575	-2009642924520	15
	10	100	-0,04167	-0,02974	-21635194830	-3506986026540	15
				Σ	+1994912078		
III	5	100	-0,11111	-0,04856	-12129398327	-1204004519864	15
	6	100	-0,02778	-0,02428	-27482399807	-5455989273507	15
	9	100	+0,11111	+0,04856	+12129398327	-1204004519864	15
	10	100	+0,04167	+0,02974	+21635194830	-3506986026540	15
				Σ	-5847204976		

**Табела 23.** Пример прорачуна обједињеном методом чворова и петљи (друга итерација за мрежу са слике 47)

	Цев	L (m)	Q (m <sup>3</sup> /s)	D (m)	F	F'	v (m/s)
I	1	200	+0,08333	+0,04413	+22775609855	-2487427443773	13,62
	2	100	-0,19444	-0,10942	-669104309.1	-29474443567	5,17
	3	100	+0,08333	+0,04796	+7624695836	-766228359008	11,53
	4	100	-0,05556	-0,03031	-33283696380	-5292246888168	19,24
	5	100	+0,11111	+0,07425	+1566618904	-101704023773	6,42
				Σ	-1985876093		
II	4	100	+0,05556	+0,03031	+33283696380	-5292246888168	19,24
	7	100	-0,13889	-0,07911	-1732253459	-105547815519	7,06
	8	100	+0,06944	+0,05387	+3124830914	-279568295809	7,62
	10	100	-0,04167	-0,02842	-26901848311	-4562326073784	16,42
				Σ	+7774425524		
III	5	100	-0,11111	-0,07425	-1566618904	-101704023773	6,42
	6	100	-0,02778	-0,02628	-18753231989	-3439217179998	12,80
	9	100	+0,11111	+0,08230	+953844553.6	-55865769855	5,22
	10	100	+0,04167	+0,02842	+26901848311	-4562326073784	16,42
				Σ	-7535841971		

Оптимизоване брзине добијене модификованом Харди Крос методом (Табела 21) и обједињеном методом чворова и петљи (Табела 24) се разликују. Међутим мрежа је у оба случаја уравнотежена, што је само још један доказ да оптимизациони метод има

бесконечно много решења, односно применом одређеног метода за одређену претпостављену брзину решење постаје јединствено за дате услове. За претпоставити је да се обједињеном методом чворова и петљи могу добити истоветна решења као и применом модификоване Харди Крос методе. Различитост решења се може објаснити тиме да је већи 'корак' обједињене методе чворова и петљи у односу на модификовану Харди Крос методу, тако да се поједина оптимална решења која су ближа почетним условима једноставно прескоче.

**Табела 24.** *Полазни (А) и коначни (Б) пречници (обједињена метода чворова и петљи)*

Цев	$D_u$ (mm)	
	(А)	(Б)
1	42,05	45,31
2	64,24	108,25
3	42,05	49,14
4	34,34	31,47
5	48,56	73,40
6	24,28	24,27
7	54,29	76,78
8	38,39	56,20
9	48,56	84,31
10	29,74	28,11

Коначне брзине које одговарају фиксираном протоку гаса по цевима и крајњим пречницима из табеле 24 се дају у табели 25:

**Табела 25.** *Крајње брзине протока (обједињена метода чворова и петљи)*

Цев	$u$ (m/s)
1	12,92
2	5,28
3	10,99
4	17,86
5	6,56
6	15,02
7	7,50
8	7,00
9	4,98
10	16,78

Обједињени метод чворова и петљи треба са повећаном опрезношћу користити када је у питању оптимизациони проблем<sup>Р</sup>. Уколико се јави потреба за оптимизацијом цеви у мрежи боље је прорачун вршити модификованим Харди Крос методом.

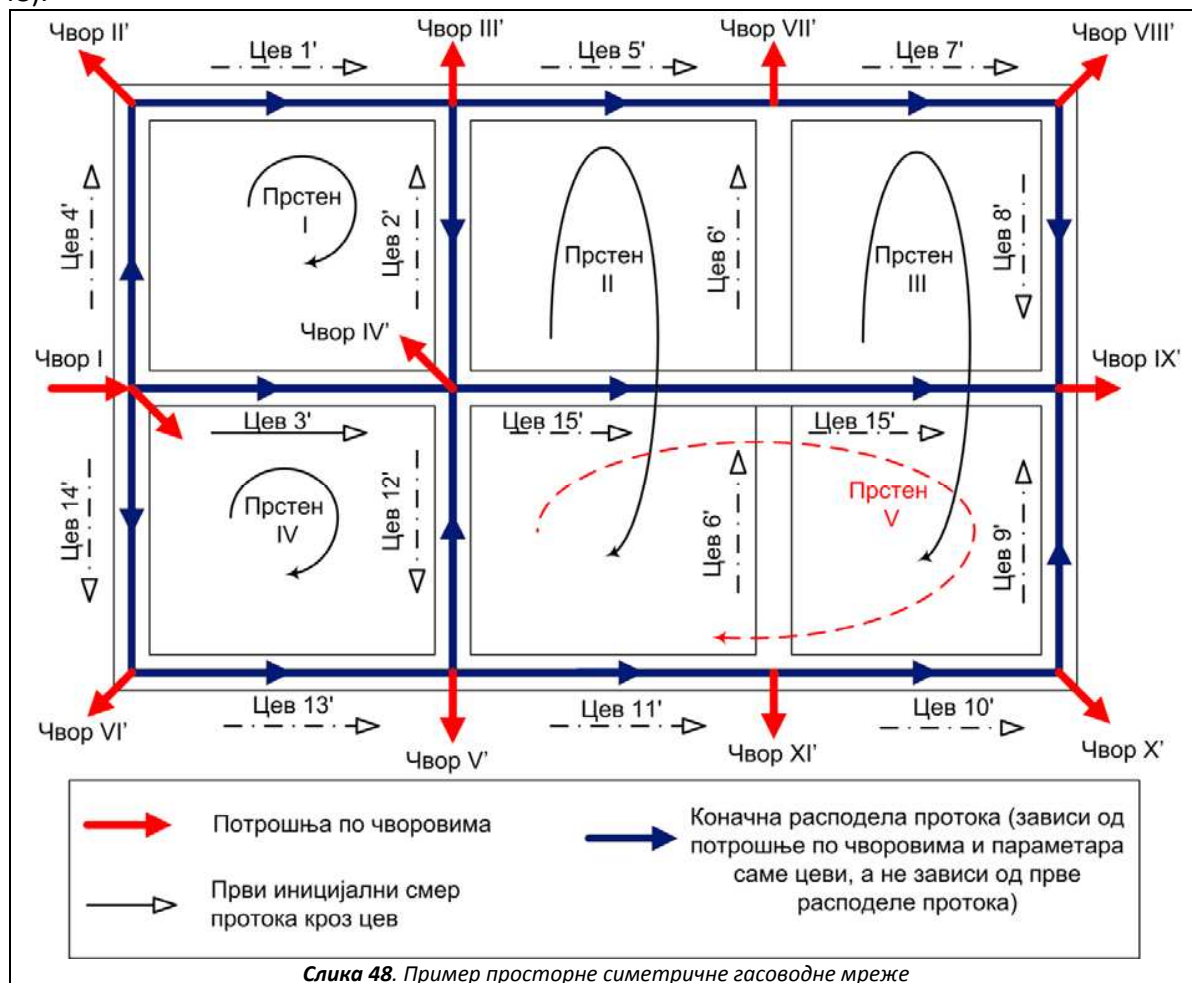
Пречници који су прорачунати у оптимизационом поступку нису стандардни. Зато је потребно одабрати први већи или мањи пречник, и то тако да се бира мањи пречник уколико је прорачуната брзина већа од тзв. оптимизирајуће брзине и обрнуто, први већи уколико је прорачуната брзина мања од тзв. оптимизирајуће брзине која се користи као параметар у прорачуну. Ова промена пречника одабиром првом стандардног из расположивог сета цеви квари равнотежу по другом Кирхофовом закону тако да је потребно извршити још једну рачуницу, тј. за те нове пречнике цеви, сада стандардне, потребно је извршити прорачун стационарне расподеле протока по цевима прстенастог дела гасоводне мреже.

---

<sup>Р</sup> У прилогу, пример 23 се оптимизује просторна гасоводна мрежа која је више пута досад служила за објашњавања у оквиру ове дисертације

## Д. Примери из праксе; реалне гасоводне мреже прстенастог типа

На примеру симетричне мреже како по распореду цеви, тако и по потрошњи и улазима, могу се идентификовати неки типични проблеми који могу да се јаве у раду мреже (Слика 48).



Слика 48. Пример просторне симетричне гасоводне мреже

Мрежа је изабрана врло пажљиво како би се могући проблеми који могу да се јаве што јасније испољили. За овако постављену мрежу проток кроз цев 6 би морао да буде двосмеран или да га уопште не буде. Методе које су у овом докторату приказане, као уосталом и све методе које обрађују овај проблем, полазе од претпоставке да је потрошња придружена чворовима, тј. да се у свим цевима флуид креће од једног краја цеви ка другом, са тиме да се током прорачуна смер може променити.

Међутим треба узети у обзир да се реални потрошачи налазе дуж цеви. Ово имплицира да би потрошачи дуж цеви остали без потребне количине гаса (математичка интерпретација проблема). Уколико је мрежа добро конципирана, то се неће десити. У нашем случају протоци у мрежи неће при највећем оптерећењу мреже бити једнаки прорачунатим, већ ће се прерасподелити и то тако да неке од грана буду двосмерно напајане (Слика 49) (Калуђерчић 2002).

Потрошња по чворовима мреже са слике 48 се даје у табели 26.

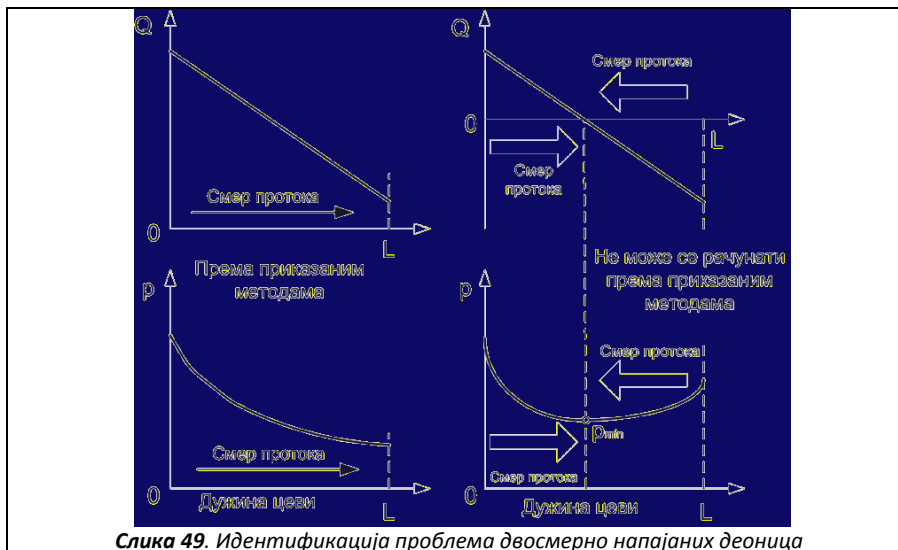
**Табела 26.** Константна потрошња и улази по чворовима мреже са слике 48

Чвор	m <sup>3</sup> /h	m <sup>3</sup> /s	Чвор	m <sup>3</sup> /h	m <sup>3</sup> /s
I'	60	1/60	I'	-7000	-1 17/18
II'	2300	23/36			
III'	185	37/720			
IV'	90	1/40			
V'	185	37/720			
VI'	2300	23/36			
VII'	290	29/360			
VIII'	225	1/16			
IX'	850	17/72			
X'	225	1/16			
XI'	290	29/360			

Први иницијални, претпостављени протоци по гранама мреже се дају у табели 27.

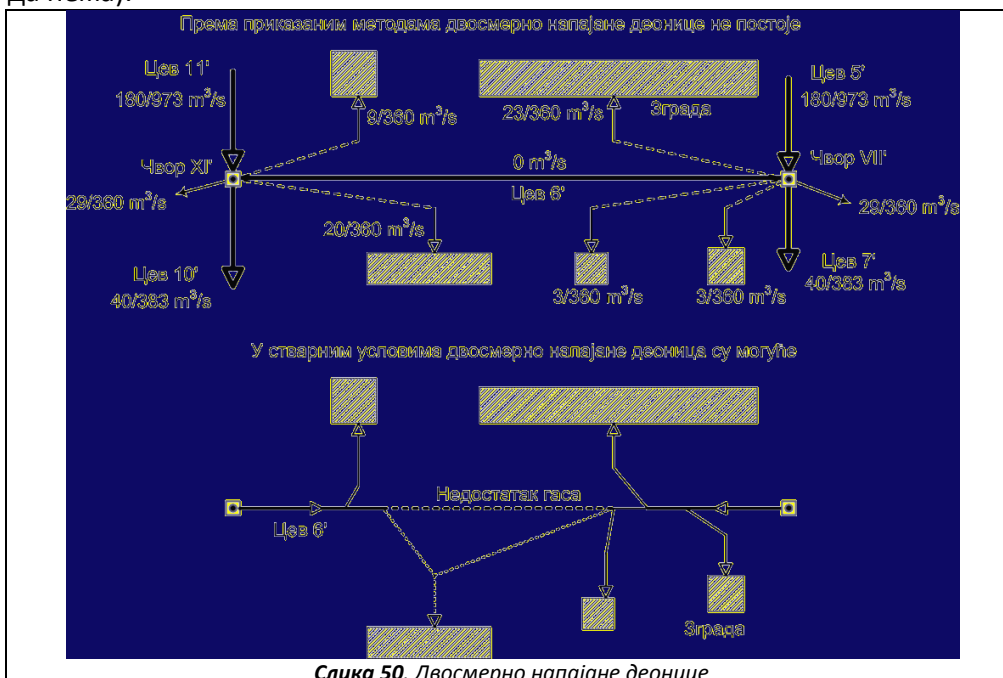
**Табела 27.** Иницијални и крајњи прорачунати протоци по гранама мреже са слике 48

Цев	D (m)	Иницијални проток		Прорачунати проток	
		m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /h	m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /h
1'	0,1524	7/36	700	85/421	726,84
2'	0,1524	1/9	400	1/29	124,14
3'	0,1524	47/180	940	81/329	886,32
4'	0,3048	5/6	3000	639/760	3026,84
5'	0,1524	61/240	915	180/973	665,98
6'	0,3048	13/144	325	0	0
7'	0,1524	19/72	950	40/383	375,98
8'	0,3048	29/144	725	32/763	150,98
9'	0,3048	1/48	75	32/763	150,98
10'	0,1524	1/12	300	40/383	375,98
11'	0,1524	61/240	915	180/973	665,98
12'	0,1524	1/9	400	1/29	124,14
13'	0,1524	7/36	700	85/421	726,84
14'	0,3048	5/6	3000	639/760	3026,84
15'	0,1524	1/72	50	58/381	548,03



Слика 49. Идентификација проблема двосмерно напајаних деоница

Ово имплицира да су у симетричним мрежама најугроженији потрошачи који се налазе на средини деоница, тј. грана мреже (Слика 50). У неким случајевима код прорачуна оваквих мрежа може да дође до дивергенције метода, или што је чешћи случај мрежа прорачунски може да дође у стање тзв. клацкалице, тј. да се у свакој итерацији мења смер у појединим деоницама и тако у недоглед (нити конвергира нити дивергира). У овом случају треба променити топлогију мреже, а уколико то није могуће, променити метод прорачуна. Ипак пошто је мрежа систем под притиском констатација да у некој мрежи нема протока не значи да у њој нема гаса (гледа се математичка а не физичка интерпретација), слично као и у суду у коме се налази гас под притиском (не може се десити ако се макроскопски посматра стање гаса у суду да у једном делу суда има гаса а у другом да нема).



Слика 50. Двосмерно напајане деонице



Градски гасовод састоји се из напојног гасовода и градске гасне мреже. Напојни гасовод назива се још изворним гасоводом и повезује магистрални гасовод преко регулационо мерне станице са градским гасоводом. Према својој функцији могу бити транзитни и расподелни. Транзитни гасовод служи за транспорт гаса из једног дела града у други, док разводни и расподелни служе за снабдевање потрошача. Притисак гаса у овим гасним системима није исти, па су међусобно повезани преко мерно-регулационих станица. Стриктна подела на гасоводе ниског, средњег и високог притиска у свету не постоји као стандард када се посматрају притисци на основу којих се врши ова подела.

Гасоводи високог притиска од  $12 \cdot 10^5$  Pa и више снабдевају гасну мрежу високог притиска преко својих регулационих станица. Гасна мрежа високог притиска снабдева гасну мрежу средњег притиска преко својих регулационих станица, док гасна мрежа средњег притиска снабдева гасну мрежу ниског притиска преко регулационих пунктова. Наравно, многи од ових међугасовода не морају да постоје.

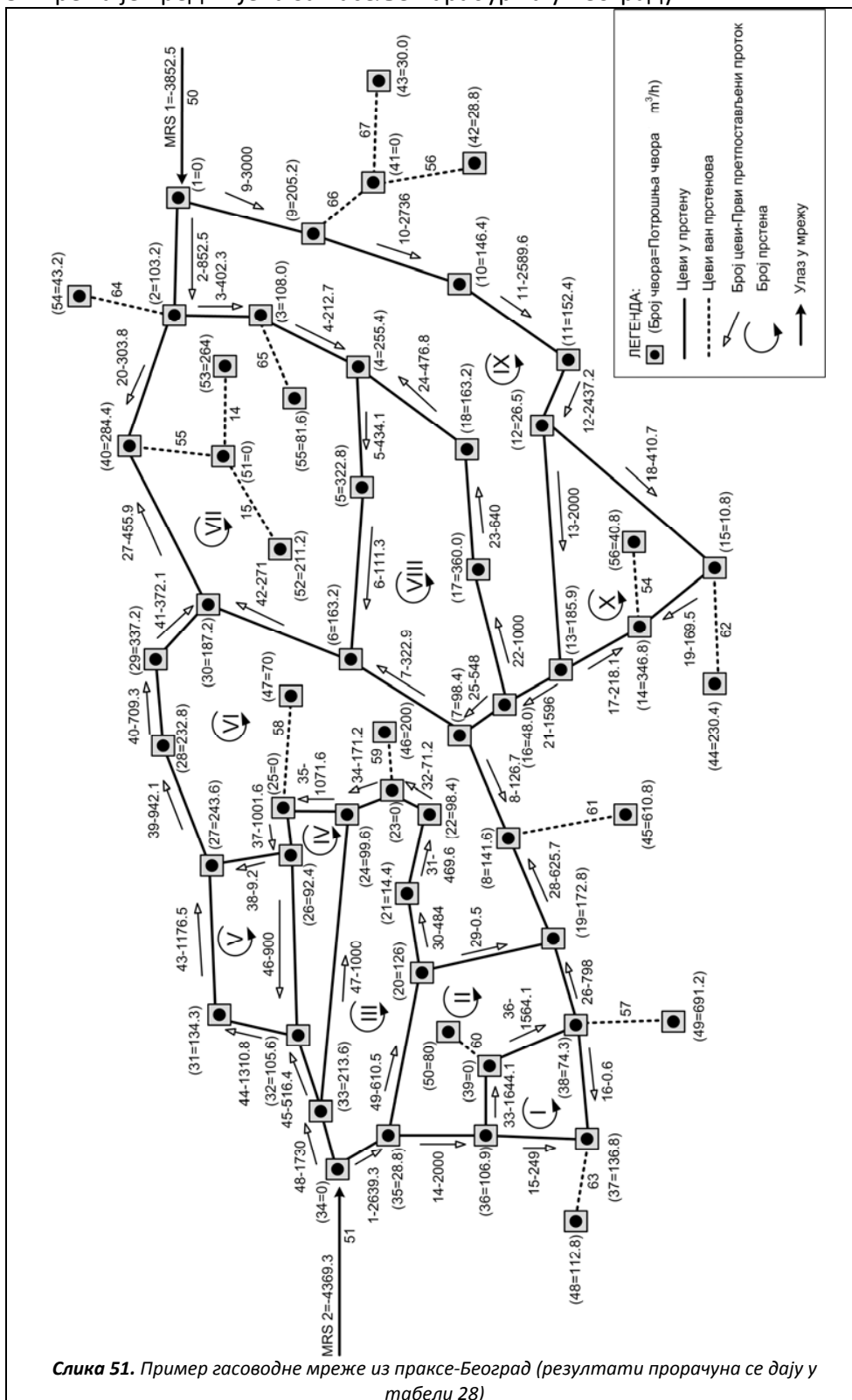
Може се десити, да се поједини индустријски потрошачи снабдевају директно из гасне мреже средњег или високог притиска, преко својих регулационих станица, које морају имати посебно обезбеђење у случају квара регулационог система. Исто тако и велики потрошачи ниског притиска могу се снабдевати гасом из мреже средњег или високог притиска, да не би обарали притисак гаса у мрежи ниског притиска, наравно преко својих посебних регулационих станица и посебним обезбеђењем.

У зависности од тога да ли се у граду, или у појединачним насељима, користи гас са једним, два или више притисака, градска разделна мрежа може се поделити у четири система и то на:

- Једностепени разделни систем снабдевања гасом. Напајање система може бити преко једног, или више регулационих пунктова.
- Двостепени разделни систем снабдевања гасом састоји се из система ниског притиска и из система средњег, или високог притиска. Системи су међусобно повезани преко регулационе станице. Напајање система врши се преко више пунктова и користи се за градске мреже већих градова.
- Тростепени разделни систем снабдевања гасом састоји се из система ниског, средњег и високог притиска. Систем високог притиска састоји се од кружног вода који преко регулационих станица напаја систем средњег притиска, а овај преко регулационих пунктова напаја систем ниског притиска. Употребљава се за градске мреже великих градова.
- Четворостепени или вишестепени разделни систем снабдевања гасом састоји се из кружног прстена високог притиска или више, који се поставља ван града и преко својих главних разводних и регулационих станица напаја гасну мрежу тростепеног система. Код градова са великим променама потрошње гаса између кружних прстенова.

У даљем тексту се даје неколико примера гасоводних мрежа из Србије.

Резултати прорачуна за гасоводну прстенасту мрежу приказану на слици 51 се дају у табели 28. Мрежа је предвиђена за насеље Карабурма у Београду.



Слика 51. Пример гасоводне мреже из праксе-Београд (резултати прорачуна се дају у табели 28)

Д. Примери из праксе; реалне гасоводне мреже прстенастог типа

Табела 28. Резултати прорачун мреже са слике 51-Београд

Цев	Пречник (mm)	Дужина (m)	Проток Q (m <sup>3</sup> /h)					Брзина (m/s)
			1	A	Б	B	Г	
1	147,2	8	2639,30	3003,38	2958,33	2958,33	2989,20	12,20
2	147,2	15	852,50	3014,52	2954,82	2954,82	3015,50	12,31
3	102,2	85	402,30	1526,19	1517,90	1517,90	1526,20	12,92
4	102,2	218	212,70	1336,59	1328,30	1328,30	1336,60	11,31
5	73,6	136	434,10	508,11	493,32	493,32	508,50	8,30
6	51,4	164	111,30	185,31	170,52	170,52	185,70	6,21
7	51,4	197	322,90	-154,94	-130,91	-130,91	-155,10	5,19
8	73,6	98	126,70	-507,59	-465,44	-465,44	-508,80	8,30
9	73,6	157	3000,00	837,98	897,68	897,68	837,00	13,66
10	73,6	242	2736,00	573,98	633,68	633,68	573,00	9,35
11	73,6	159	2589,60	427,58	487,28	487,28	426,60	6,96
12	73,6	7	2437,20	275,18	334,88	334,88	274,20	4,48
13	32,6	324	2000,00	42,61	52,40	52,40	41,80	3,48
14	73,6	169	2000,00	777,59	767,40	767,40	777,90	12,70
15	51,4	146	249,00	245,11	241,42	241,42	246,20	8,24
16	32,6	157	0,60	4,49	8,18	8,18	3,40	0,28
17	73,6	107	218,10	422,72	372,83	372,83	422,90	6,90
18	51,4	265	410,70	206,08	255,97	255,97	205,90	6,89
19	32,6	83	169,50	-35,12	14,77	14,77	35,30	2,94
20	102,2	265	303,80	1341,93	1290,53	1290,53	1342,90	11,37
21	73,6	109	1596,00	-566,02	-506,32	-506,32	-567,00	9,25
22	32,6	232	1000,00	-49,88	-56,37	-56,37	-49,50	4,12
23	73,6	161	640,00	-409,88	-416,37	-416,37	-409,50	6,68
24	73,6	140	476,80	-573,08	-579,57	-579,57	-572,70	9,35
25	73,6	36	548,00	-564,14	-497,95	-497,95	-565,50	9,23
26	73,6	94	798,00	-424,41	-434,60	-434,60	-424,10	6,92
27	73,6	172	455,90	-582,23	-530,83	-530,83	-583,30	9,52
28	102,2	263	625,40	1259,69	1217,54	1217,54	1261,20	10,68
29	102,2	88	0,50	1857,21	1825,24	1825,24	1858,10	15,73
30	51,4	98	484,00	-213,78	-210,89	-210,89	-198,40	6,64
31	51,4	105	469,60	-199,38	-196,49	-196,49	-184,00	6,16
32	32,6	8	71,20	199,02	201,91	201,91	-85,60	7,12
33	73,6	41	1644,10	425,58	419,08	419,08	424,80	6,93
34	32,6	63	171,20	-99,02	-101,91	-101,91	-114,40	9,52
35	51,4	89	1071,60	238,10	242,90	242,90	235,10	7,87
36	51,4	67	1564,10	345,58	339,08	339,08	344,80	11,54
37	51,4	6	1001,60	168,10	172,90	172,90	165,10	5,53
38	51,4	97	9,20	271,53	287,62	287,62	269,90	9,03
39	73,6	144	942,10	307,81	349,96	349,96	306,50	5,00
40	51,4	234	709,30	75,01	117,16	117,16	73,70	2,47
41	51,4	48	372,10	-262,19	-220,04	-220,04	-263,50	8,82
42	51,4	273	271,00	-132,83	-123,59	-123,59	-132,60	4,44
43	51,4	148	1176,50	279,87	305,94	305,94	280,20	9,38
44	73,6	155	1310,80	414,17	440,24	440,24	414,60	6,77

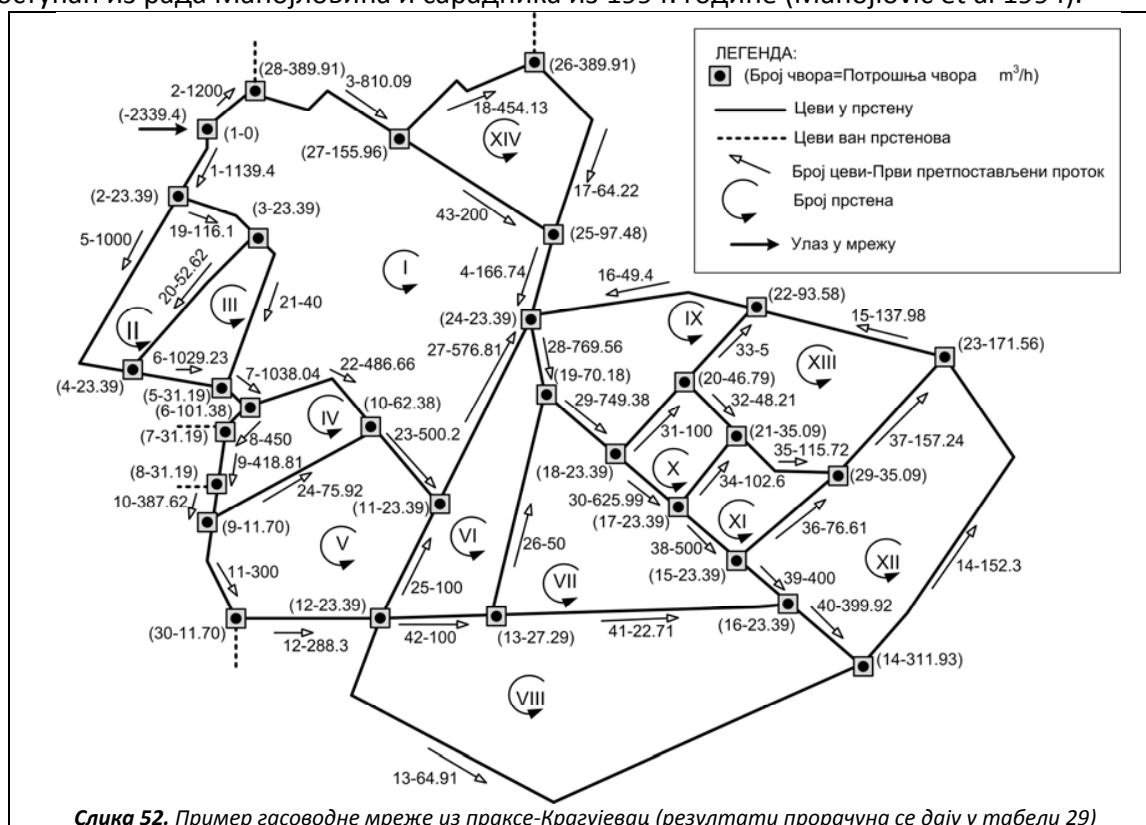
Табела 28. Наставак

45	73,6	32	516,40	715,61	752,96	752,96	717,40	11,71
46	51,4	215	900,00	-195,83	-207,13	-207,13	-197,20	6,60
47	73,6	188	1000,00	436,72	444,41	444,41	449,10	7,33
48	102,2	141	1730,00	1365,92	1410,97	1410,97	1380,10	11,68
49	102,2	110	610,50	2196,99	2162,13	2162,13	2182,50	18,48

1-Почетна иницијална расподела протока,  
 А-Обједињена метода чворова и петљи,  
 Б-Модификована Харди Крос метода,  
 В-Оригинална Харди Крос метода,  
 Г-Према елаборату предузећа Енергогас, Београд (наводи се да је прорачун рађен према Харди Крос итеративној методи и Кирхофовим законима, иницијални распоред протока није приказан)

Разлике у резултатима за поједине методе не треба да буду збуњујући. Ово не умањује вредност претходне напомене у тексту ове дисертације да је решење класичног проблема за дату мрежу јединствено, односно применом сваке од метода после теоретски бесконачног броја итерација би се у свакој од цеви добио исти прорачунски проток. Оно и јесте јединствено, само са том разликом да је различита тачност при којој престаје итеративни поступак у питању.

Резултати прорачуна за гасоводну прстенасту мрежу приказану на слици 52 се дају у табели 29. Мрежа је предвиђена за Крагујевац. За мрежу у Крагујевцу је прорачун доступан из рада Манојловића и сарадника из 1994. године (Манојловић et al 1994).



Слика 52. Пример гасоводне мреже из праксе-Крагујевац (резултати прорачуна се дају у табели 29)

Д. Примери из праксе; реалне гасоводне мреже прстенастог типа

Табела 29. Резултати прорачун мреже са слике 52-Крагујевац

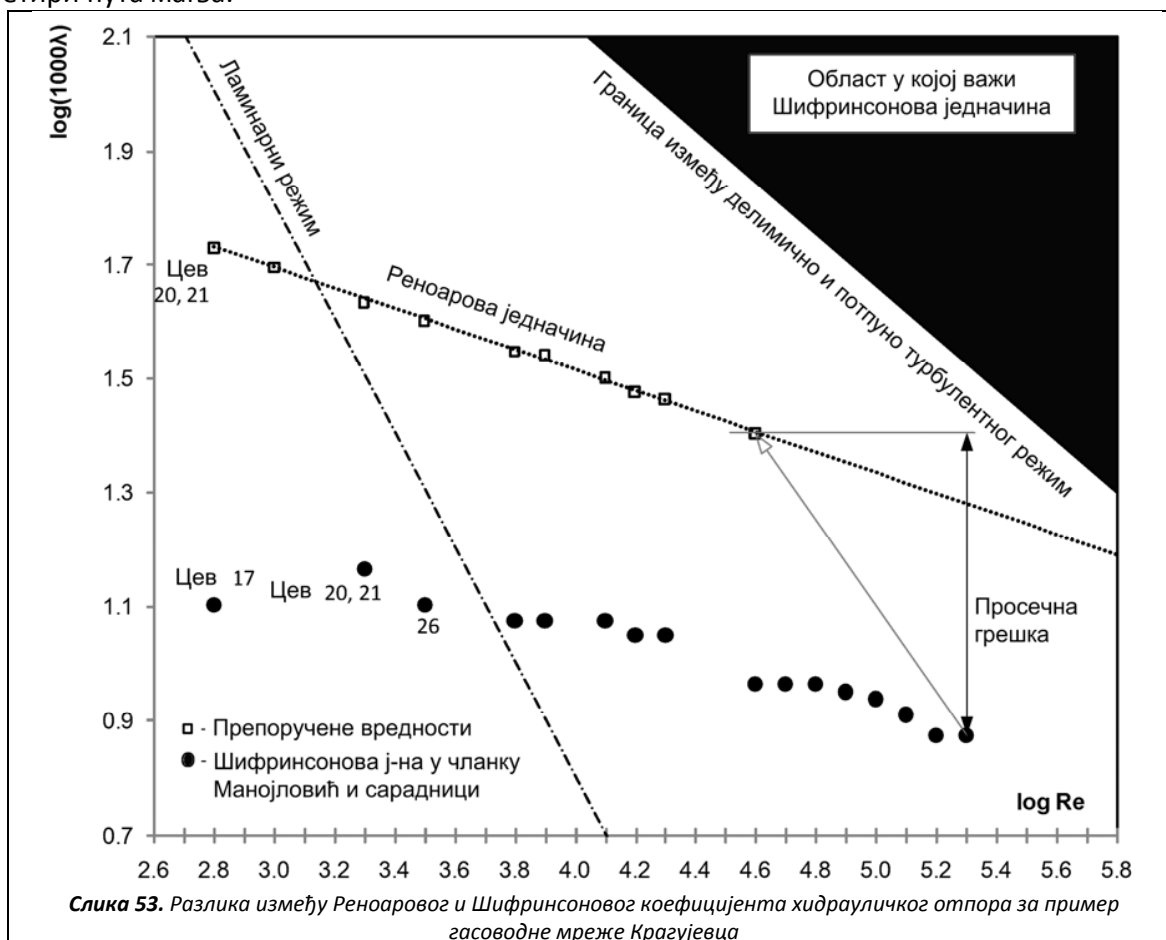
Цев	Пречник (mm)	Дужина (m)	Проток Q (m <sup>3</sup> /h)					Брзина (m/s)
			1	А	Б	В	Г	
1	220,4	84	1139,4	1035,2	1035,9	1086,9	1063,8	1,9
2	220,4	72	1200,0	1304,2	1303,5	1252,5	1275,7	2,4
3	198,2	170	810,1	914,3	913,6	862,6	885,8	2,1
4	109,8	206	166,7	270,9	270,3	219,3	242,4	2,0
5	198,2	224	1000,0	986,5	987,1	1040,0	1014,7	2,2
6	198,2	37	1029,2	964,1	965,0	1017,5	992,2	2,2
7	198,2	30	1038,0	933,9	934,5	985,5	962,4	2,1
8	176,2	35	450,0	543,0	544,2	564,7	567,1	1,5
9	176,2	64	418,8	511,8	513,0	533,5	535,9	1,5
10	158,6	34	387,6	480,6	481,8	502,3	504,7	1,7
11	158,6	119	300,0	433,2	434,5	451,0	454,4	1,5
12	158,6	154	288,3	421,5	422,8	439,3	442,7	1,5
13	44,0	639	64,9	21,0	21,4	20,8	23,6	1,0
14	35,2	268	152,3	-14,6	6,9	6,4	11,2	1,0
15	35,2	164	138,0	-9,5	-7,5	-7,8	-11,7	0,7
16	44,0	276	49,4	25,8	25,4	25,5	-27,4	1,2
17	27,4	363	64,2	0,6	0,5	-2,0	-1,8	0,1
18	123,4	175	454,1	-388,1	390,4	390,5	388,1	2,3
19	44,0	52	116,0	25,3	25,4	23,5	26,7	1,2
20	15,4	177	52,6	1,0	1,3	0,9	0,9	0,4
21	15,4	212	40,0	1,0	0,7	-0,8	1,4	0,4
22	109,8	161	486,7	289,5	288,9	319,4	294,0	2,1
23	123,4	108	500,2	262,8	262,2	296,7	270,1	1,5
24	55,4	194	75,9	35,8	35,6	39,6	35,6	1,0
25	96,8	135	100,0	149,4	147,8	170,1	151,3	1,4
26	27,4	215	50,0	2,9	2,7	3,1	2,5	0,3
27	141,0	155	576,8	388,9	386,5	443,4	398,0	1,7
28	158,6	34	769,6	610,6	608,1	613,8	589,6	2,1
29	158,6	155	749,4	543,3	540,6	546,7	521,9	1,9
30	123,4	86	626,0	376,8	376,6	382,3	351,1	2,2
31	96,8	115	100,0	143,2	140,6	141,0	144,5	1,4
32	35,2	75	48,2	19,1	18,0	18,3	19,8	1,4
33	55,4	70	5,0	77,3	75,8	75,9	77,9	2,2
34	96,8	102	102,6	212,9	196,9	197,1	184,3	2,0
35	96,8	52	115,7	196,9	179,8	180,3	169,0	1,9
36	35,2	104	76,6	14,8	12,4	12,1	14,7	1,1
37	96,8	101	157,2	176,6	157,2	157,3	148,6	1,7
38	96,8	86	500,0	140,5	156,3	161,8	146,4	1,3
39	96,8	37	400,0	102,2	120,5	126,3	108,3	1,0
40	96,8	30	399,3	276,4	297,4	297,6	299,5	2,6
41	96,8	278	22,7	197,5	200,3	194,6	214,6	1,9
42	96,8	115	100,0	227,7	230,2	225,0	244,4	2,1
43	123,4	199	200,0	367,8	367,2	318,8	341,7	2,1

Табела 29. Наставак

1-Почетна иницијална расподела протока,  
 А-Обједињена метода чворова и петљи,  
 Б-Модификована Харди Крос метода,  
 В-Оригинална Харди Крос метода,  
 Г-Према чланку Манојловића, Арсенивића и Пајовића из 1994; иницијални распоред протока није приказан (Манојловић et al 1994)

Прорачун модификованом методом Харди Кроса и оригиналном методом Харди Кроса се добијају исти резултати, са том разликом што за постизање исте тачности треба пар стотина више итерација када се користи оригинална Харди Крос метода у поређењу са модификованом. Отуда исти резултати у табели 28, колоне Б и В, док су табели 29 резултати у колонама Б и В различити управо зато што се није ишло на прорачун са више стотина итерација када је у питању спороконвергентан оригинални Харди Крос метод.

У раду Манојловића и сарадника из 1994. године се добијају другачије брзине пошто они нису узели у обзир да је гас у мрежи компримован на  $4 \cdot 10^5$  Ра, тако да му је и запремина четири пута мања.



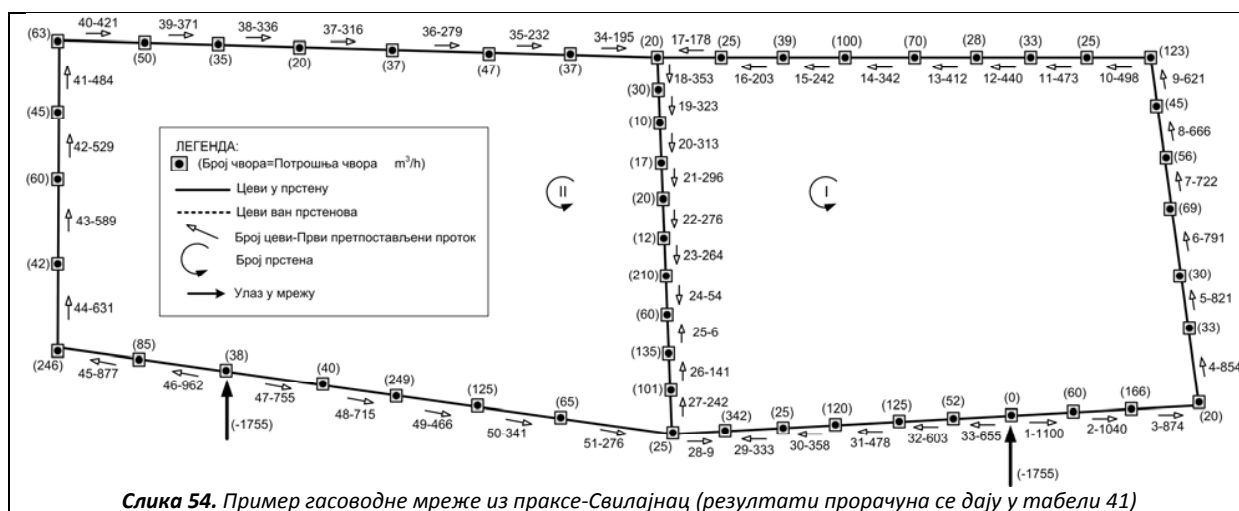
Слика 53. Разлика између Реноаровог и Шифринсоновог коефицијента хидрауличког отпора за пример гасоводне мреже Крагујевца

Д. Примери из праксе; реалне гасоводне мреже прстенастог типа

Манојловић и сарадници су користили Шифринсонову једначину за прорачун Дарсијевог коефицијента хидрауличког отпора<sup>9</sup>. У концепцији која је усвојена у овоме докторату када су у питању гасоводне мреже, прорачун се врши Реноаровом једначином прилагођеном за природни гас. Разлике се дају сликовито на карактеристичном дијаграму који је приказан на слици 53.

У литератури се често констатује да се природни гас у условима дистрибутивне мреже може посматрати као нестишљив флуид. Та констатација је тачна али уз ограду да гас ипак није течност. Наиме гас се са стандардних услова притиска компримује на услове у мрежи што имплицира да се његова запремина смањи неколико пута, затим се тек тако смањена запремина гаса унутар мреже због малих падова притиска може посматрати као нестишљив флуид. По изласку гаса из мреже од на стандардним условима поново заузме неколико пута већу запремину.

На слици 54 се даје нешто мало другачија концепција мреже, али која се исто тако јавља у пракси. Мрежа је предвиђена за Свилајнац. Резултати прорачуна се дају у табели 30.



Слика 54. Пример гасоводне мреже из праксе-Свилајнац (резултати прорачуна се дају у табели 41)

Табела 30. Резултати прорачун мреже са слике 54-Свилајнац

Цев	Пречник (mm)	Дужина (m)	Проток $Q$ ( $m^3/h$ )				Брзина (m/s)
			1	A	Б	B	
1	250	300	1100	1052,05	1052,05	1052,84	1,5
2	250	230	1040	992,05	992,05	992,84	1,4
3	180	100	874	826,05	826,05	826,84	2,3
4	180	100	854	806,05	806,05	806,84	2,2
5	180	100	821	773,05	773,05	773,84	2,1

<sup>9</sup> У књизи „Плинарски приручник“ од В. Стрелеца и сарадника у 6. издању, Табела 2.15 на 140 стр. погрешно стоји да је Шифринсонова једначина за хидраулички глатке цеви што је бесмислено пошто уколико се у једначину унесе да је вредност релативне храпавости једнака нули, тада и је и вредност Дарсијевог коефицијента хидрауличког отпора такође једнака нули што она свакако није (Стрелец и остали 2003)

Табела 30. Наставак

6	180	75	791	743,05	743,05	743,84	2,0
7	160	255	722	674,05	674,05	674,84	2,3
8	160	215	666	618,05	618,05	618,84	2,1
9	160	70	621	573,05	573,05	573,84	2,0
10	160	200	498	450,05	450,05	450,84	1,6
11	160	55	473	425,05	425,05	425,84	1,5
12	125	60	440	392,05	392,05	392,84	2,2
13	125	115	412	364,05	364,05	364,84	2,1
14	125	30	342	294,05	294,05	294,84	1,7
15	110	295	242	194,05	194,05	194,84	1,4
16	90	65	203	155,05	155,05	155,84	1,7
17	90	575	178	130,05	130,05	130,84	1,4
18	63	170	353	16,58	16,58	17,44	0,4
19	63	50	323	-13,42	-13,42	-12,56	0,3
20	50	45	313	-23,42	-23,42	-22,56	0,8
21	50	125	296	-40,42	-40,42	-39,56	1,4
22	40	45	276	-60,42	-60,42	-59,56	3,3
23	63	165	264	-72,42	-72,42	-71,56	1,6
24	110	200	54	-282,42	-282,42	-281,56	2,1
25	125	85	6	342,42	342,42	341,56	1,9
26	160	145	141	477,42	477,42	476,56	1,6
27	160	60	242	578,42	578,42	577,56	2,0
28	50	55	9	-38,95	-38,95	-38,16	1,4
29	125	190	333	380,95	380,95	380,16	2,2
30	125	45	358	405,95	405,95	405,16	2,3
31	160	50	478	525,95	525,95	525,16	1,8
32	160	190	603	650,95	650,95	650,16	2,2
33	180	35	655	702,95	702,95	702,16	1,9
34	63	35	194	-94,46	-94,46	-94,40	2,1
35	50	25	232	-56,46	-56,46	-56,40	2,0
36	32	150	279	-9,46	-9,46	-9,40	0,8
37	50	155	316	27,54	27,54	27,60	1,0
38	50	35	336	47,54	47,54	47,60	1,7
39	63	140	371	82,54	82,54	82,60	1,8
40	90	230	421	132,54	132,54	132,60	1,4
41	90	225	484	195,54	195,54	195,60	2,1
42	110	175	529	240,54	240,54	240,60	1,8
43	110	425	589	300,54	300,54	300,60	2,2
44	125	50	631	342,54	342,54	342,60	1,9
45	160	90	877	588,54	588,54	588,60	2,0
46	160	125	962	673,54	673,54	673,60	2,3
47	250	25	755	1043,46	1043,46	1043,40	1,5
48	250	220	715	1003,46	1003,46	1003,40	1,4
49	180	120	466	754,46	754,46	754,40	2,1
50	160	80	341	629,46	629,46	629,40	2,2
51	160	210	276	564,46	564,46	564,40	1,9

Д. Примери из праксе; реалне гасовдне мреже прстенастог типа



---

*Табела 30. Наставак*

---

1-Почетна иницијална расподела протока,  
А-Оригинална Харди Крос метода,  
Б-Модификована Харди Крос метода,  
В-коришћењем Вудове апроксимација Колбрукове једначине која је коришћена према елаборату Рударско-геолошког факултета из Београда (у оригиналној студији улазни притисак је  $0,5 \cdot 10^5$  Ра)

---

Мрежа Свилајнца је концепцијски другачија од мрежа у Крагујевцу и Карабурми (Београд).

Вишестепени системи гасовода се нарочито користе у Русији. Код нас у градовима постоји напојни вод који снабдева прстенасту гасоводну мрежу преко једног или више улаза. Ове градске прстенасте мреже којима гас се доводи до потрошача раде на улазном притиску од  $4 \cdot 10^5$  Ра. Овај притисак занемарљиво опада унутар мреже тако да не постоји реална могућност да поједини удаљени потрошачи остану без гаса због превеликог пада притиска. Некада када се уместо природног гаса дистрибуирао градски гас добијен из угља проблем губитка притиска је био изражен зато што су те мреже радиле на врло ниском притиску. Данас, када се дистрибуира природни гас овај проблем не постоји, пошто се стално иде на редуковање притиска од лежишта до потрошача са изузетком компримовања приликом транспорта врло дугачким гасоводима односно приликом утискивања у гасно складиште, нарочито подземно.

У данашње време дистрибутивни гасоводи се граде од полиетиленских цеви које су доста јефтиније у односу на челичне. Стога, пошто њихова цена не зависи много од пречника, не треба унутар мреже бирати сувише мале цеви које би узроковале велике падове притисака. Цена цевовода је у директној функцији масе. Треба увек бирати нешто веће пречнике цеви у структури мреже чиме би се омогућила даља прикључења на мрежу у будућности. Приликом конципирања једне гасоводне дистрибутивне мреже потребно је предвидети 10-15 прстенова најмање, а уколико има више мерно регулационих станица преко којих се мрежа напаја 5-8 прстенова по мерно-регулационој станици.

## Ђ. Литературне напомене у вези са пројектовањем гасоводних мрежа

Када год се говори о литератури у вези пројектовања гасоводних мрежа прстенастог типа, као и уопштено свих цевоводних мрежа за дистрибуцију флуида, прстенастог типа, полазна и незаобилазна литература је књижица Харди Кроса из 1936. године која је од скоро доступна преко интернета у слободном приступу са сајта Универзитета у Урбани, Илиној (Cross 1936). Упоредо је и Совјетски аутор Лобачев тридесетих година XX века развио сличан метод Харди Кросовом (Latišenkov-Lobačev 1956). У Совјетској Русији је посебно била популарна модификација метода Лобачева позната под називом метод М.М.Андријашева (Andriyashhev 1964). Дуго није било значајнијег напретка на овом пољу све до 1970. године када су Еп и Фовлер побољшали оригинални Харди Кросов метод увођењем матричног рачуна и побољшањем конвергенције метода на начин како је већ описан у овој дисертацији (Epp-Fowler 1970). Претходно су основну идеју Харди Кроса која се заснива на решењу једначина контура, модификовали Шамир и Ховард 1968. године, тако што су решавали једначине чворова (Shamir-Howard 1968). Након тога су Вуд и Чарлс радили на обједињавању система једначина контура и чворова и на њиховом коришћењу приликом решавања проблема дистрибуције флуида прстенастим дистрибутивним мрежама прстенастог типа (Wood-Charles 1972). Касније су Вуд и Рејес унапредили овај метод (Wood-Rayes 1981). Хаман и Брамелер (Haman-Brameller 1971) као и Тодини и Пилати (Todini-Pilati 1987) су радили на методу који укључује истовремени прорачун како протока, тако и падова притисака у мрежи. Ови методи су више погодни за водоводне него за гасоводне мреже. Све поменуте методе су описане у књизи Булоаса и сарадника, али само за водоводне мреже (Boulos et al 2006). У овој књизи се користи превазиђена Хазен-Вилијамсова једначина за прорачун отпора трења при протоку воде кроз цеви. Међутим у свему осталом то је једна од најбољих стручних књига која је на почетку истраживања аутору ове дисертације пружила одличан увид у проблематику. Друга књига је Gas Engineers Handbook (1974), посебно поглавље "Distribution design for increased demand" (Corfield et al 1974). Ове две књиге се могу препоручити свакоме ко жели да се бави прстенастим дистрибутивним мрежама. То су ретке две књиге у којима се заиста осећа да аутори у потпуности владају проблемом, насупрот огромном броју књига после чијег читања постоји утисак код читаоца да аутор није добро разумео проблем али да је ипак осећао потребу да нешто напише и о овој теми пошто се књига коју пише или бави темом природног гаса или водоводима. Значајни су и радови Тодинија и Пилатија (Todini-Pilati 1988) и Осиадаца (Osidadacz 1987).

Некада је било врло популарно да се проблем дистрибуције флуида у мрежи прстенастог типа решава преко електричних модела мрежа (Лилић 1958). Ови модели нису посебно тачни пошто се са променом протока (у моделу еквивалент електрична струја) мења и хидраулички отпор (у моделу еквивалент електрични отпор). Развојем моћних итеративних нумеричких метода коју врло лако примењиве за рачунарске програме, електрични модели мрежа су дефинитивно пали у заборав.

Сам аутор ових редова је објавио доста радова из ове области како у врхунским иностраним часописима (Brkić 2009f), тако и у домаћим часописима (Бркић 2005a,b,c,

2008a). Резултати су такође презентовани са успехом на више домаћих (Бркић-Ђајић 2005; Бркић-Танасковић 2008, 2009; Танасковић-Бркић 2009) и страних конференција (Brkić 2008b, 2009g,h). Неки радови су донекле дискутабилни пошто је аутор у почетку свог истаживања наивно веровао да су једначине које се користе за одређивање отпора трења при протоку гаса у цевима, а које су одомаћене у домаћој литератури и тачне. Касније се увидом у инострану литературу испоставило да то баш и није увек случај (Coelho-Pinho 2007). Из тог разлога се и приступило расветљавању овога проблема како је и приказано у глави Б ове дисертације.

Од књига које се баве нафтом и гасом, а које су писане на српском језику, аутор ове дисертације је пронашао само три које се нешто детаљније баве прорачуном гасних дистрибутивних мрежа прстенастог типа. Од ових књига Харди Крос метод се у свом основном облику са примером прорачуна дистрибутивног гасовода Ђурђевац-Исток IV даје у књизи „Транспорт нафте и плина цјевоводима“ од Јосипа Вућковића у издању ИНА-Нафталин, Загреб (Вучковић 1971). И у овој књизи се не даје детаљно објашњење како изабрати алгебарски знак при сабирању поправки протока, али се даје табела са резултатима прорачуна тако да се извесни закључци могу извести после детаљног изучавања примера. У књизи „Транспорт сирове нафте и гаса; други део-транспорт“ од Павла Танасковића у издању Нафтагас, Нови Сад (Танасковић 1976), даје се пример прорачуна гасоводне мреже по методи М.М. Андријашева. На жалост ни после детаљног проучавања примера приказаног у овој књизи тешко је схватити како се рачуна проток у мрежи према приказаном методу. Из ове књиге је аутор уопште и сазнао да постоји метод М.М. Андријашева тако да је касније детаљније могао да проучи метод. Утисак је да се књига Ј. Вучковића заснива на инжењерској пракси западних земаља док је књига П. Танасковића заснована пре свега на Совјетској инжењерској пракси. На крају у књизи Б. Прстојевића, Н. Ђајића и В. Вулетића је дат одређен приказ модификованог Харди Крос метода без примера (Прстојевић et al 2005). Сличан приступ, али са примером се даје у раду Крстића из 1990. године (Крстић 1990). Из овога примера се може врло добро разумети на који начин се успостављају матрице контура и чворова, тј. врло добро је објашњен математички опис топологије гасне мреже. На примеру водоводне мреже се објашњава основни метод Харди Кроса у књизи „Транспорт флуида и чврстих материјала цевима“ од Манета Шашића (Шашић 1990). Поред методе петљи, тј. Харди Крос методе, у књизи „Рачунари у комуналној хидротехници“ се даје и приказ методе чворова, као и тзв. „Q“ методе која представља полазни основ за у овој дисертацији детаљно прилагођену обједињену методу чворова и петљи (Радојковић et al 1989). Сличан приступ је и у књизи од Радојковића и Клема (1989). На српском говорном подручју је значајна још и књига „Урбани водоводни системи“ од М. Јахића који обрађује Харди Крос методу, као и модификовану Харди Крос методу, са тиме да ову другу назива методом петљи (Јахић 1988). Обрађена је и метода чворова. У књизи се још обрађује и тзв. „Q“ метода која је у овој дисертацији побољшана и која се назива обједињеном методом чворова и петљи. М. Јахић (1988) доноси сасвим супротне закључке од оних донетих у овој дисертацији, и то:

„Рекло би се да ова метода (мисли се на „Q“ методу, примедба Д. Бркић), у поређењу са претходне двије (односи се на модификовану Харди Крос методу, тј. методу петљи као и на методу чворова, примедба Д. Бркић) има само недостатке:

-То је највећи систем једначина, а при томе не поседује оне добре особине које олакшавају рачуницу (симетричност, околност да је највећи члан већ на дијагонали).

-Прстенови се морају идентификовати, а и смер течења у њима, што значи да се улазни подаци теже припремају. (Код методе чворова о прстеновима се не води рачуна, а код методе прстенова једначине се постављају само за њих, а не и за чворове, као овдје).“ (са стр. 395; Јахић 1988).

Након тога се у књизи обрађује још и „LP“ метода о којој није дато више детаља.

Наиме све добре особине М. Јахић представља као мане. Систем једначина код обједињене методе чворова и прстенова јесте занемарљиво већи него код модификованог Харди Крос метода, али је има добру особину што се користи и матрица чворова и матрица контура које је обе лако дефинисати. Не постоји симетричност која пројектанту и не служи најчешће за проверу, већ се грешка уколико је има при постављању проблема аутоматски преписује на члан симетричан у односу на главну дијагоналу. Даље што је најважније, код обједињене методе чворова и прстенова се не добијају поправке протока које треба сабрати са протоцима из претходне итерације користећи врло компликовану алгебарску шему, већ директно сами протоци. Цео поступак код обједињене методе чворова и петљи је врло прегледан. Прстенови се узгред да буде речено морају идентификовати код свих метода укључујући и методу чворова. Код методе чворова је могуће избећи дефинисање прстенова, али тада се повећава могућност грешке јер се у том случају не врши провера услова по другом Кирхофовом закону који мора бити задовољен у свакој итерацији. Насупрот, код методе петљи се морају поставити обавезно једначине контура, али се једначине чворова морају користити за проверу услова по првом Кирхофовом закону који мора бити задовољен у свакој итерацији.

На српском језику је доступан превод књиге „Снабдевање водом становништва, индустрије и пољопривреде“, Совјетског аутора Н.Н. Абрамова у којој су на примерима приказани методи В.Г. Лобачева и М.М. Андријашева у поглављу 3. које носи наслов „Водоводне мреже и цевни водови“ (Абрамов 1974).

Од иностраних дисертација на сличну тему којом се бави и овај докторат, аутору је била доступна дисертација Дејвида Џона Елиса из 2001. године са Универзитета у Аделаиди у Аустралији (Ellis 2001). У дисертацији се највећим делом испитују конвергенционе особине већ познатих метода под различитим условима. Од страних књига у којој су приказани скоро сви методи који се користе у западној инжењерској пракси аутору је била доступна књига “Fluid mechanics in water resources engineering” (Wen-Hsiung Li 1983).

Од радова у страним часописима се у последње време појављује све више радова у којима се фази логика (Fuzzy) појављује у вези са темом пројектовања гасоводних и водоводних мрежа прстенастог типа (Branisavljevic-Ivetic 2006, Bhave-Gupta 2004, Gupta-Bhave 2007, Revelli-Ridolfi 2002).

Сви примери урађени за потребе ове дисертације су урађени у *MS Excel*-у. Сличан је приступ и у раду Худлестона и сарадника (Huddleston et al 2004a).

Филион и Карнеј (Filion-Karney 2003) у свом чланку истражују изворе грешака при пројектовању у првом реду водоводних мрежа.

У раду на дисертацији када је у питању пројектовање гасаних мрежа консултовани су и радови Дан Баиа и сарадника (Dan Bai et al 2007), Ормсбија (Ormsbee 2006), Валског (Walski 2006), Рамалингана и сарадника (Ramalingam et al 2002), Худлестона и сарадника (Huddleston et al 2004b), Лопеса (Lopes 2004), Тодинија (Todini 2006), Осиадаца (Osiaacz 1987, 1988), Осиадаца и Рудовског (Osiaacz-Rudowski 1987), Осиадаца и Пиенкосца (Osiaacz-Pienkosz 1987), Преторијуса и сарадника (Pretorius et al 2008), Метјуса и Колера (Mathews-Kohler 1995), Мек Клура и Милера (McClure-Miller 1983), Патанкара (Patankar 1980), Дејте и Мајамундара (Datta-Majumdar 1980), Арсенеа и сарадника (Arsene et al 2004), Колинса и сарадника (Collins et al 1978), Колинса и Џонсона (Collins-Johnson 1975), Геја и Мидлетона (Gay-Middleton 1971), Чиплункара и сарадника (Chiplunkar et al 1990), Гупте и сарадника (Gupta et al 1993), Кеслера и Шамира (Kessler-Shamir 1989), Верме и сарадника (Varma et al 1997), Ченовета и Крофорда (Chenoweth-Crawford 1974), Ајрепа и сарадника (Eiger et al 1994), Баше и Касаба (Basha-Kassab 2007), Тодинија (Todini 2000), Ахује и сарадника (Ahuja et al 1991), Зекина и сарадника (Zecchin et al 2006), Алтмана и Булоаса (Altman-Boulos 1995), Ванга и Хартмана (Wang-Hartman 1967), Маха и Лина (Mah-Lin 1980) као и Маха и Шахама (1978).

## Е. Избор оптималног система грејања на природни гас на основу урбанистичких параметара

Природни гас може бити коришћен за задовољење грејних потреба становништва двојако, било директно, тј. увођењем природног гаса директно у станове у којима се онда сагорева у кућним гасним котлићима (директна употреба природног гаса овде обележена са Г), било индиректно, при чему се природни гас сагорева у топлани при чему се топлотна енергија дистрибуира домаћинствима посредством топоводне мреже (индиректна употреба природног гаса овде обележена са Т). Избор одређеног типа система се може извести на основу просторног распореда зграда у насељу, броја зграда, величине зграда, њиховог броја, квалитета изолације, итд. На основу ових карактеристика може се извршити прорачун инвестиционих и експлоатационих трошкова оба система грејања и затим се може извршити поређење за свих 96 случајева које обухвата истраживање и који покривају скоро све урбанистичке ситуације које могу да се јаве у оквиру једног насељеног места. Под овим се подразумева да је сваки тип реалног насеља који може да се нађе у пракси придружен једној од тзв. условних урбанистичких површина које се уводе као основна јединица на којој се дати проблем истражује у овом докторату. Главни циљ је да се успостави општи модел заснован на дефинисаним и прихваћеним критеријумима, а који доприноси координисаном развоју централизованих система грејања који раде на природни гас у оквиру урбаног ткива једног града. Структурна анализа сваког од два понуђена система се обавља са изразитим акцентом на испитивању њихових цевоводних мрежа. Овај проблем је детаљно разматран у чланку Бркића и Танасковића (Brkić-Tanasković 2008) где су резултати истраживања и изнети до детаља, књизи „Природни гас као гориво за грејање“ (Бркић 2006), као и у више ауторских и коауторских чланака аутора ове дисертације (Бркић 2007a,b; 2008; Живковић-Бркић 2005, Танасковић et al 2004), али и у магистарском раду аутора ове дисертације (Бркић 2005d).

Уколико се планира грејање на природни гас у оквиру једног насеља, одлука на начину грејања се може донети између две супротстављене опције:

1. Индиректни систем (Т); природни гас сагорева у топлани а ослобођена топлотна енергија се преноси до домаћинства путем топоводне мреже.
2. Директан систем (Г); станови се греју на природни гас који до њих стиже преко гасне дистрибутивне мреже и који сагорева у индивидуалном гасном котлићу којим је опремљен сваки стан.

Иницијална одлука о избору грејања посредством једног од два гранична система грејања на природни гас се заснива у првом реду на броју и величини зграда у оквиру једног насеља, затим величине самог насеља и на основу топлотне изолације зграда. У случајевима када се покажу као подједнако исплатива оба система грејања на гас могуће је увести неки од хибридних система грејања, што се неће детаљно разматрати у оквиру ове дисертације. Такви системи могу бити мале локалне топлане на гас, котларнице на гас, итд. Нпр. економска анализа која се тиче ових мањих система на гас, затим анализа

исплативости преласка ових система са других горива на природни гас а све на примеру Литваније је доступно у литератури (Dzenajaviciene et al 2007). Системи засновани на когенерацији укључујући и локалне котларнице, као и системе грејања на електричну енергију а све у складу са урбанистичким параметрима дају у свом раду Густавсон и Карлсон (Gustavsson-Karlsson 2003). Њихова анализа укључује цео енергетски систем од природних извора до крајњег корисника, са посебним освртом на примарну енергетску потрошњу, емисију приликом сагоревања и на трошкове. Они налазе да је систем грејања на природни гас исплативији у сваком погледу у односу на нпр. систем грејања на дрва, осим када је у питању екологија. У будућности се предвиђа знатно већа употреба обновљивих извора енергије или чак фосилних горива попут нафте и природног гаса у индустријским процесима, а све у циљу смањења емисије гасова стаклене баште приликом сагоревања угља.

Циљ модела представљеног у овој дисертацији је да дефинише односе између урбанистичких и енергетских карактеристика градских насеља и да на тај начин допринесе најрационалнијем искоришћењу природног гаса као необновљивог фосилног горива. Да би се ово постигло утврђиване су прво потребе за енергијом једног домаћинства, при чему је сагледан нпр. случај Канаде са економске тачке гледишта (Douthitt 1989). Разматрана су и искуства из Грчке (Papadopoulos et al 2008). Чланак Динче и сарадника (Dinca et al 2007) даје приказ оптималног сценарија за грејање на узорку од око 100 хиљада становника у Румунији, при чему је анализирано седам различитих сценарија грејања на природни гас. Сличан приступ као у овој дисертацији је дат у раду Густафсона и Карлсона (Gustafsson-Karlsson 1990). Студија Торекова и сарадника (Torekov et al 2007) је интересантна за ову дисертацију пошто се у њој разматра веза између квалитета топлотне изолације нових зграда и избора оптималног система грејања. Према овој студији, топоводни систем се препоручује само у урбаним зонама где је грејни конзум изразито велики, посебно где су у питању високе зграде. Даље су Лазарин и Норо (Lazzarin-Noro 2006) вршили анализу система за грејање на гас са енергетске, еколошке и економске тачке гледишта. Правни аспект, као и аспект са гледишта различитих тарифних система се даје у чланку Гронхајта и Мортенсена (Grohnheit-Mortensen 2003). Одређене немачке студије на тему којом се бави овај део дисертације су биле доступне, уз ограду да аутор ових редова слабо познаје немачки језик (Roth et al 1980, AGFW), али и са појединим сопштењима на енглеском језику (Ter Brugge 1984). Највеће достигнуће ових немачких студија је идентификовање односа између грејних система, структуре насеља и урбаног планирања на локалном нивоу. Ове студије анализирају до 10 типова изграђених урбаних зона и то од густо насељених урбанизованих области до сеоских насеља.

Приликом одабира система грејања, у многим градовима је пракса да се сваки случај посебно разматра. Избор се најчешће врши на основу расположивих капацитета у гасоводима односно у топланама, а врло често без јасних критеријума. Предложени модел у овој дисертацији може бити од користи просторним планерима, општинским службама, јавним предузећима, и другима као први корак при доношењу одлуке за одабир одређеног система.

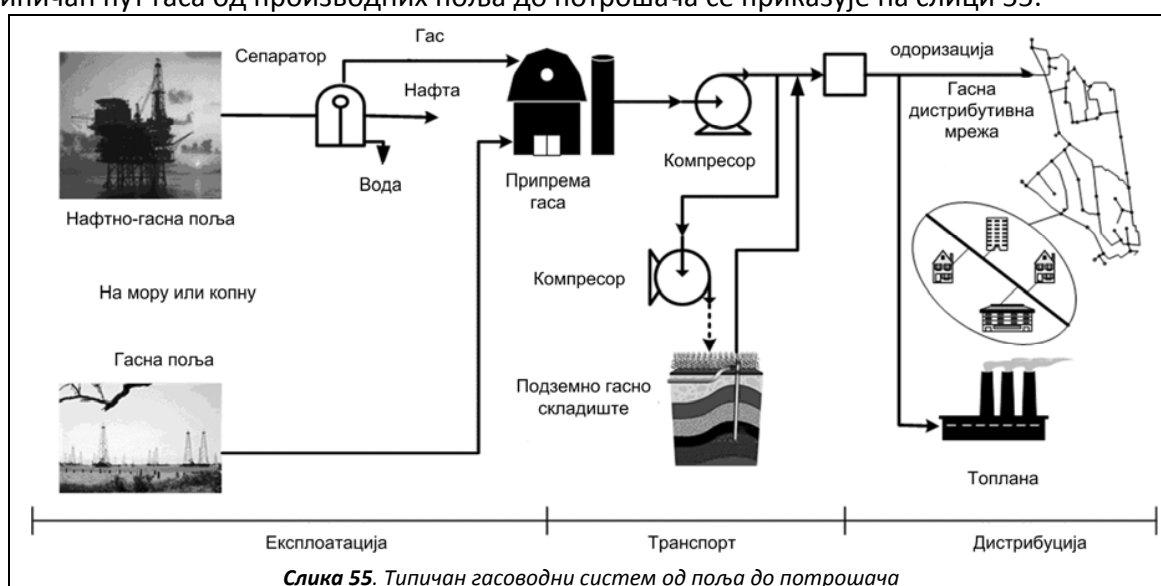
Најпогоднија опција за подмиривање грејних потреба становништва у насељима је путем централизованог система. Централизовани ситем снабдевања топлотном енергијом из топлана има бројне предности, као нпр. постиже се уштеда примарне енергије (у топлани се користе савремени котлови при чему је сагоревање рационално како са енергетског, тако и са еколошког гледишта, што значи да се постиже већи степен корисности приликом трансформације примарне енергетске сировине у топлотну енергију), расположива је потрошна топла вода у великом броју случајева (чиме се избегава трансформација хемијске енергије у топлотну, па затим у електричну, и напослетку поново у топлотну), могуће је користити и горива лошијег квалитета, приликом несташице основног горива најчешће је могуће користити резервну врсту горива, постоји централизовано складиштење потрошног горива, веће су уштеде у односу на транспорт горива какав се примењује приликом индивидуалног система грејања (штеди се гориво које се користи у нпр. камионском транспорту угља, дрва или нпр. боца за гас), смањује се могућност од пожара пошто се сагоревање врши под строго контролисаним условима, постоји професионална и добро организована противпожарна служба. Такође, грејање из топлана има и бројне мане, као нпр. потребна је велика почетна инвестиција у изградњу топлане и самог топловода, могућ је прекид грејања за велики број домаћинстава кад је најхладније услед квара у топлани или на топловоду, грејање се често наплаћује по грејној површини а не на основу стварно испоручене топлотне енергије. Предности за домаћинства која користе природни гас директно посредством гасне дистрибутивне мреже су: мерење утрошка гаса се обавезно мери посебно за сваки стан што значи да висина рачуна зависи директно од потрошње (што није увек случај у систему топлификације), гас се штеди пошто се хемијска енергија претвара директно у топлотну што је посебно изражено ако је ово примењено и у случају кувања и припреме потрошне топле воде, нема потребе за складишним простором у оквиру просторија које су на располагању домаћинству, штеди се гориво које се користи у нпр. камионском транспорту угља, дрва или нпр. боца за гас у случају индивидуалног грејања, знатно је мања инвестиција потребна за изградњу гасоводне дистрибутивне мреже у односу на топловодну, мања је могућност прекида снабдевања јер се гасоводна мрежа напаја из више праваца (прстенасте мреже), итд. Мане директне употребе гаса су: повећана опасност од избијања пожара или експлозије услед несавесног руковања или квара, могућност гушења услед цурења на инсталацијама узрокованог различитим разлозима, сагоревање се врши у самом стану или у помоћним просторијама уз стан, могућност прекида снабдевања гасом из различитих разлога уз немогућност преласка на алтернативно гориво, итд.

У обе разматране опције се подразумева исти стандард грејања унутар стана, тј. иста радијаторска мрежа постоји у оба случаја (Војић-Despotović 2007). Главна намера које се жели постићи применом овога моделског приступа је изнаћи начин за дистрибуцију топлотне енергије домаћинствима тако да буду искоришћени постојећи капацитети који су расположиви у оба система на најрационалнији могући начин. Тек је у другом плану урбанистичко планирање нових насеља и увођење у њих једног од два разматрана система грејања на основу презентованог модела. Главни циљ модела није пуко истраживање оба система грејања до детаља, већ поређење инвестиционих и експлоатационих трошкова у оба система узимајући у обзир њихове специфичне детаље.



Под овиме се подразумевају првенствено цевоводи, са посебним акцентом на кућни гасни котлић када се разматра гасни дистрибуциони систем, односно са акцентом на размењивач топлоте и инвестиције у нову топлану када се разматра топоводни ситем при чему се у топлани сагорева природни гас. За разлику од ове студије, у оквиру истраживања урађеног за потребе магистратуре аутора ове дисертације није се узимала инвестиција у нову топлану или бар у нове капацитете у оквиру старе (Бркић 2005d). На ову чињеницу су главне примедбе имали рецензенти приликом презентовања овог модела у стручним часописима, те је ова мана и отклоњена (Brkić-Tanasković 2008).

Типичан пут гаса од производних поља до потрошача се приказује на слици 55.



Слика 55. Типичан гасоводни систем од поља до потрошача

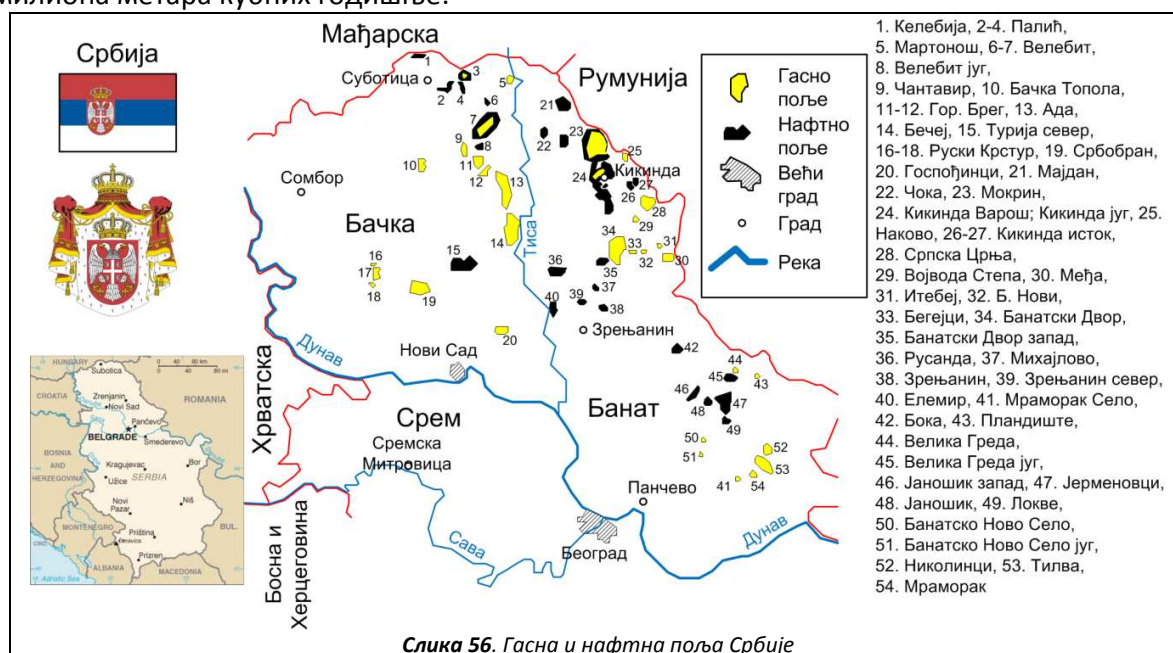
Сва истраживања су обављена у оквиру тзв. „условне грађевинске површине“ која се у овом истраживању уводи као посебан појам. Поређење инвестиција у цевоводе као главних компоненти оба система је главни предмет истраживања. У детаљнијој анализи грејања у оквиру једног града, остале врсте горива се морају укључити као могући за погон једне топлане, док се у другој крајности морају узети у обзир алтернативни сценарији које треба применити у случају недостатка гаса чиме се потпуно прекида снабдевање потрошача који су повезани на гасовод (Brkić 2008с, 2009j).

Модел који се овде представља је развијен као алат за разрешавање неких неспоразума који се могу јавити и јављају се приликом развоја стратегије усклађеног грејања на природни гас у градовима Србије са урбанистичким параметрима. Иницијална студија је урађена од 2003-2006. године за потребе Министарства за науку и технолошки развој Србије. Све бројне вредности изнете у овој дисертацији се односе на стање у Србији, са тиме да ове вредности могу да се варирају пошто је заинтересованима доступан програм написан у MS Excel-у и који се може наћи као електронски додаток уз рад „Systematic approach to natural gas usage for domestic heating in urban areas“ (Brkić-Tanasković 2008). Подешавањем параметара може се симулирати било која ситуација која се тиче цене гаса или елемента оба система која важи било где у свету.

Стратегија за грејање домаћинстава у градским срединама у Србији подразумева грејање преко топлана. Ово важи још од времена тзв. „социјализма“. Природни гас се у дистрибуцији за широку потрошњу уводи тек у скорије време, док је ова пракса нешто заступљенија само у деловима Србије северно од Саве и Дунава који су до 1918. године били под аустроугарском. У слободном делу Србије током XIX века је преовладала опција електрификације градова. Треба напоменути да се и у делу Србије који је у то доба био под окупацијом користио гас добијен из угља а не природни гас, што је уосталом и била пракса свугде. Природни гас добија уопште у свету тек касније на важности. У делу Србије који је био слободан гасификација у то време уопште није била заступљена, тако да су први модерни гасоводи дистрибуирали природни гас. Ови гасоводи су новијег датума и још увек су у функцији. Данас у Београду ради 15 топлана, које користе гас или мазут за свој рад. Од тога 83% топлана ради на гас. Оне троше око 265 милиона метара кубних гаса годишње. Ова количина је отприлике равна годишњој производњи свих гасних поља која се данас експлоатишу у Србији. Статистички подаци показују да је у Београду 38% станова прикључено на топловод од 240 хиљада станова и 7500 канцеларија се греју на овај начин (Јовановић et al 2009). Данас су пројекти увођења гасног дистрибутивног система а посебно топловодног у урбано ткиво Београда од стратешке важности, пошто су они од изузетног еколошког значаја пошто ће се њиховом реализацијом угасити бројне котларнице које су радиле на угљ а које су биле у самом центру града. Око 800 оваквих котларница је већ угашено у Београду. Преостале, постојеће котларнице данас првенствено раде на природни гас, али су многе до скоро радиле на течно гориво а неке, чак и новије, као што је већ поменуто, а које су изграђене у време кризе деведесетих година и на угљ. Предвиђа се гашење свих тих котларница. У складу са новом стратегијом развоја сви даљински системи грејања ће да користе природни гас као основно гориво. Као главни циљ се поставља супституција чврстих горива за потребе грејања природним гасом, у посебно се иде на то да електрична енергија не буде коришћена за грејање. Напоменимо да је у доба „социјализма“ било периода када је баш промовисана електрична енергија за подмиривање грејних потреба становништва, а било је и периода када се сматрало да ће до краја двадесетог века у електроенергетском систему Србије бити неколико нуклеарних електрана, да би потом завладала несташица електричне енергије и рестрикције током осамдесетих година двадесетог века чији основни узроци и дан данас контроверзни. У Србији данас постоје 42 топлане, са укупним инсталираним капацитетом од 5,5 GW. Ипак Србија данас нема ни довољно гаса из сопствених извора за погон тих топлана, а ни средства за одржавање топлана до скоро нису била довољна. Главна карактеристика топлана у Србији је слаба ефикасност у сваком погледу а посебно услед недовољног одржавања ионако већ застареле опреме, финансијске исцрпљености, и посебно недовољног улагања у одржавање топловодне мреже и подстаница. Грејање је лоше, а постоји потреба за новим капацитетима, који би по плану требало да раде на гас. Пројектна температура за Београд је  $-18^{\circ}\text{C}$ , тако да је конзум који подмирују многе топлане већи од капацитета. Међутим у круговима „енергетских аналитичара“ влада мишљење да може да се прикључи још доста потрошача на ове већ преоптерећене топлане пошто се температура наводно врло ретко спушта до  $-18^{\circ}\text{C}$ . Поставља се питање зашто се онда пројектна температура не повећа ако је све то истина. По закону би требало да се топлотна енергија наплаћује по потрошњи а не по квадратури грејане површине

стана. Овај закон се не поштује. Такође је предвиђена испорука топлотне енергије од 24h на дан<sup>Г</sup>, што се такође не поштује.

Србија нема довољне капацитете за производњу гаса са сопствених гасних поља (Слика 56). Врх производње је достигнут пре десетак година са око 600 милиона метара кубних годишње, при чему је од тада производња у сталном паду и данас износи око 285 милиона метара кубних годишње.



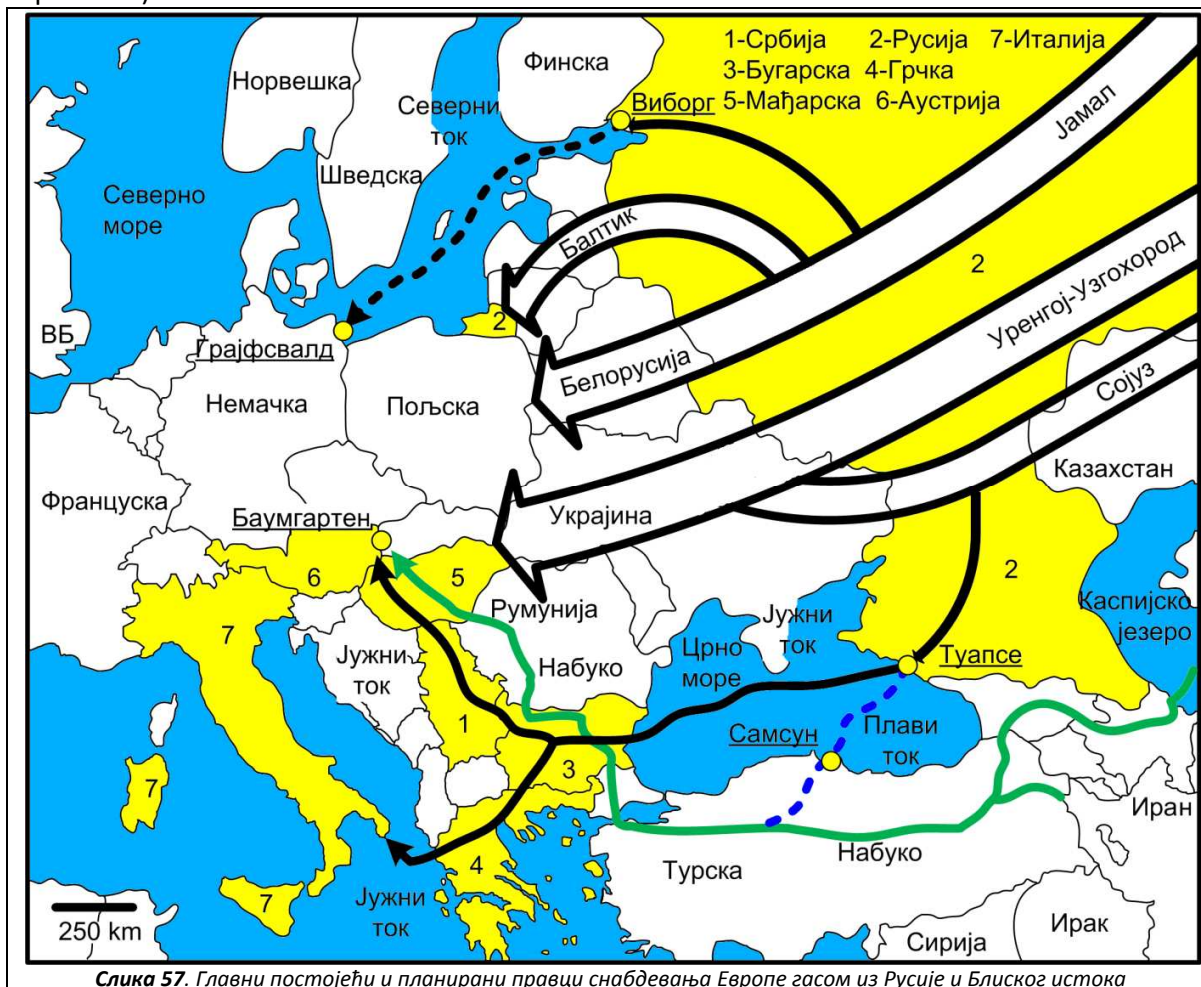
За сада је једини правац снабдевања природним гасом из правца Мађарске, тј. са севера. Овај гас се увози из Русије. Гасовод „Јужни ток“ је у плану (Слика 57). Србије увози природни гас од 1979. године.

За разматрање урбанистичких и енергетских карактеристика урбаног насеља уводи се концепт тзв. хипотетичког, тј. условног насеља. Инвестициони трошкови су израчунати за оба система у оквиру свих 96 условних насеља колико их модел обухвата. Систем грејања на природни гас за који су инвестициони трошкови мањи (укључујући експлоатационе трошкове и трошкове одржавања у наредних 25 година) у зависности од урбанистичких параметара се усваја као инвестиционо и трошковно исплативији. Овиме се ствара директна веза између урбанистичких параметара и избора једног од два понуђена система грејања на природни гас.

Увођењем тзв. условних граничних површина у модел избегава се непотребно пројектовање оба система грејања на природни гас у сваком конкретном случају, да би се потом усвојио само један, исплативији систем за дате услове. Употреба овде дефинисаног

<sup>Г</sup> Ово наводно двадестчетворчасовно грејање је прерасло у неку врсту урбане легенде, пошто су становници који нису прикључени на систем убеђени да је то и истина. Овакво грејање имају једино становници приградског насеља Обреновац који су прикључени на термоелектрану „Никола Тесла“.

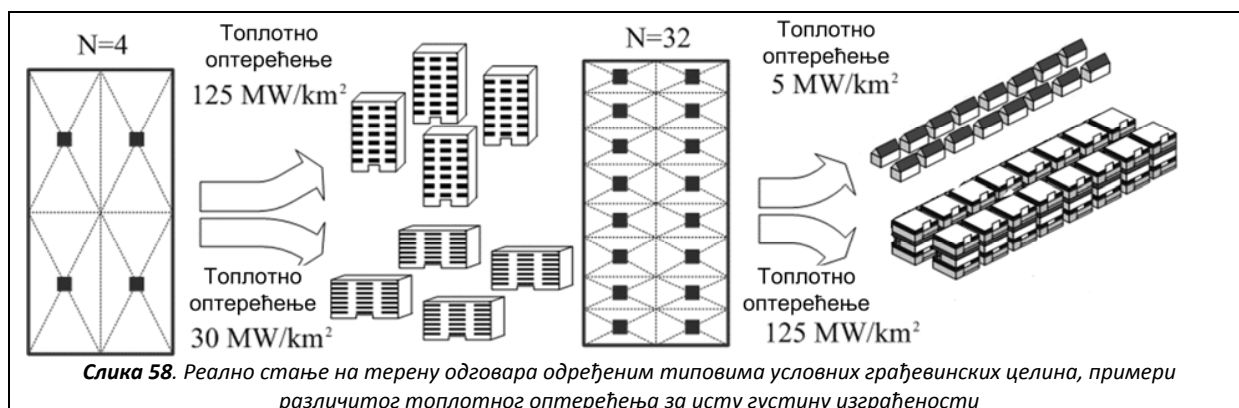
модела знатно олакшава посао градским планерима. Људи са већим животним стандардом се обично не руководе економским параметрима када доносе избор о прикључењу на један од централизованих система грејања. Њихова одлука је заснована на сопственим афинитетима, а често и на предрасудама (Santamouris et al 2007, Fankhauser-Terpic 2007).



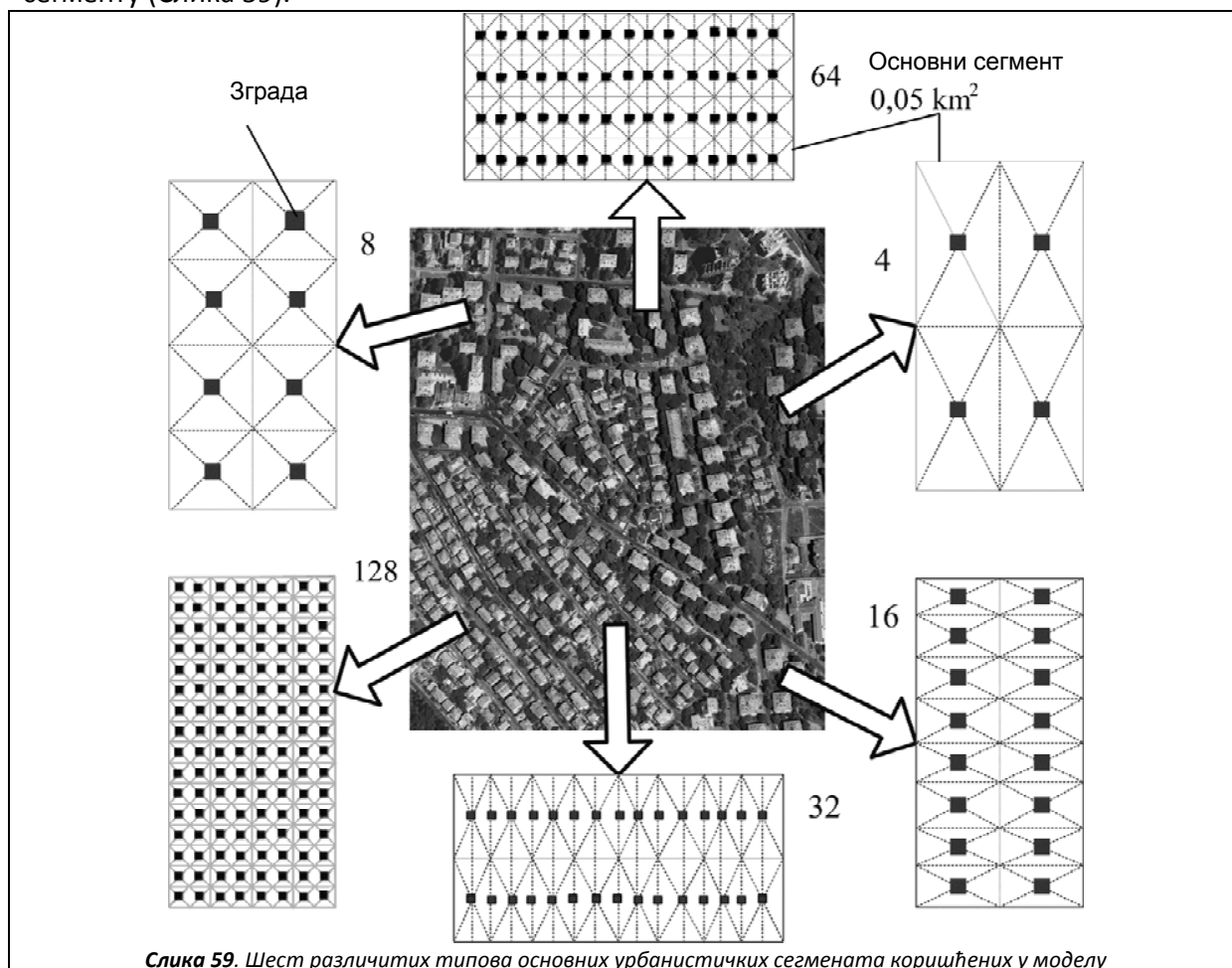
Слика 57. Главни постојећи и планирани правци снабдевања Европе гасом из Русије и Блиског истока

Део града са резиденцијалним и пословним садржајима представља једну „реалну урбанистичку целину“. Она се може фиктивно поделити тако да свака од тако подељених мањих урбанистичких целина обухвати зграде сличне величине (тип изграђености) али исто тако и са сличном бројем зграда по јединици површине (густина изграђености). Зоне које су добијенем овом поделом се фиктивно свде на површину од 0,05 km<sup>2</sup>, и за потребе нашег модела представљају основну ћелију на којој се врши истраживање. Ови најмањи сегменти се називају „основни грађевински, тј. основни урбанистички сегменти“. Даље се реална својства која поседује део насеља могу пресликати на овај основни хипотетички сегмент (Слика 58).



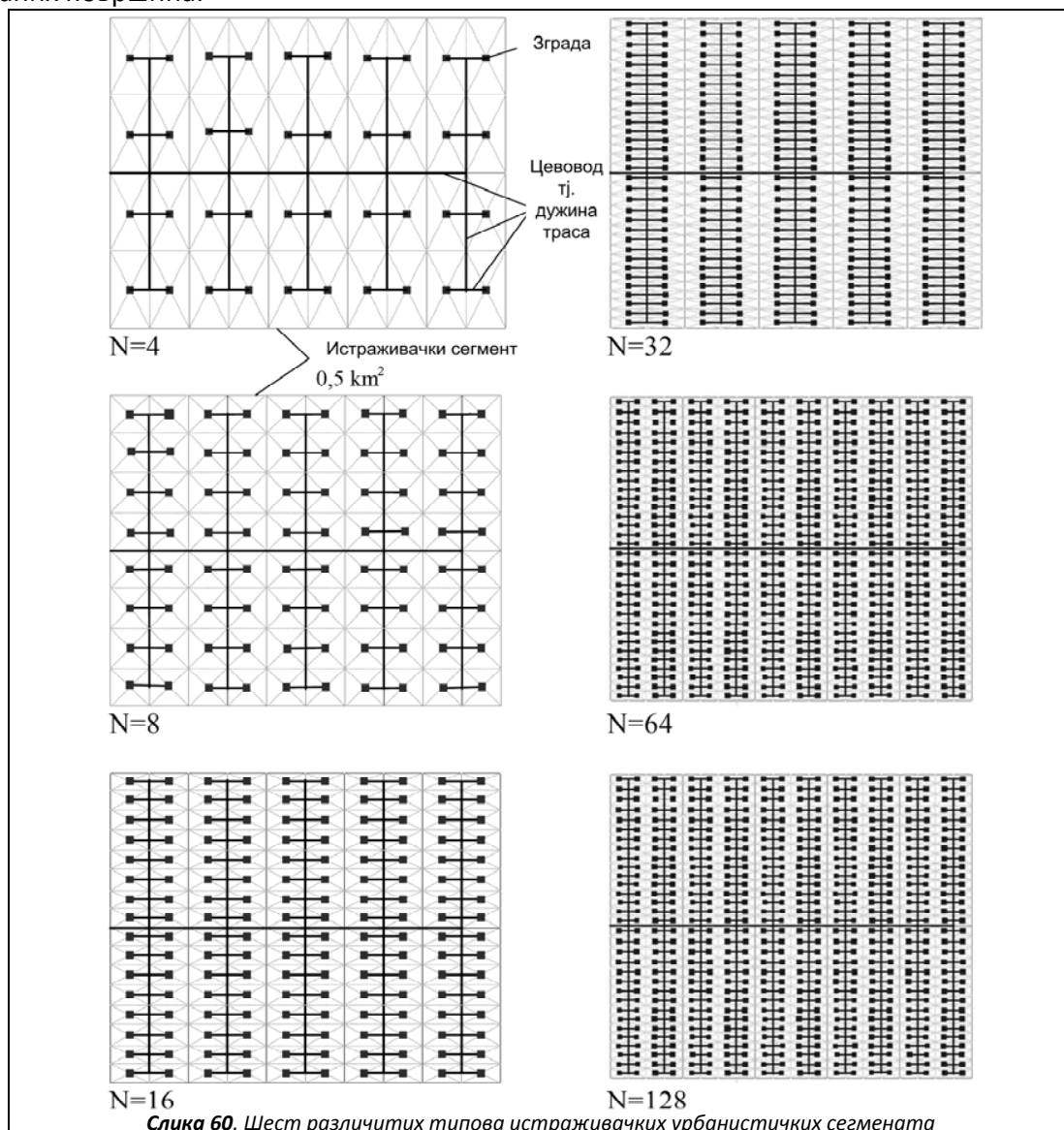


Усваја се основна урбанистичка целина површине  $0,05 \text{ km}^2$  правоугаоног облика димензија  $160\text{m} \times 350\text{m}$ . У зависности од густине изграђености разликује се шест различитих типова основних сегмената и то са 4, 8, 16, 32, 64 и 128 зграда по основном сегменту (Слика 59).



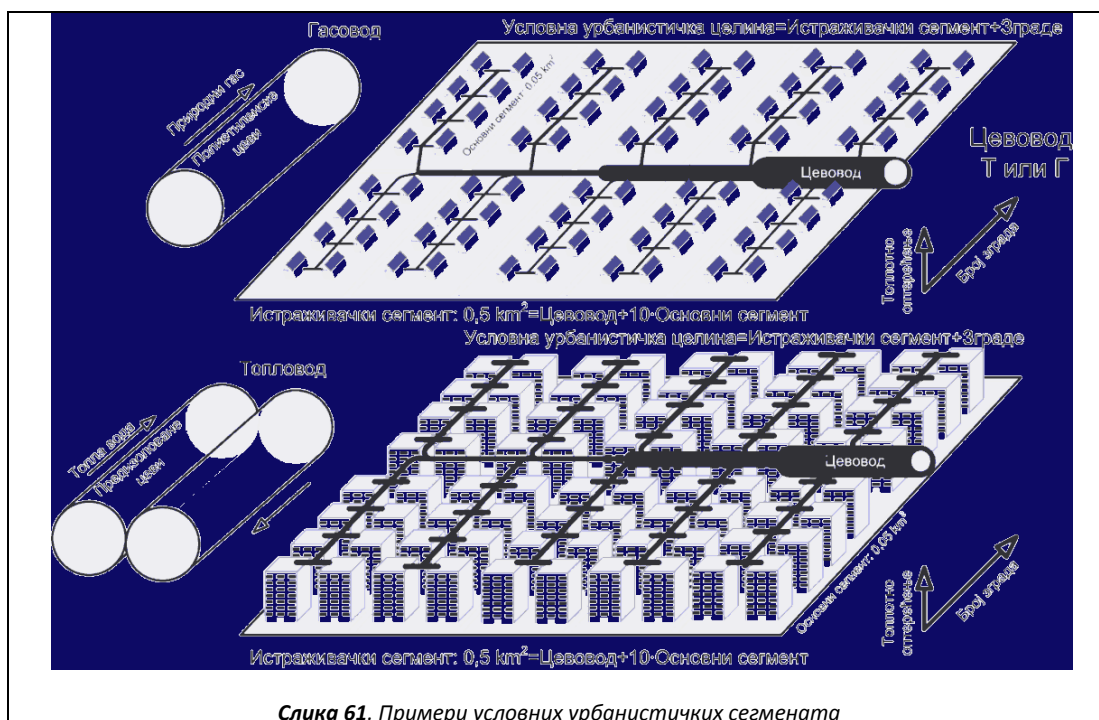
Тзв., „истраживачки сегмент“ се састоји од десет тзв. „основних сегмената“. Истраживачки сегмент је погоднији са проучавање цевоводних мрежа у оба система грејања. Треба приметити да на слици 59 нису учртане трасе цевовода, док на слици 60 која приказује свих шест примера истраживачког сегмента јесу. Истраживачки сегмент се састоји од

десет истих основних сегмената, којима се додаје и одговарајућа цевоводна мрежа. Овиме је постигнуто да се скоро сваки тип реалног насеља може придружити једном од 96 условних урбанистичких насеља колико их постоји у моделу. Наиме, сваком од шест типова основних сегмената одговара осам различитих типова топлотног оптерећења, тј. зграде унутар сегмента могу бити од најмањих породичних кућа до великих небодера (градуираних у осам типова по броју станова унутар зграде). Даље свака зграда може бити или добро или лоше изолована. То даје управо раније поменутих 96 типова условних урбаних површина.



Слика 60. Шест различитих типова истраживачких урбанистичких сегмената

На једном истраживачком сегменту, односно на једној условној урбанистичкој зони, постоји само један тип зграда које су све са једним квалитетом изолације, тј. једнообразне су (Слика 61).



Слика 61. Примери условних урбанистичких сегмената

Као што је већ напоменуто у зависности од различите величине зграда на истом истраживачком сегменту, или пак од исте величине зграда које су ређе или гушће распоређене на једном истраживачком сегменту усвајамо различита топлотна оптерећења сегмента којих има осам, и то: 10 MW/km<sup>2</sup>, 20 MW/km<sup>2</sup>, 30 MW/km<sup>2</sup>, 40 MW/km<sup>2</sup>, 50 MW/km<sup>2</sup>, 75 MW/km<sup>2</sup>, 100 MW/km<sup>2</sup> и 125 MW/km<sup>2</sup>. Сматра се да овај опсег и распоред унутар опсега могу добро да опишу све урбанистичко-енергетске ситуације које могу да се јаве унутар једног стварног насеља. Топлотна оптерећења зграда су проучавана доста у литератури (Stanislaw 1985, Hartshorn 1985, Mihalakakou et al 2002). Свака зграда било које величине се састоји од одређеног броја условних станова од којих сваки има по 60 m<sup>2</sup> (Табела 31). Условни стан је уједно и просечан стан гледано по његовој величини.

За сваки појединачни условни урбанистички сегмент могуће је поставити цевоводну мрежу за оба система грејања на гас. Уколико је исти распоред објеката на условној површини, а топлотно оптерећење различито, у том случају је и дужина трасе цевоводне мреже иста само се разликују пречници цеви у структури цевовода. Један пример се даје у табели 32.

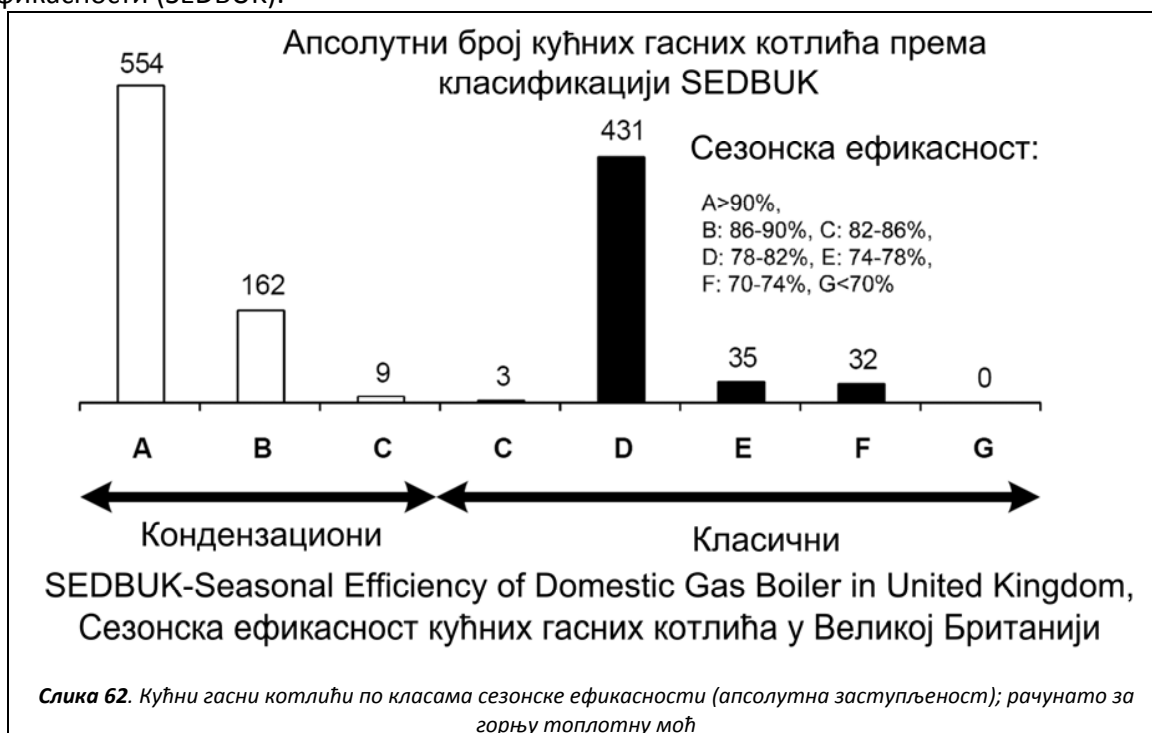
На основу досадашњих података пошто је позната мрежа цевовода и пошто су димензионисани пратећи уређаји могуће је прорачунати инвестициона и експлоатациона улагања за сваки појединачан случај. Овде су обухваћени и трошкови одржавања у оквиру 25 година колико је предвиђено да траје пројекат. Сумарни резултати се дају у табели 33.

Табела 31. Број просечних станова по згради за свих 96 случајева

Број зграда – N на основном сегменту		Топлотно оптерећење MW·km <sup>-2</sup>							
W/m <sup>2</sup>		125	100	75	50	40	30	20	10
N=4	95 <sup>a</sup>	274 <sup>c</sup>	219	164	110	88	66	44	22
	142 <sup>b</sup>	181	145	109	72	58	43	29	14
N=8	95	137	110	82	55	44	33	22	11
	142	90	72	54	36	29	22	14	7
N=16	95	69	55	41	27	22	16	11	5
	142	45	36	27	18	14	11	7	4
N=32	95	34	27	21	14	11	8	5	3
	142	23	18	14	9	7	5	4	2
N=64	95	17	14	10	7	5	4	3	1
	142	11	9	7	5	4	3	2	1
N=128	95	9	7	5	3	3	2	1	1
	142	6	5	3	2	2	1	1	0 <sup>d</sup>

a-добро изолован стан, b-лоше изолован стан, c-274 добро изолована стана по згради, 4 зграде на основном сегменту, d-мање од једног просечног стана по згради, тј зграда мања од 60 m<sup>2</sup>, 128 зграда, тј. малих кућица на основном сегменту

У табели 34 се даје детаљан пример како је прорачуната једна од вредности дата у табели 33. На слици 62 се даје заступљеност кућних гасних котлића по класама сезонске ефикасности (SEDBUK).





Табела 32. Пример структуре пречника цеви за један пример од укупно 96 случајева

Пречник цеви [mm]	Топлотно оптерећење, MW·km <sup>2</sup>																		
	125		100		75		50		40		30		20		10				
	Т	Г	Т	Г	Т	Г	Т	Г	Т	Г	Т	Г	Т	Г	Т	Г			
25	0	0	0	0	0	0	3200	0	3200	0	3200	0	3357,5	0	3987,5	0	4302,5	6400	5798,75
32	0	3200	0	3200	0	3200	630	0	787,5	0	787,5	0	945	6400	787,5	6400	1496,25	1575	157,5
40	0	630	0	787,5	6400	157,5	6400	787,5	6400	787,5	6400	1260	1575	1181,25	1575	157,5	157,5	3150	160
50	0	157,5	6400	630	0	787,5	1575	1181,25	1575	1181,25	1575	393,75	0	0	1575	160	160	787,5	160
63 (Г); 65 (Т)	6400	787,5	0	945	1575	1181,25	0	0	1575	0	1575	0	3150	160	2362,5	0	320	320	320
75 (Г); 80 (Т)	1575	1102,5	1575	-	1575	0	160	0	160	0	160	0	160	787,5	160	320	320	320	80
90 (само Г)	-	78,75	-	0	-	160	-	160	-	0	-	160	-	0	-	160	-	0	0
110 (Г); 100 (Т)	3150	160	3150	160	2362,5	0	787,5	160	320	160	320	160	160	320	320	80	80	640	0
125	787,5	0	787,5	0	0	160	320	160	0	160	320	80	320	80	320	0	480	0	0
140 (Г); 150 (Т)	0	0	320	160	320	0	160	0	320	160	320	80	320	0	0	0	0	160	0
160 (само Г)	-	160	-	0	-	160	-	80	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	0
180 (само Г)	-	0	-	160	-	240	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	0
200	320	160	320	160	640	0	640	0	800	0	800	0	480	0	0	0	0	0	0
225 (само Г)	-	160	-	80	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	0
250	320	80	320	0	320	0	160	0	160	0	160	0	0	0	0	0	0	0	0
300 (само Т)	320	-	320	-	160	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	-
350 (само Т)	320	-	160	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	-
400 (само Т)	160	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	0	-	-

Број зграда – N=8 на основном сегменту – лоша изолација (пример: 1 од 96 случајева), дужина цеви 6676,25 м за Г, и (2·6676,25) = 13352,5 м за Т

Табела 33. Сумарни инвестициони трокови за 48 случајева обухваћених моделом по стану

Лаша изолација – 4% степенјева (у %)	Топлотна оптерећења, MW km <sup>2</sup>								
Број зграда на основном сегменту	125	160	25	50	40	30	20	10	
<b>N=4 (Т)</b>	<b>Σ</b>	<b>752</b>	<b>798</b>	<b>850</b>	<b>988</b>	<b>1059</b>	<b>1208</b>	<b>1453</b>	<b>1912</b>
	- цевовод	147	174	189	257	281	374	504	814
	- размењивач топлоте	185	124	151	221	288	334	449	488
	- топлана	500	500	500	500	500	500	500	500
<b>N=4 (Г)</b>	<b>Σ</b>	<b>1427</b>	<b>1429</b>	<b>1434</b>	<b>1442</b>	<b>1450</b>	<b>1461</b>	<b>1484</b>	<b>1530</b>
	- цевовод	15	18	20	25	26	34	47	78
	- регулациона станица	12	13	14	17	21	27	37	52
	- прикључни сет и кућни гасни котлић	1400	1400	1400	1400	1400	1400	1400	1400
<b>N=8 (Т)</b>	<b>Σ</b>	<b>857</b>	<b>919</b>	<b>1010</b>	<b>1184</b>	<b>1296</b>	<b>1480</b>	<b>1665</b>	<b>2367</b>
	- цевовод	160	188	224	325	381	473	657	1178
	- размењивач топлоте	188	221	275	355	415	507	498	681
	- топлана	500	500	500	500	500	500	500	500
<b>N=8 (Г)</b>	<b>Σ</b>	<b>1429</b>	<b>1433</b>	<b>1437</b>	<b>1446</b>	<b>1456</b>	<b>1470</b>	<b>1496</b>	<b>1557</b>
	- цевовод	17	20	22	28	35	43	50	105
	- регулациона станица	12	13	14	17	21	27	37	52
	- прикључни сет и кућни гасни котлић	1400	1400	1400	1400	1400	1400	1400	1400
<b>N=15 (Т)</b>	<b>Σ</b>	<b>1033</b>	<b>1110</b>	<b>1247</b>	<b>1427</b>	<b>1573</b>	<b>1737</b>	<b>2076</b>	<b>3212</b>
	- цевовод	212	251	385	429	520	623	885	1608
	- размењивач топлоте	321	359	442	498	553	664	681	1128
	- топлана	500	500	500	500	500	500	500	500
<b>N=15 (Г)</b>	<b>Σ</b>	<b>1431</b>	<b>1436</b>	<b>1443</b>	<b>1456</b>	<b>1468</b>	<b>1486</b>	<b>1520</b>	<b>1604</b>
	- цевовод	19	23	25	28	47	50	83	152
	- регулациона станица	12	13	14	17	21	27	37	52
	- прикључни сет и кућни гасни котлић	1400	1400	1400	1400	1400	1400	1400	1400
<b>N=32 (Т)</b>	<b>Σ</b>	<b>1283</b>	<b>1351</b>	<b>1448<sup>a</sup></b>	<b>1758</b>	<b>1987</b>	<b>2324</b>	<b>502.405</b>	<b>4658</b>
	- цевовод	296	353	417	594	727	902	1.299	2499
	- размењивач топлоте	487	498	531	664	760	922	1.106	1659
	- топлана	500	500	500	500	500	500	500	500
<b>N=32 (Г)</b>	<b>Σ</b>	<b>1438</b>	<b>1445</b>	<b>1455<sup>a</sup></b>	<b>1474</b>	<b>1490</b>	<b>1517</b>	<b>1565</b>	<b>1695</b>
	- цевовод	26	32	41	57	69	90	128	243
	- регулациона станица	12	13	14	17	21	27	37	52
	- прикључни сет и кућни гасни котлић	1400	1400	1400	1400	1400	1400	1400	1400
<b>N=64 (Т)</b>	<b>Σ</b>	<b>1456</b>	<b>1545</b>	<b>1722</b>	<b>2046</b>	<b>2556</b>	<b>2663</b>	<b>3700</b>	<b>6453</b>
	- цевовод	319	381	485	661	812	1057	1541	2953
	- размењивач топлоте	637	664	737	885	1244	1106	1659	3000
	- топлана	500	500	500	500	500	500	500	500
<b>N=64 (Г)</b>	<b>Σ</b>	<b>1442</b>	<b>1449</b>	<b>1461</b>	<b>1483</b>	<b>1501</b>	<b>1529</b>	<b>1583</b>	<b>1738</b>
	- цевовод	30	36	47	66	80	102	146	286
	- регулациона станица	12	13	14	17	21	27	37	52
	- прикључни сет и кућни гасни котлић	1400	1400	1400	1400	1400	1400	1400	1400
<b>N=128 (Т)</b>	<b>Σ</b>	<b>1783</b>	<b>1846</b>	<b>2274</b>	<b>2679</b>	<b>3209</b>	<b>4079</b>	<b>5489</b>	<b>7261</b>
	- цевовод	398	461	594	852	1050	1367	1989	3761
	- размењивач топлоте	885	885	1180	1327	1659	2212	3000	3000
	- топлана	500	500	500	500	500	500	500	500
<b>N=128 (Г)</b>	<b>Σ</b>	<b>1450</b>	<b>1458</b>	<b>1471</b>	<b>1496</b>	<b>1518</b>	<b>1555</b>	<b>1626</b>	<b>1823</b>
	- цевовод	38	45	57	79	97	128	189	371
	- регулациона станица	12	13	14	17	21	27	37	52
	- прикључни сет и кућни гасни котлић	1400	1400	1400	1400	1400	1400	1400	1400

<sup>a</sup> видети Табелу 34

Табела 34. Пример прорачуна дисконтованих трошкова

Систем уградњеног осветљења														
$\eta = 3,2$ за грејање на $40,00\%$ $\text{kgm}^3$ , $\alpha =$ позитивно или негативно $= 7,5$ $\text{MWh}/\text{kgm}^3$ , $\gamma = 0,4$ при максималним стандардима по ватраци														
Топлинско водени систем							Систем за дистрибуцију гаса							
г	T	h <sub>g</sub>	с	d	e	f	Г	g	h	i	j	k	Т-Г	
1	14417,5	9105,6	5300,8	0	0	0	1454,5	469,7	109,7	4000	10000	0	-7,0	
2	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
3	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
4	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
5	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
6	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
7	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
8	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
9	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
10	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
11	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
12	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
13	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
14	568,2	0	5300,8	18,2%	10,2	8,2%	924,7	0	0	1000	8000	22	-858,5	
15	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
16	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
17	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
18	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
19	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
20	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
21	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
22	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
23	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
24	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
25	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
26	37,4	0	0	18,2%	10,2	8,2%	21,7	0	0	0	0	22	15,7	
<b>Σ</b>	<b>2919</b>	<b>917</b>	<b>1062</b>	<b>458</b>	<b>255</b>	<b>219</b>	<b>2887</b>	<b>46,7</b>	<b>13,7</b>	<b>500</b>	<b>1800</b>	<b>544</b>	<b>16,0<sup>l</sup></b>	

Дисконтна стапа = 10,0 % Нето садашње вредност NPV = 24,88<sup>m</sup>

Напомена: разлика настаје услед заокруживања

<sup>l</sup> један од случајева из табеле 35

<sup>m</sup> један од случајева из табеле 36

Разлика иницијалних трошкова у оба система се даје у табели 35, а дисконтованих у табели 36.

Табела 35. Разлика иницијалних трошкова у оба система

Број зграда – N <sup>b</sup> (лошија изолација)		Топлотно оптерећење, MW·km <sup>2</sup>							
		125	100	75	50	40	30	20	10
N=4	I	-674	-631	-583	-454	-390	-253	-30	381
	II	-1174	-1131	-1083	-954	-890	-753	-530	-119
N=8	I	-571	-513	-426	-261	-159	10	168	810
	II	-1071	-1013	-926	-761	-659	-490	-332	310
N=16	I	-398	-325	-195	-28	106	301	556	1.608
	II	-898	-825	-695	-528	-394	-199	56	1,108
N=32	I	-156	-94	-7 <sup>d</sup>	284	497	807	1339	2.963
	II	-656	-594	-507	-216	-3	307	839	2,463
N=64	I	14	96	262	563	1056	1134	2117	4.714
	II	-486	-404	-238	63	556	634	1617	4,214
N=128	I	333	388	1183	1183	1691	2524	3863	5.438
	II	-167	-112	303	683	1191	2024	3363	4,938
II-I		500	500	500	500	500	500	500	500
e		689	689	689	689	689	689	689	689

Негативне вредности: систем за дистрибуцију гаса је скупљи  
 Позитивне вредности: топлификациони систем је скупљи

<sup>a</sup>T-Г (видети ј-ну 226 и 227, као и табелу 34)

<sup>b</sup>Број зграда је на 0,001 (кв.м), број зграда је на 0,001 (кв.м) (укупно је на 0,001 (кв.м) у урбаним системима)  
<sup>c</sup>Број зграда је на 0,001 (кв.м) (укупно је на 0,001 (кв.м) у урбаним системима)  
<sup>d</sup>Централна децентрализована дистрибуција гаса је на 0,001 (кв.м) (укупно је на 0,001 (кв.м) у урбаним системима)  
<sup>e</sup>Централна децентрализована дистрибуција гаса је на 0,001 (кв.м) (укупно је на 0,001 (кв.м) у урбаним системима)

Трошкови за гасоводни систем се рачунају на основу формуле (226):

$$\Gamma = \frac{MPC+PC+GM+MC+KK+OG}{y} \quad (226)$$

Где су:  $\Gamma$ -трошкови гасоводног система, MPC-трошкови мерно регулационе станице, PC-трошкови регулационе станице, GM-трошкови гасоводне мреже, MC-трошкови мерног сета, KK-трошкови гасног кућног котлића и OG-трошкови одржавања гасовода

Трошкови за систем топлификације се рачунају на основу формуле (227):

$$T = \frac{TM+PT+NT+OT}{y} \quad (227)$$

Где су:  $T$ -трошкови топлификационог система, TM-трошкови топоводне мреже, PT-трошкови размењивача топлоте, NT-трошкови за изградњу нове топлане, OT-трошкови одржавања топлификационог система

**Табела 36.** Разлика дисконтованих трошкова у оба система<sup>a</sup>

Број зграда – N <sup>b</sup> (лошија изолација)		Топлотно оптерећење MW·km <sup>-2</sup>							
<sup>b</sup>	dr <sup>c</sup>	125	100	75	50	40	30	20	10
N=4	5%	-1010	-946	-870	-679	-576	-371	-34	529
	7%	-911	-852	-784	-609	-517	-329	-22	499
	10%	-802	-749	-689	-532	-451	-283	-9	467
N=8	5%	-846	-757	-624	-378	-223	34	243	1161
	7%	-763	-682	-562	-337	-196	38	233	1078
	10%	-671	-599	-492	-291	-166	42	223	985
N=16	5%	-573	-462	-262	-23	174	472	822	2357
	7%	-516	-416	-234	-15	166	437	761	2168
	10%	-454	-364	-203	-5	157	398	695	1959
N=32	5%	-197	-111	16	446	762	1229	1999	4336
	7%	-176	-97	20	413	701	1127	1834	3980
	10%	-152	-80	25 <sup>d</sup>	377	635	1015	1652	3587
N=64	5%	79	196	441	891	1664	1722	3211	7103
	7%	72	180	404	814	1514	1576	2931	6479
	10%	65	163	363	730	1348	1415	2623	5791
N=128	5%	584	657	1305	1858	2642	3931	5971	8062
	7%	528	596	1182	1689	2400	3569	5423	7374
	10%	467	530	1048	1504	2135	3171	4820	6614

Негативне вредности: систем за дистрибуцију гаса је скупљи  
 Позитивне вредности: топлификациони систем је скупљи

<sup>a</sup> према j-ни 228

<sup>b</sup> варијанта I-цена кућног гасног котлића 500 € (видети табелу 35)

<sup>c</sup> вредност дисконтне стопе

<sup>d</sup> пример из табеле 34

$$НСВ = \sum_{t=1}^n \frac{T-\Gamma}{(1+d_r)^t} \quad (228)$$

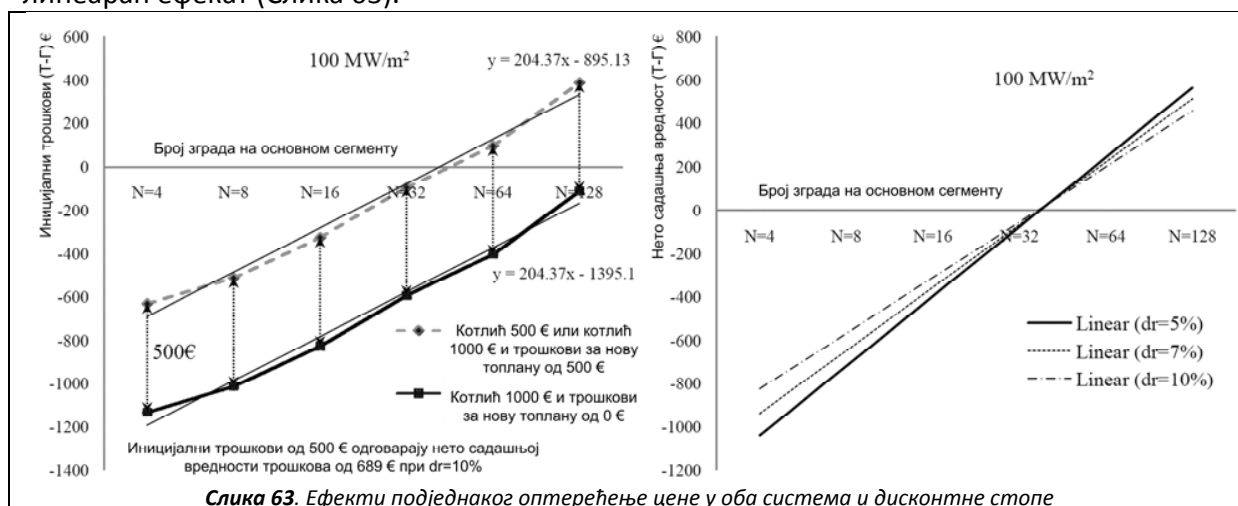
На слици 61 су приказане све могуће дужине цевовода које постоје у моделу. Пречници у структури цевовода зависе од топлотног оптерећења сваког од приказаних истраживачких сегмената, тј. на сваком од сегмената може постојати осам различитих оптерећења. Управо да би ови пречници били што реалнији увео се појам истраживачког сегмента који је 10 пута већи од основног сегмента.

Уопштено говорећи сличност између реалног насеља и условне урбанистичке површине се успоставља преко следеће две величине:

1. Број зграда на  $0,05 \text{ km}^2$ , тј. 5 ха (Слика 59)
2. Топлотног оптерећења, тј. потребне грејне снаге која је потребна за загревање станова у зградама које се налазе у разматраној зони од  $0,05 \text{ km}^2$ , тј. 5 ха (Слика 58)

Топлотне потребе се процењују на  $1,2 \text{ m}^3/\text{h}$  природног гаса по домаћинству, односно по просечном тј. условном стану. Више о процени грејних потреба може се сазнати из чланка Хеуиа-Чуа и Тсаи-Фенга (Huei-Chu-Tsai-Feng 2002). На ову тему је занимљива и докторска дисертација Муртоа (Murto 1998). Укратко, на основу процењених грејних потреба извлачи се закључак да просечан стан ако је добро изолован има топлотно оптерећење од  $142 \text{ W/m}^2$  у случају лошије изолације, односно  $95 \text{ W/m}^2$  у случају добре изолације. Топлотно оптерећење се даје у  $\text{MW/km}^2$ , а не ни у  $\text{MW}/0,05 \text{ km}^2$  нити у  $\text{MW}/0,5 \text{ km}^2$ , што је суштински исто.

На основу модела условних урбанистичких површина, за свих 96 је спроведена економска рачуница (Табеле 33 и 34). Замена делова система је предвиђена за наредних 25 година, као и одржавање. У сваком од 96 случајева је вршено поређење трошкова, тако да онај систем од два са мање трошкова има предност (Табела 35 и 36). Пошто се трошкови дисконтују на 25 година, већи трошкови имају и сразмерно веће оптерећење што је већа дисконтна стопа, док подједнако повећање или смањење трошкова оба система има линеаран ефекат (Слика 63).

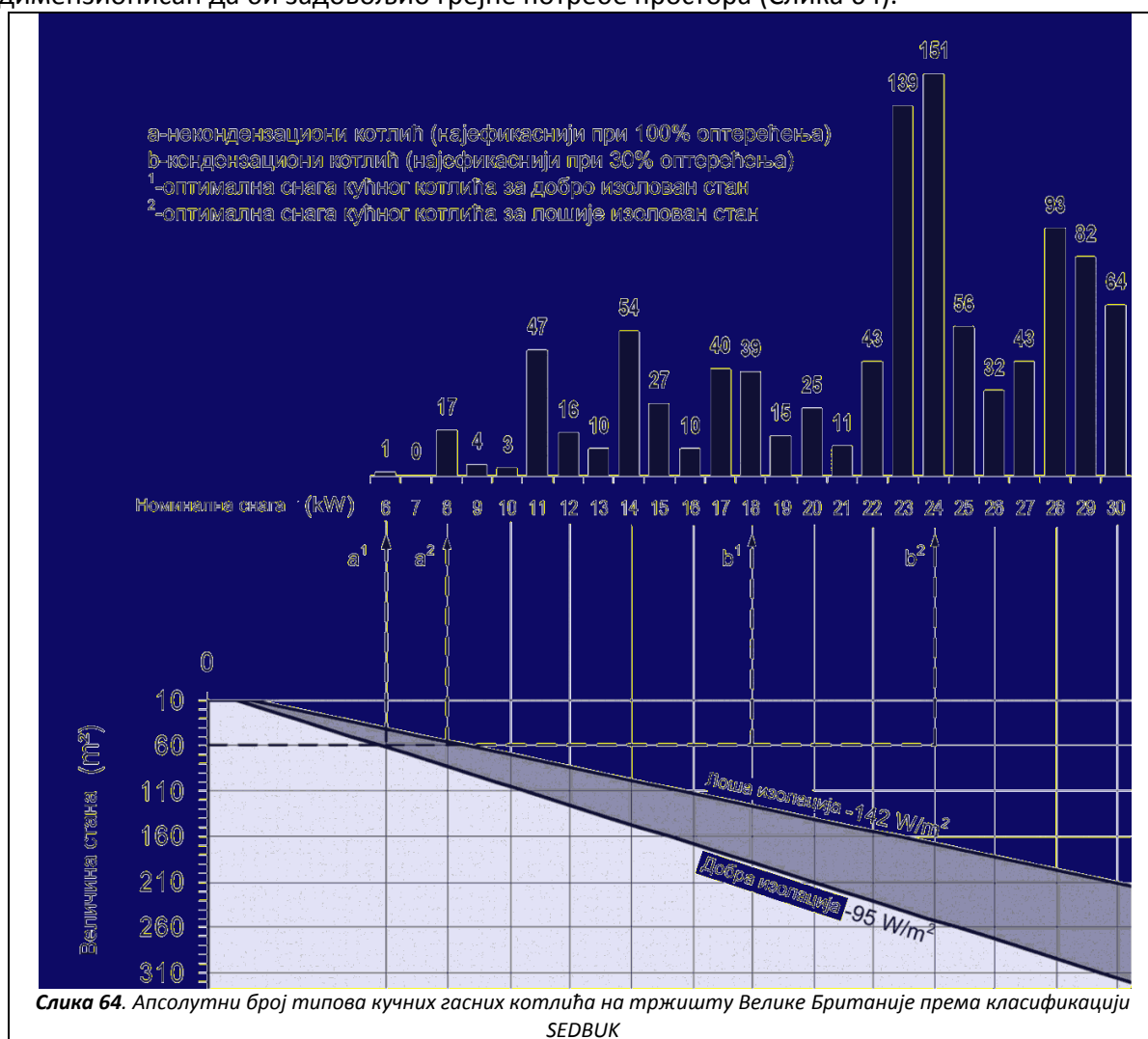


Слика 63. Ефекти подједнаког оптерећења цене у оба система и дисконтне стопе

Сваки стан је у опцији гасификације опремљен кућним гасним котлићем. Са друге стране сваком стану у опцији топлификације одговара удео у топлани као и у припадајућем размењивачу топлоте. Такође сваком стану у опцији гасификације припада део трошкова гасоводне мреже, а у топлификацији део трошкова топловодне мреже. Топлифицирани стан је оптерећен и електричном енергијом потребном за рад пумпи. Због додатних топлотних губитака од топлане до стана, сматра се да стан који је топлифициран троши 10% више природног гаса од гасифицираног.

Инвестиција у нову топлану се процењује на  $80000 \text{ €/MW}$  ако је капацитет топлане  $<50 \text{ MW}$ , на  $65000 \text{ €/MW}$  за топлане капацитета  $50\text{--}100 \text{ MW}$  и  $52000 \text{ €/MW}$  за топлане капацитета  $100\text{--}200 \text{ MW}$ . Гасни котлић има различиту цену највише на основу сезонске

ефикасности. Може се изабрати знатно ефикаснији кондензациони али скупљи котлић, или мање ефикасан обичан котлић. Најзаступљенији на тржишту су најефикаснији котлићи у својој групи (Слика 62). При избору котлића треба водити рачуна да буде добро димензионисан да би задовољио грејне потребе простора (Слика 64).



Слика 64. Апсолутни број типова кучних гасних котлића на тржишту Велике Британије према класификацији SEDBUK









Просечан стан у нашем моделу има 60 m<sup>2</sup>, међутим према слици 64 се види да је могуће изабрати врло различите гасне котлиће како по снази, а тако и по ефикасности (Слика 62). У наредним разматрањима више ћемо се позабавити расположивим котлићима на тржишту у Србији.

Узимајући у обзир претпоставке по којима ће природни гас бити фосилно гориво са највећим учешћем у потрошњи примарних енергетских сировина у 21. веку, а имајући у виду његове несумњиве еколошке предности над осталим фосилним горивима, као и расположиве резерве, а узимајући у обзир све строжије захтеве за повећањем енергетске ефикасности уопште, корисно је размотрити како се пореди енергетска ефикасност појединачних котлова на природни гас у домаћинствима и које су процењене уштеде при већој ефикасности.



Као једноставан начин приказивања ефикасности могу се увести симболи класа енергетске ефикасности означени од А до G (Табела 37). Ознаке нису обавезујуће за произвођаче и они их могу, али не морају користити. Ове класе су привремене и могу бити повучене када буде ступила на снагу Европска директива која се тиче обележавања енергетске ефикасности котлова. Класе ефикасности су дате на основу верификованих степена сезонске ефикасности за подручје Уједињеног Краљевства са којима се сложио произвођач или увозник котлова и које као такве улазе у базу података која се ажурира сваког последњег дана у месецу и која се формира за котлове који су заступљени на тржишту Велике Британије. Произвођачи и увозници нису дужни да обавезно доставе податке за ову класификацију нити да буду класификовани.

Табела 37. Класе ефикасности (www.sedbuk.com)

Класа ефикасности	Степен сезонске ефикасности (SEDBUK)
	90% и више
	86% - 90%
	82% - 86%
	78% - 82%
	74% - 78%
	70% - 74%
	испод 70%
	или тренутно чекају на сертификацију теста ефикасности или су застарели али их још има на тржишту

Ове ознаке класа ефикасности се у пракси применљују и у Србији за многе производе.

Котлови који се налазе у класификацији у бази за Велику Британију, а који се налазе и на тржишту Србије су такође упоредиви.

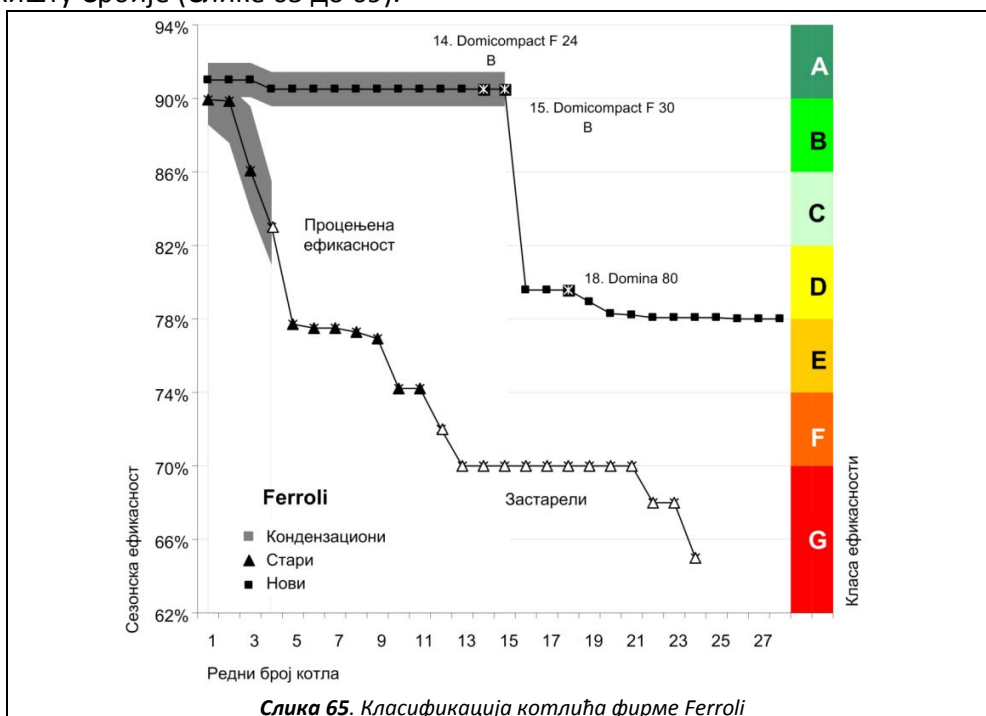
Сезонска ефикасност (SEDBUK - Seasonal Efficiency of Domestic Boilers in the UK) омогућава да се пореде поједини модели котлова (за детаљан начин прорачуна видети [www.bre.co.uk/sap2005](http://www.bre.co.uk/sap2005) - The Government's Standard Assessment Procedure for Energy Rating of Dwellings; SAP 2005 EDITION, додатак D). Ова методологија је прописана процедуром владе Велике Британије за вредновање енергетске ефикасности у зградама (The Government's Standard Assessment Procedure for Energy Rating of Dwellings; SAP 2005 EDITION) и у складу је са Европском директивом 92/42/ЕЕЦ (ОЈ L 167, 22.6.1992, р. 17) која разматра захтеве ефикасности за нове котлове за топлу воду који раде на гасовита и течна горива. Ова директива је у усклађена са SAVE програмом који се тиче промоције енергетске ефикасности у оквиру Европске Уније. Директива разматра котлове који раде на течна и/или гасовита горива називне снаге од 4 kW до 400 kW (Танасковић-Бркић 2007, Бркић-Танасковић 2007).

База података са сезонском ефикасношћу даје посебно податке за котлове на гас, течни нафтни гас-ТНГ (енг. LNG) и на течна горива. Посебно се дају подаци за котлове који су

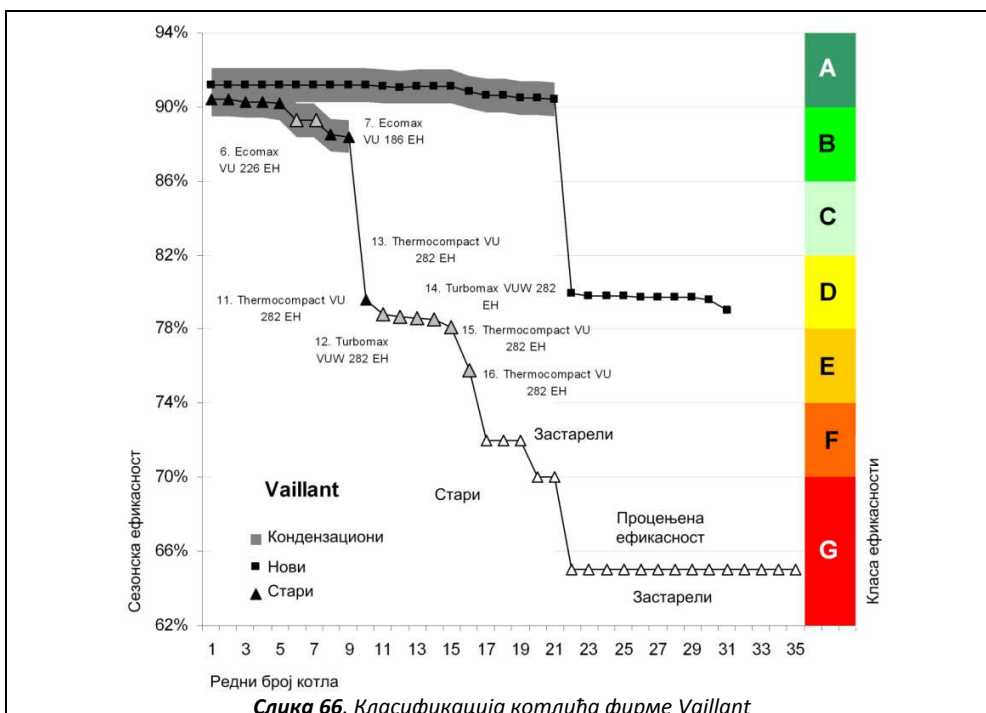


тренутно у производњи, а посебно за котлове који се више не производе било да су застарели или им је производња престала из било ког разлога.

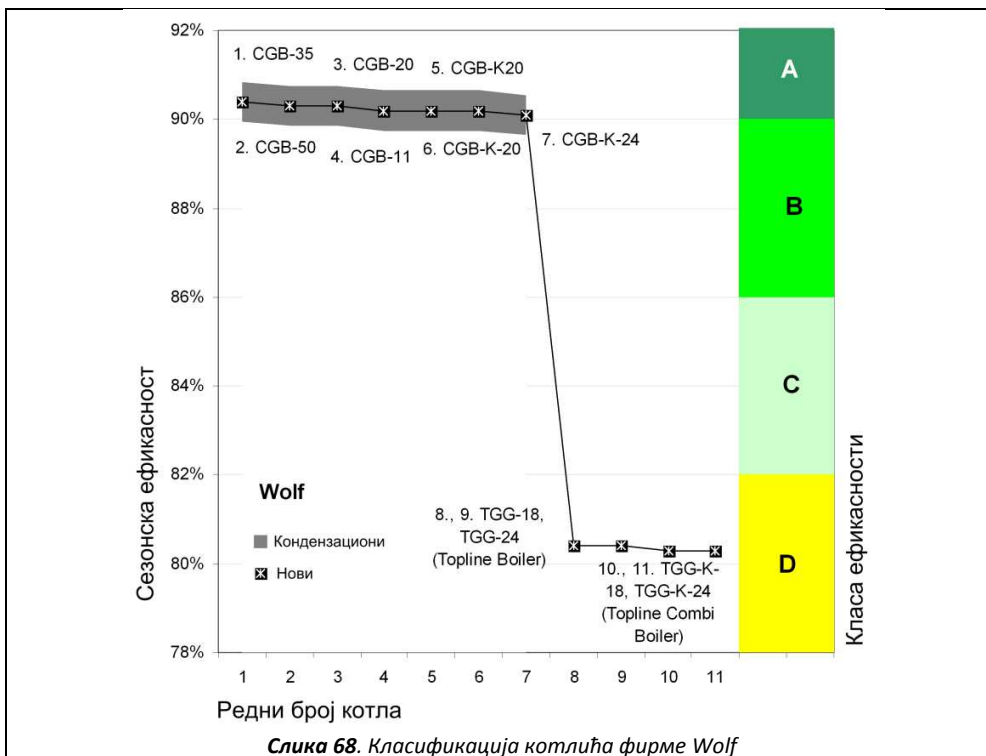
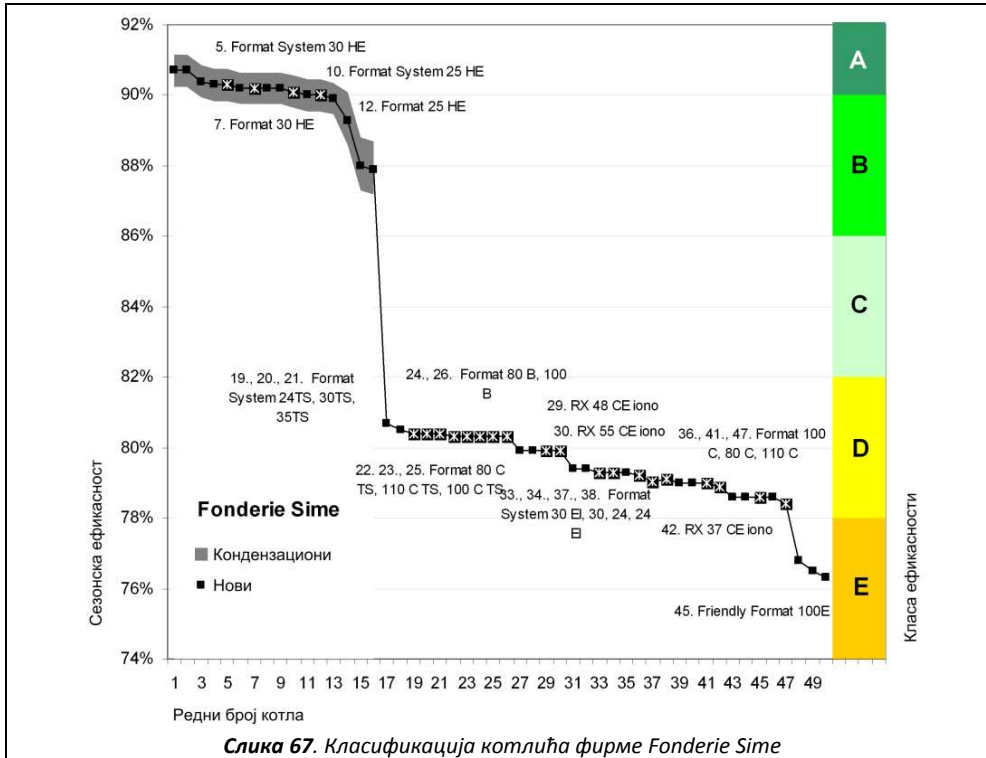
На следећим дијаграмима приказани су подаци ефикасности за поједине произвођаче котлова са посебно означеним котловима који су присутни под истим трговачким именом и на тржишту Србије (Слике 65 до 69).

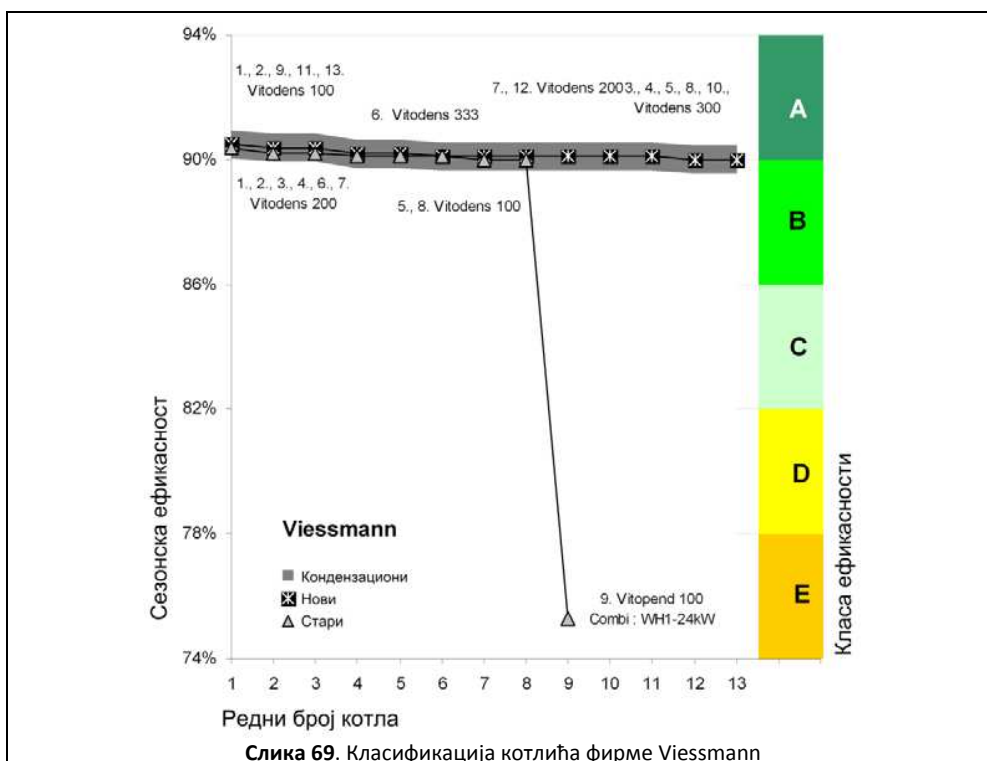


Слика 65. Класификација котлића фирме Ferroli



Слика 66. Класификација котлића фирме Vaillant





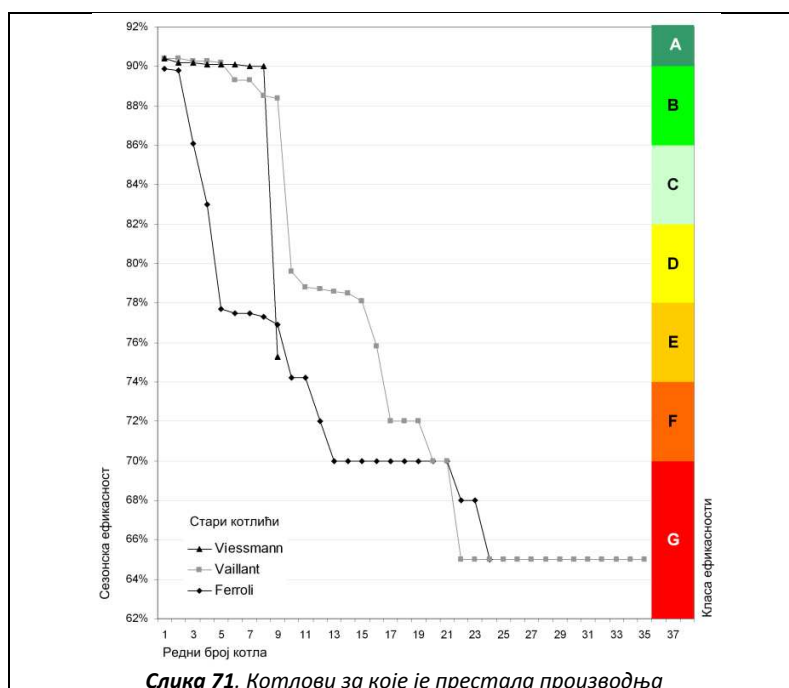
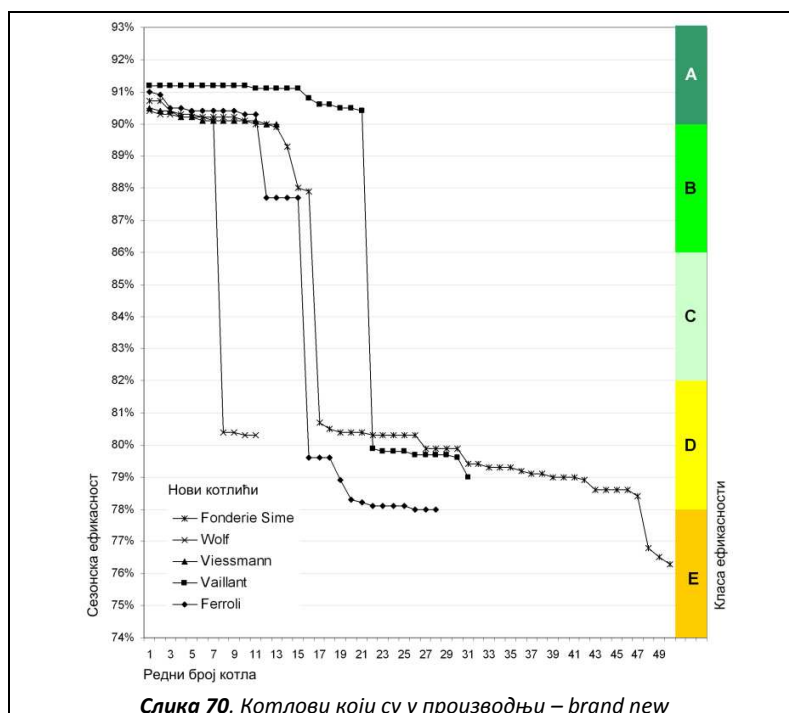
Слика 69. Класификација котлића фирме Viessmann

Податке за моделе који се тренутно производе обезбеђује произвођач, који има право да изврши увид у прорачунате податке пре објављивања. Наведена срачуната ефикасност је базирана на тест резултатима које су доставили произвођачи и које је одобрило независно Нотификационо тело (акредитовано за тестирање котлова по европским стандардима). Подаци за застареле моделе се не подвргавају провери по истим високим стандардима.

База података о котловима се мења, односно ажурира подацима о новим котловима као и извесним изменама код већ унетих модела ако се за то укаже потреба, и то тако да се након ових измена не може вршити увид у старо стање база.

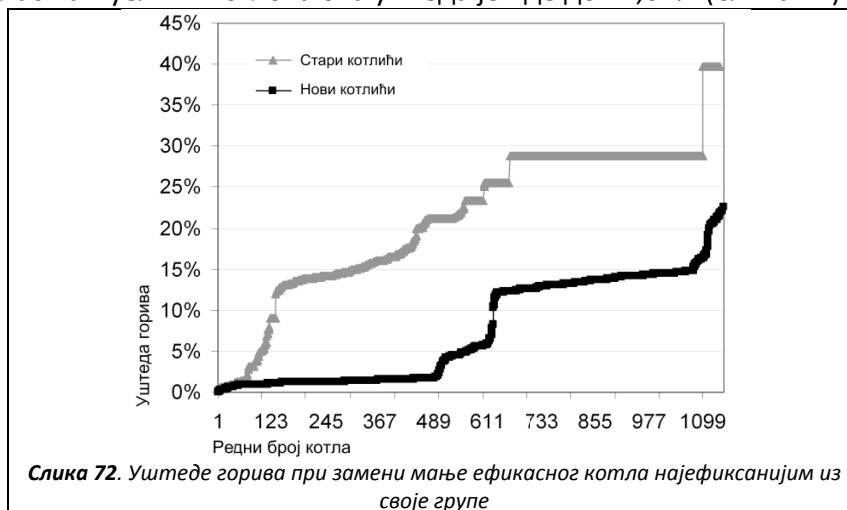
Приказан степен ефикасности котлова зависи од тачности мерења улазних података. Ипак ове мале разлике степена ефикасности добијеног на основу ових података су практично занемариве тако да се могу користити за поређење одређених модела котлова. Статистичке анализе су показале да уколико два котла имају ефикасност срачунату по SEDBUK методологији за три процентна поена различиту тада котао са већом вредношћу срачунате ефикасности је и у стварности ефикаснији са сигурношћу од 95%.

Подаци се могу приказати и збирно са нове котлове – brand new (Слика 70) и котлове који се више не производе или су застарели (Слика 71).



На основу датих дијаграма и података од преко 2000 котлова из базе може се закључити да већина кондензационих котлова носи ознаку енергетске класе А, да у класи В и С, има врло мало котлова, док је већина некондензационих котлова у класи D уколико се ради о котловима који се још увек производе или у нижим класама за котлове који се више не производе или су застарели.

Уколико узмемо за поређење најнефикаснији котло који је још увек и најнефикаснији који се више не производи или који је застарео, и поредимо остале из припадајуће групе добијамо уштеде у гориву на годишњем нивоу до 39,76% уколико заменимо најмање ефикасан застарели котло са најнефикаснијим котлом који се више не производи, ондносно у класи актуелних котлова ова уштеда је иде до 22,62% (Слика 72).

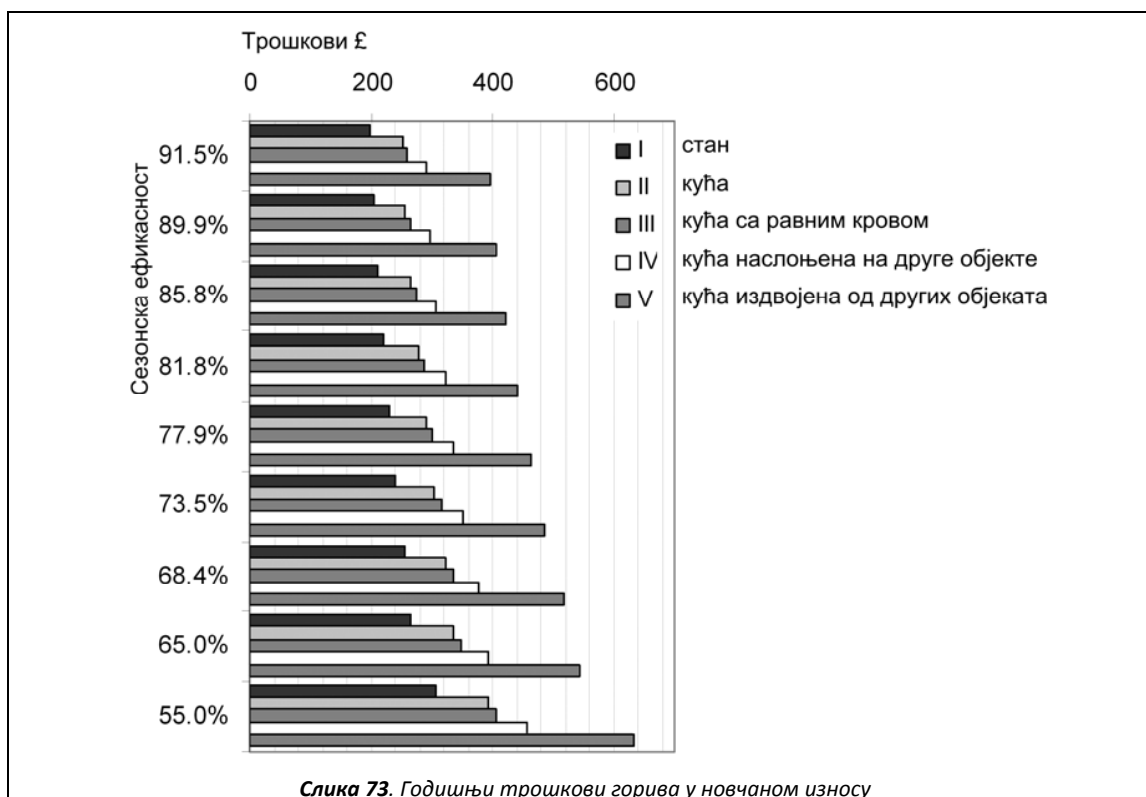


На основу цене горива дате у Табели 12 у оквиру SAP 2005, [www.bre.co.uk/sap2005](http://www.bre.co.uk/sap2005) (The Government's Standard Assessment Procedure for Energy Rating of Dwellings; SAP 2005 EDITION) могуће је извршити процену годишњих трошкова горива, тј. природног гаса у новчаном износу (у овом случају у Британским Фунтама) у зависности од вредности сезонског степена ефикасности. Уштеде на гориву које се постижу заменом котла са најмање процењеном сезонском ефикасношћу од 55% бољим котлом дате у табели 38.

**Табела 38.** Уштеде заменом најмање ефикасног котла неким ефикаснијим

класа	SEDBUK	уштеда £/годишње				
		I	II	III	IV	V
A	91,5%	109	142	147	168	238
B	89,9%	105	138	142	162	229
C	85,8%	97	127	132	150	212
D	81,8%	88	116	120	136	193
E	77,9%	79	103	106	122	172
F	73,5%	68	89	92	105	148
G	68,4%	53	69	71	81	115
G	65,0%	42	56	57	66	92
G	55,0%	0	0	0	0	0

Процењени годишњи трошкови за гориво графички су приказани на слици 73 у зависности од типа објекта. Разматрајући различите типове котлова може се закључити да се највеће уштеде, како енергетске тако и економске могу постићи коришћењем кондензационих котлова пошто се они налазе у енергетској класи А, док се већина осталих типова котлова налази у класи D (Слика 62).



Слика 73. Годишњи трошкови горива у новчаном износу

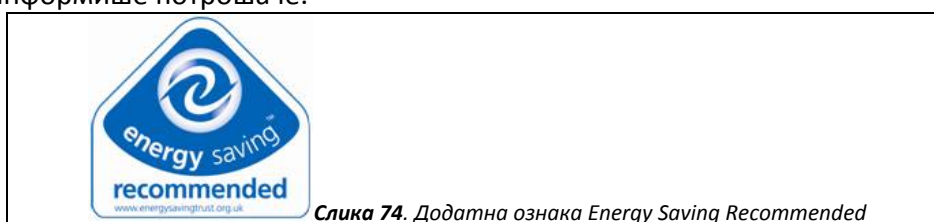
На тржишту Србије се могу наћи практично модели котлова из обе групе, како они који се још увек производе тако и застарели, односно котлови за које је из било ког разлога престала производња.

Сама методологија којом се прорачунава сезонска ефикасност кућних гасних котлова је прописана процедуром владе Велике Британије за вредновање енергетске ефикасности у зградама. Ова методологија је у складу са Европском директивом 92/42/ЕЕС која разматра захтеве ефикасности за нове котлове за топлу воду који раде на гасовита и течна горива. Овако прорачуната сезонска ефикасност је релевантан параметар за поређење различитих модела котлова.

За прорачун сезонске ефикасности кућних котлова на гас, односно појединих модела котлова, потребно је имати познат податак о степену искоришћења за доњу топлотну моћ при пуном оптерећењу  $E_{full}$  и при 30% оптерећења  $E_{part}$ , као и тип котлова. Европска директива 92/42/ЕЕС прописује стандардне вредности ових улазних вредности ефикасности за прорачун у зависности од снаге и типа котлова као и тачну дефиницију одређеног типа котла. На основу ових улазних података може се приступити прорачуну сезонске ефикасности по методи прописаној по SAP 2005 и тако добити податак који се у пракси показао као најбољи за поређење различитих типова котлова.

Ради боље информисаности тржишта и заштите купаца, као и здраве конкуренције, у Великој Британији се податак о сезонској ефикасности, енг. SEDBUK објављује јавно уз

сагласност произвођача, односно његовог заступника на основу чега поједини модел котла може да уђе у базу података, а након верификације улазних података од стране овлашћене лабораторије може и да добије ознаку класе енергетске ефикасности, као и додатну ознаку (Слика 74) - Energy Saving Recommended (коју додељује непрофитна организација The Energy Saving ([www.energysavingtrust.org.uk](http://www.energysavingtrust.org.uk)) коју је основала Влада Велике Британије уз учешће приватног сектора после Самита у Рио де Жанеиру 1992. године. Ова организација промовише штедњу енергије са два главна циља, да допринесе одрживом коришћењу енергије и да се смањи емисија угљендиоксида - CO<sub>2</sub>, и у том циљу додатно информише потрошаче.



Слика 74. Додатна ознака Energy Saving Recommended

Европска директива 92/42/ЕЕС тиче се ефикасности котлова за топлу воду који раде на течна или гасовита горива. Директива прописује у члану 5. степене ефикасности које котлови морају задовољити и под којим условима, а који су улазни подаци за прорачун сезонске ефикасности (Табела 39):

Табела 39. Захтевана ефикасност котлова по директиви 92/42/ЕЕС

Тип котла	при називној снази котла (%)	при делимичном оптерећењу котла (%)
Стандардни котлови	$\geq 84 + 2 \log(P_n)$	$\geq 80 + 3 \log(P_n)$
Нискотемпературни котлови (*)	$\geq 87,5 + 1,5 \log(P_n)$	$\geq 87,5 + 1,5 \log(P_n)$
Гасокондензациони котлови	$\geq 91 + \log(P_n)$	$\geq 97 + \log(P_n)$

\* укључујући и гасокондензационе котлове на течно гориво

У Табели 39,  $P_n$  је снага дата у kW и може бити у опсегу од 4-400 kW.

Такође директива прописује шта се под којим типом котлова тачно подразумева, нпр. нискотемпературни, кондензациони котло, итд. Просечна температура воде у котлу за стандардне услове под којима се одређују степени ефикасности у табели 39. је при пуној снази 70°C, а при делимичној снази за стандардне котлове  $\geq 50^\circ\text{C}$ , за нискотемпературне 40°C, док је за кондензационе котлове битна улазна температура воде која мора бити 30°C да би се постигао кондензациони ефекат.

Као што је већ напоменуто као улазни подаци за прорачун сезонске ефикасности потребни су подаци о степену искоришћења за доњу топлотну моћ при пуном оптерећењу  $E_{full}$  и при 30% оптерећења  $E_{part}$ , као и тип котла. Највеће вредности степена ефикасности за кондензационе котлове при пуном оптерећењу могу бити 101,0%, а при 30% оптерећења 107,0%, док код некондензационих котлова највеће вредности при пуном оптерећењу могу бити 92,0%, а при 30% оптерећења 91,0%. Степене искоришћења при пуном  $E_{full}$  и делимичном оптерећењу  $E_{part}$  који служе као улазни податак и који не могу прећи наведене вредности треба превести на горњу топлотну моћ и то тако што се оне

множе коефицијентом 0,901 за гасне котлове, са 0,921 за котлове на течни нафни гас – ТНГ (енг. LNG) (видети у SAP 2005 табелу D2.2).

У даљем току прорачуна потребно је одредити тип котла у складу са одељком D1 и табелом D2.3 у SAP 2005, а затим на основу овога изабрати одговарајућу једначину за прорачун сезонске ефикасности из табеле D2.4, нпр. за on/off гасни котло (on/off regular), било кондензациони или не, важи једначина 101 (229), а за исти такав са резервоаром (on/off storage combination) једначина 105 (230) по SAP 2005, док за подесиве било кондензационе или не, ако немају резервоар (modulating regular) важи једначина 102 (231), а ако имају резервоар (modulating storage combination) j-на 106 (232), итд:

$$101: E=0,5 \cdot (E_{full}+E_{part})-2,5-4 \quad (229)$$

$$105: E=0,5 \cdot (E_{full}+E_{part})-2,8+(0,209 \cdot b \cdot L \cdot V_{cs})-4p \quad (230)$$

$$102: E=0,5 \cdot (E_{full}+E_{part})-2,0-4p \quad (231)$$

$$106: E=0,5 \cdot (E_{full}+E_{part})-1,7+(0,209 \cdot b \cdot L \cdot V_{cs})-4p \quad (232)$$

Котлови покривени једначинама 101 (229) и 102 (231) служе за обезбеђење грејања, а не и потрошне топле воде у општем случају (енг. regular), док су котлови покривени једначинама 105 (230) и 106 (232) тзв. комби котлови, тј. обезбеђују топлу воду за грејање као и потрошну топлу воду и имају интерни резервоар од најмање 15 а највише 70 литара, а уколико је резервоар већи од 70 литара тада грејни круг не сме да се напаја из овог резервоара, а ако се напаја не потпада у ову класу котлова, већ се сезонска ефикасност рачуна по другачијој једначини (Слика 75).

Уколико у табели D2.3 у SAP 2005 не постоји број једначине која се бира из табеле D2.4 у SAP 2005, односно ако стоји ознака – X, прорачун се не може наставити.

За гасне котлове и за котлове на ТНГ, параметар  $p$  у једначинама 105 (230), 102 (231), 106 (232) је уколико немају пилот пламен тада је  $p=0$ , а уколико имају стални пилот пламен тада је  $p=1$ .

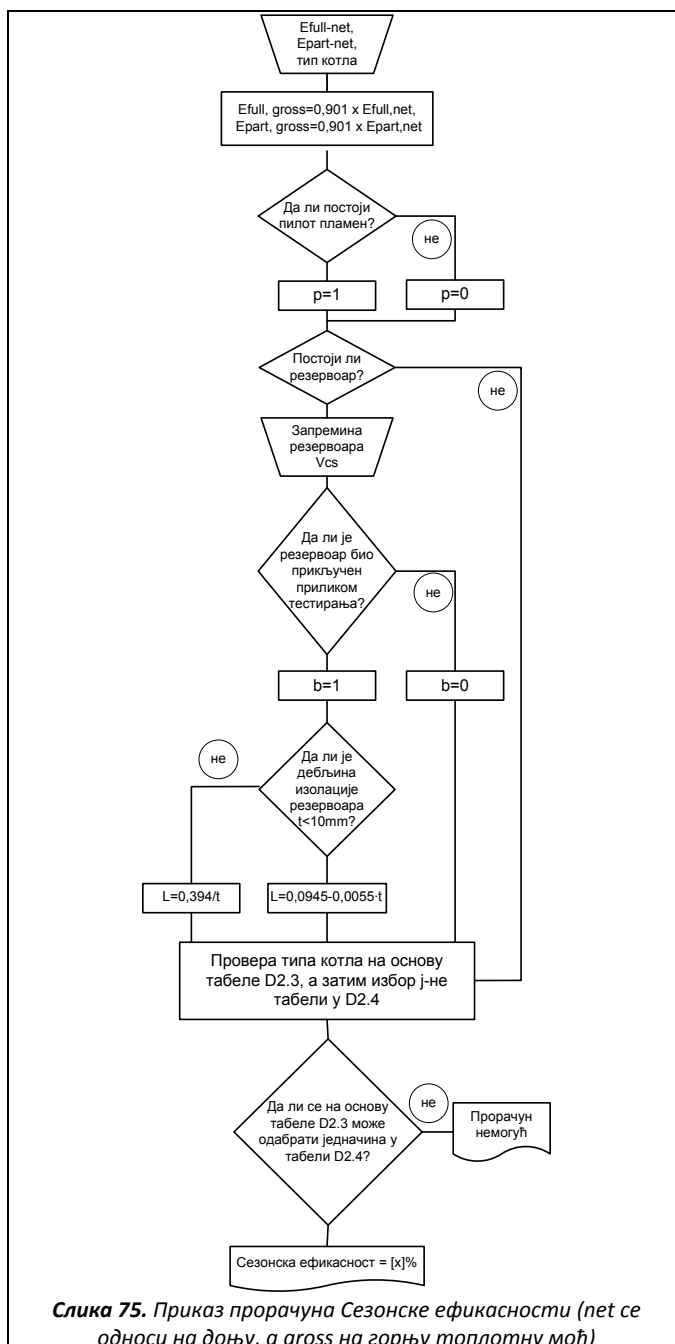
Параметар  $b=0$ , уколико нису укључени губици из резервоара код котлова са резервоаром, односно уколико није био прикључен резервоар током тестирања, у супротном  $b=1$ .

Уколико постоји резервоар запремине  $V_{cs}$  у  $dm^3$ , тада се параметар  $L$  рачуна као  $L=0,0945-0,0055 \cdot t$ , ако је  $t < 10mm$ , односно као  $L=0,394/t$ , ако је  $t \geq 10mm$ , где је  $t$  дебљина изолације у  $mm$ .

Добијен резултат, односно Сезонску ефикасност  $E$  треба дати заокружену на једну децималу (енг. Seasonal Efficiency = [x] %), уз обавезно навођење Нотификационог тела за тестирање котлова акредитованог од стране националне службе ЕУ (енг. The Notified Body accredited for the testing of boilers by an EU national accreditation service) које потврђује да су улазни подаци, метод прорачуна и сам прорачун спроведени у складу са Европском







директивом о ефикасности котлова. У Великој Британији скраћеница за Сезонску ефикасност котлова је SEDBUK (енг. Seasonal Efficiency of Domestic Boilers in the UK).




Слика 75. Приказ прорачуна Сезонске ефикасности (net се односи на доњу, а gross на горњу топлотну моћ)

На основу горе описаног поступка у Великој Британији се формира база података, тзв. “Плава књига котлова” у којој се налазе подаци за преко 2000 кућних гасних котлова, а која је доступна и преко интернета преко [www.sedbuk.com](http://www.sedbuk.com) (Слике 76 и 77):

Detail	<b>1 Glow worm: Ultrapower 170 SXI :</b> gas : combi : condensing : floor mounted modulating (24.3 - 24.3 kW)	SAP seasonal efficiency <b>91.5%</b>	
Detail	<b>2 Glow worm: Ultrapower 100 SXI :</b> gas : combi : condensing : floor mounted modulating (24.3 - 24.3 kW)	SAP seasonal efficiency <b>91.5%</b>	
Detail	<b>3 Potterton: Promax SL : 15</b> gas : regular : condensing : wall mounted modulating (15.24 - 15.24 kW)	SAP seasonal efficiency <b>91.3%</b>	 

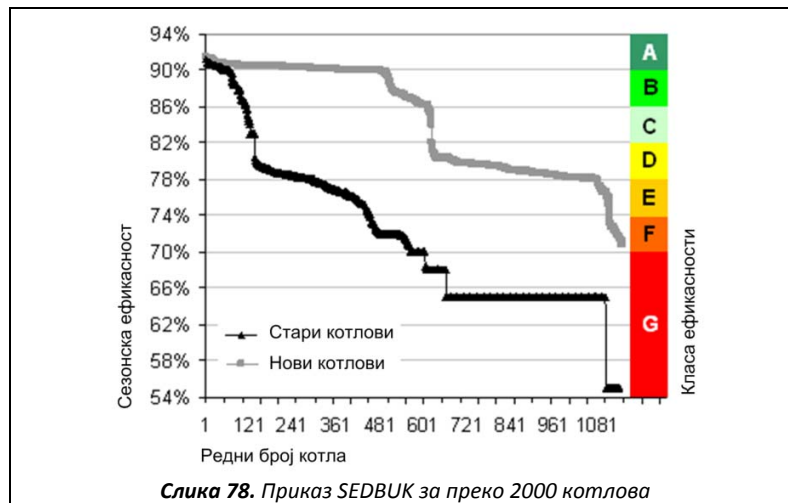
Слика 76. Приказ базе података за прва 3 најефикасна котла која се још увек производе (31.03.2007. год) – преузето директно са сајта [www.sedbuk.com](http://www.sedbuk.com)

Да би се котао нашао у бази потребна је сагласност произвођача или његовог заступника, а тек по сертификацији улазних података и прорачуна сезонске ефикасности (SEDBUK) на горе описани начин може да добије ознаку класе ефикасности. База се ажурира сваког последњег дана у месецу. Примери са слике 76 и 77 су дати из базе ажуриране 31. марта 2007. године. Посебно се дају подаци за котлове који се још увек производе, а посебно за старе котлове, односно за оне за које је престала производња из било ког разлога. Моруће је и детаљно претраживање базе по параметрима.

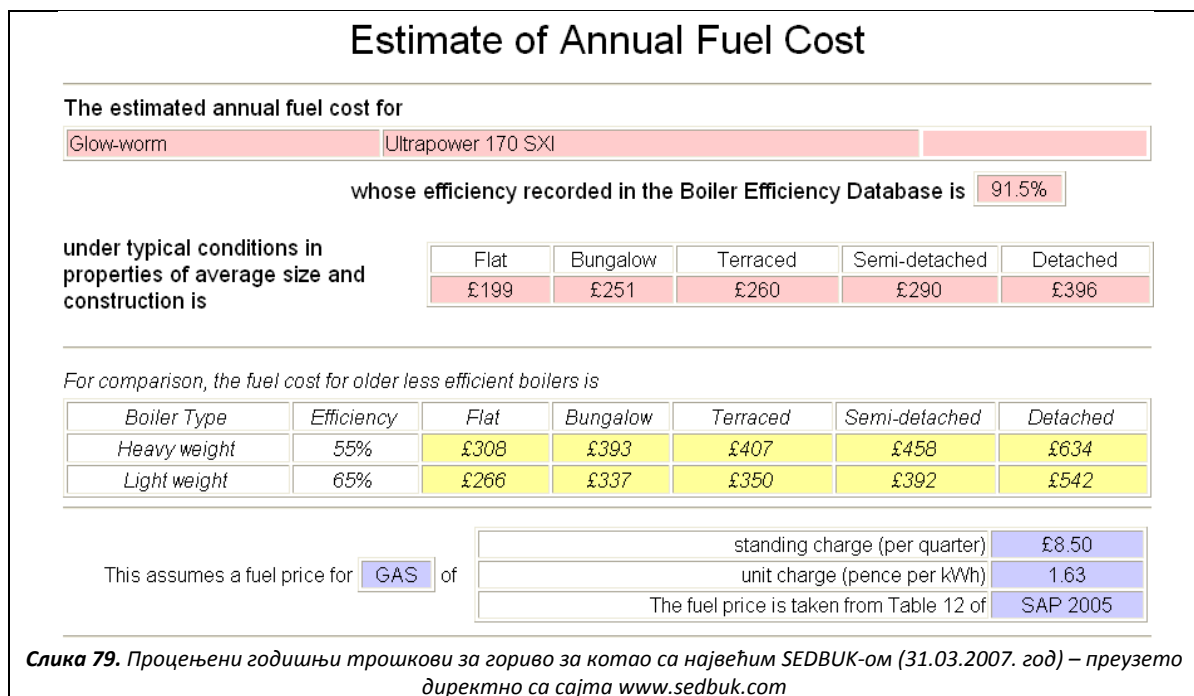
SAP seasonal efficiency: <b>91.5%</b>	Efficiency band: 
Efficiency category: SEDBUK Certified	SAP equation used: 106
<u>Estimate of Annual Fuel Cost</u>	
Power: modulating 24.3 - 24.3kW	
Main type: Combi: Mounting Floor, Condensing	Fuel: GAS Exposure: Indoor Flue: Room-sealed:Fan
Burner control: 180W Elec. power firing: Variable	Ignition: No Permanent Pilot Light Elec power not firing: 15W
Store volume: 120 Store loss: Excluded Store temperature: 62	Store type: Secondary Store heat loss: Insulation thickness: 50
Insulation type: Closest to Polyurethane Foam	

Слика 77. Детаљни подаци за најбоље рангиран котао по SEDBUK-у (Detail) – преузето директно са сајта [www.sedbuk.com](http://www.sedbuk.com)

Прегледно, преко 2000 котлова из базе SEDBUK је упоређено на основу сезонске ефикасности на слици 78.



За сваки котло је дата процена годишњих трошкова за гориво. За котло који је најефикаснији у бази ови подаци су дати на слици 79.



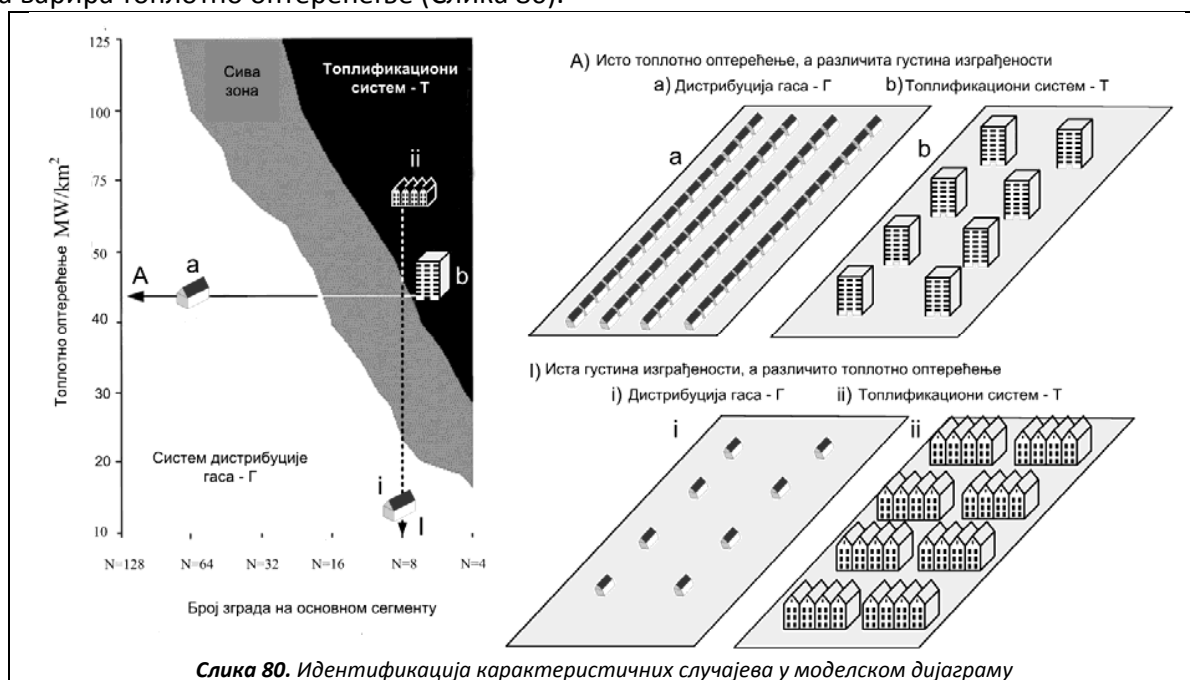
Сезонска ефикасност кућних гасних котлова је ефикасан параметар на основу кога може да се изврши њихово рангирање. Чињеница да је ово рангирање доступно широкој јавности доприноси како бољој информисаности купаца шта купују, тако и развијању здраве конкуренције на тржишту. Сваком произвођачу је стало да му производ буде што боље пласиран на овој листи. Овиме се произвођачи постичу да иновирају свој производни програм што доприноси побољшању енергетске ефикасности уопште, а

самим тиме и уштеди на гориву у апсолутном износу, што као индиректан ефекат има и еколошке предности.

Посебно је значајно да се на овај начин котлови класификују на основу стандардизоване методологије прорачуна са прописаним и верификованим улазним подацима, са прописаном излазном формом, као и на основу принципа добровољности.

Када се разматра ефикасност гасног котла у топлани, у овоме докторату није рађена тако детаљна анализа као када су у питању кућни гасни котлићи. Међутим узима се да је ефикасност котла у топлани отприлике иста као и ефикасност просечног кућног гасног котлића из базе SEDEBUK. На основу овога се узима да је за просечан стан, тј. условни стан у моделу, за задовољење грејних потреба потребно  $857 \text{ m}^3$  природног гаса. За обезбеђење исте количине у стану коришћењем топоводног система се узима да је потребна количина гаса око 10% већа, пошто постоје губици топлотне енергије од топлане до стана. Вондарчек и сарадници такође у свом чланку анализирају потребну количину гаса (Vondraček et al 2008). Годишња потрошња електричне енергије сведена на просечан стан који је топлифициран износи  $250 \text{ kWh}$ , и она се користи првенствено на покретање пумпи.

Пошто се моделском приступу показало да се трошкови у оба система разликују врло мало, и то нпр. само 5 €, и то за период трајања пројекта од 26 година, уводи се појам тзв. „сиве зоне“ трошкова у којој су оба система подједнако исплатива. Исто тако за једно фиксно топлотно оптерећење, у зависности од густине изграђености насеља може бити исплативији топовод, тј. гасовод. Исти је случај ако се узме фиксна густина изграђености, а варира топлотно оптерећење (Слика 80).



Слика 80. Идентификација карактеристичних случајева у моделском дијаграму

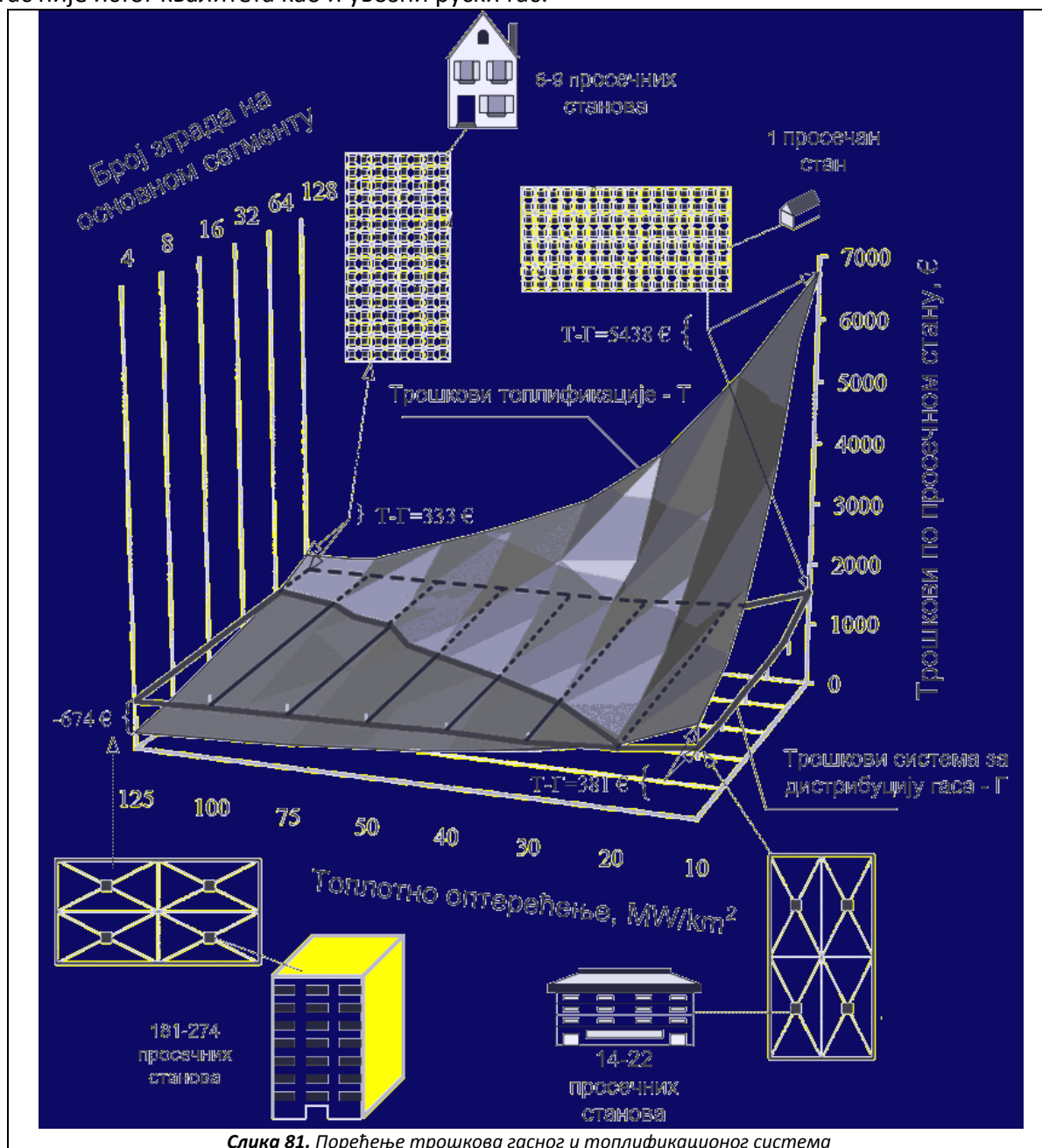
Уколико се поједино насеље налази даље од граничне линије у моделском дијаграму, то значи да је одлука о избору одређеног система грејања утемељенија. Промена цена или односа цена гаса у сваком од два разматрана система, као и цене њихових елемената, доводи до померања границе унутар моделског дијаграма. На пример границу може да помери административна одлука да се цена гаса коју користе нпр. топлана субвенционише у односу на цену гаса који се дистрибуира гасоводним системом за употребу у домаћинствима. Наравно, граница се у том случају помера само за предузеће које је власник топлане и које остварује профит у случају да се не субвенционише и цена по којој домаћинства плаћају топлотну енергију. Нпр. масовно увођење пластичних полиетиленских цеви у изградњу гасовода, фаворизује овај систем у односу на време када су се у оба система, како у гасоводном тако и у топоводном користиле челичне, тј. знатно скупље цеви. У детаљнијој анализи се може узети и цена утицаја појединог система на локалном или глобалном нивоу (Braniš et al 2007).

Након спроведене детаљне техно-економске анализе могуће је одредити који од два система је исплативији за дате урбанистичке параметре. Међутим добијени закључци су валидни само уколико постоје довољни капацитети у том конкретном систему који се показао као исплативији. Нпр. уколико се покаже да је топоводни систем повољнији за одређено насеље, може се десити да се накнадном анализом испостави да не постоје довољни капацитети у топлани при чему није предвиђено проширење њених капацитета из различитих разлога. Такође, може постојати приоритет за прикључење других насеља на топовод, нпр. прво оних ближих топлани, итд. У таквој ситуацији, логично је прикључити предметно насеље на гасовод, уколико се топлотно оптерећење насеља и густина изграђености у моделском дијаграму не налазе далеко од граничне линије. Уколико се налазе далеко од граничне линије, као нпр. уколико се у насељу налазе високе зграде које су уз то грађене без великог међусобног растојања, тада је могуће разматрати хибридно решење, као нпр. изградњу котларнице на гас у оквиру самог насеља. Овиме се преузимају све добре особине топлификације али и гасификације које постоје за случај датог насеља.

У моделу који је приказан, својства стварне урбане површине, као што су број зграда, величина зграда, њихов просторни распоред, квалитет изолације итд. су главни утицајни фактори за доношење одлуке о систему грејања на гас. Ово наравно важи ако су оба система грејања на гас расположиви унутар једног насеља. Моделски дијаграм може бити дат и у тродимензионалном облику при чему се пореде трошкови за све ситуације које могу да се јаве (Слика 81).

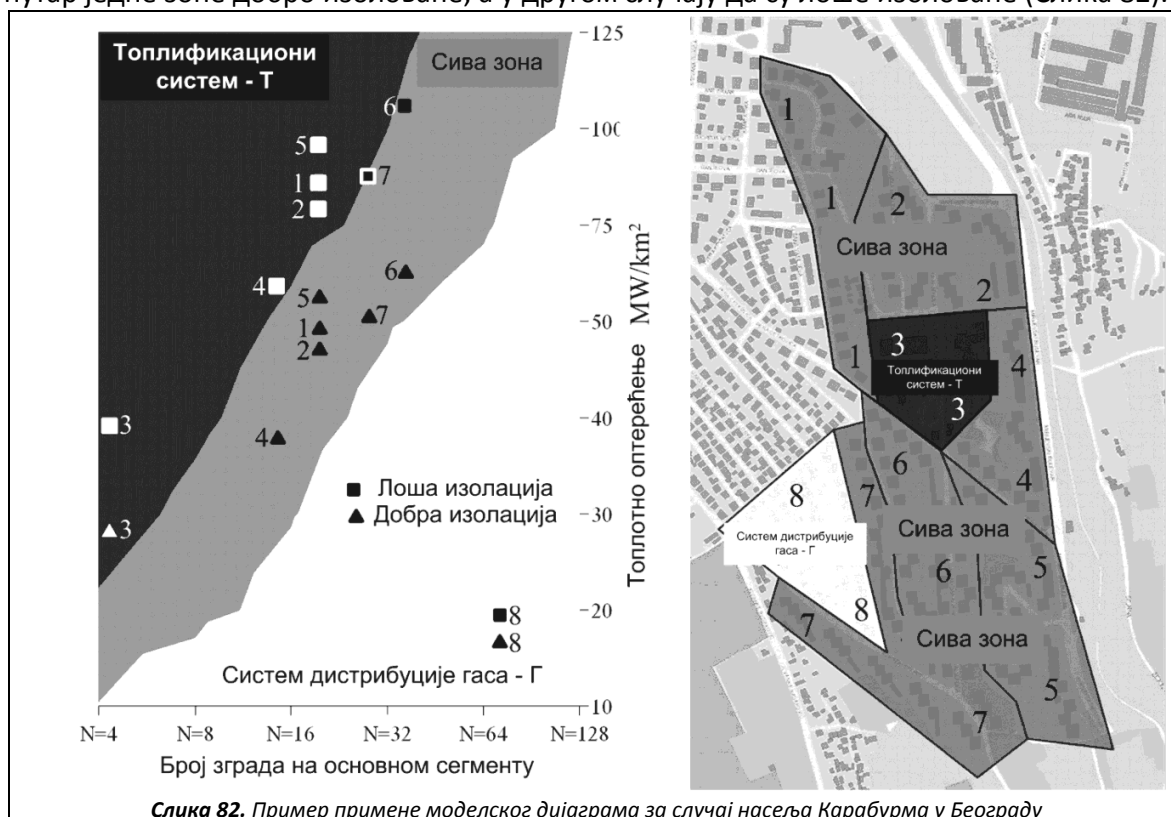
У Београду нпр. становници који остварују одређен вид социјалне помоћи добијају субвенцију и до 50% за цену грејања које се оствару даљинским системом из топлана. Највећи попуст, тј. 50% умањену цену плаћају и све породице које имају најмање једног члана који је учествовао у ратовима који су се водили на територији бивше Југославије током деведесетих година двадесетог века. Поред тога сви корисници грејања из топлана имају попуст од 5% уколико на време плате рачун. Тако да они који имају највеће попусте уз на време плаћен рачун имају чак 55% попушта на цену грејања. Овакве попусте нпр. не

уживају домаћинства која су директно прикључена на гасоводни систем. Овиме се директно ремети моделска равнотежа у случају Београда. Наравно, у моделу се узима исти стандард становања приликом коришћења оба система грејања. То је само донекле тачно пошто грејање из топлана често није задовољавајуће, док са друге стране квалитет гаса који се дистрибуира такође није увек задовољавајући посебно имајући у виду да домаћи гас није истог квалитета као и увозни руски гас.



Насеље Карабурма у Београду је коришћено за проверу модела. У насељу Карабурма је постоје расположиви капацитети у оба система, како у гасоводном, тако и у топоводном. Пошто у оквиру насеља постоје зоне са различитим урбанистичким карактеристикама,

тако да је у оквиру сваке зоне обухваћен исти тип зграда са истом густином изграђености (Слика 82). За сваку од зона може се израчунати топлотно оптерећење зоне које се своди на јединицу површине, и исто тако се и број зграда своди на површину основног урбанистичког сегмента. Такође све зграде су различитог квалитета изолације. Зграде са добрим и лошим квалитетом изолације су међусобно измешане тако да се у сваком случају рачуна топлотно оптерећење зграда за оба случаја, тј. сматра се да су све зграде унутар једне зоне добро изоловане, а у другом случају да су лоше изоловане (Слика 82).

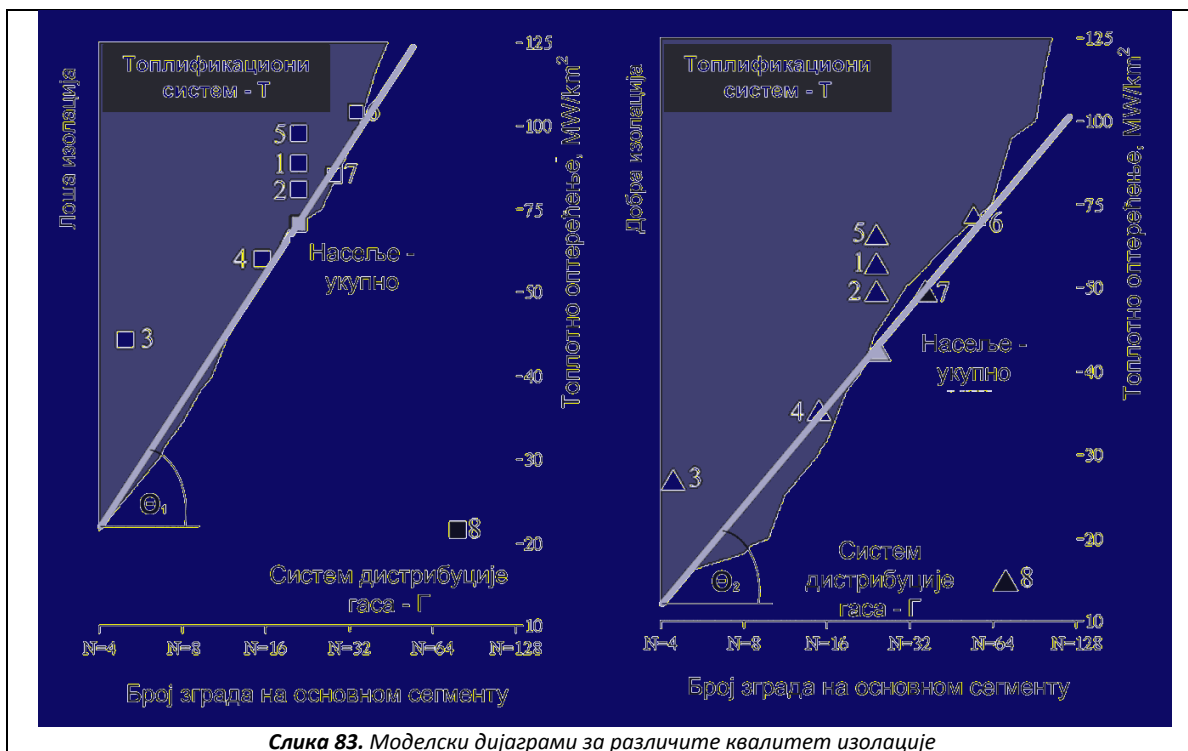


Слика 82. Пример примене моделског дијаграма за случај насеља Карабурма у Београду

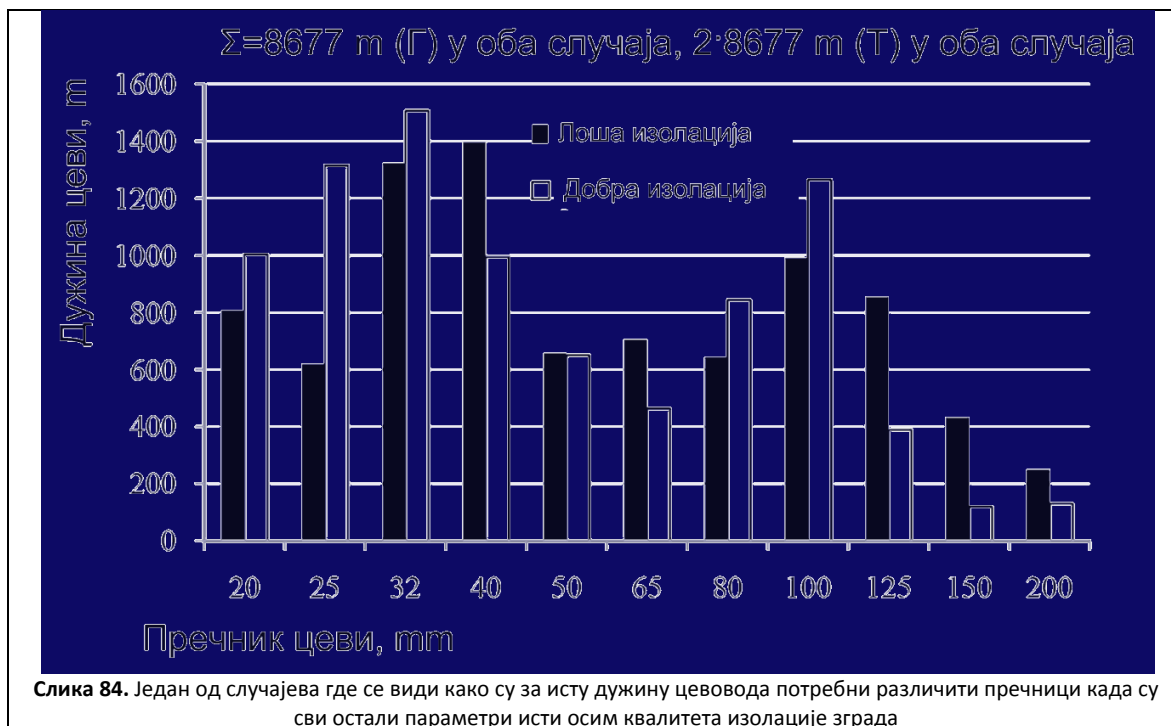
На сличну тему увођења одређених система се баве бројни радови од којих је назначајније поменути чланке Густафсона и Бојића (Gustafsson-Bojić 1997), Торциа и сарадника (Torchio et al 2008), Осебарда и сарадника (Ossebaard et al 2008), Ајдиналп-Коксала и Исмет-Угурсала (Aydinalp-Koksall-Ismet Ugursal 2008), Реидхава и Вернера (Reidhav-Werner 2008), Форсајес-Нилсона и сардника (Forsaeus-Nilsson et al 2008), Јовановића и сарадника (Jovanović et al 2009), Страхана и Фарела (Strachan-Farrell 2006), Хаберла и сарадника (Haberl et al 1998), итд.

Област која на моделском дијаграму припада гасоводном систему када је у питању лоша изолација, а топлификационом систему када је у питању добра изолација (Слика 83) представља тзв. сиву зону у којој су трошкови топлификације и гасификације скоро исти (Слика 82). Мала промена нагиба граничне линије (Слика 83) потиче отуда што постоји извесна промена пречника у структури цевовода када су у питању потпуно исти случајеви који се разликују само у квалитету изолације (Слика 84).





Слика 83. Моделски дијаграми за различите квалитет изолације

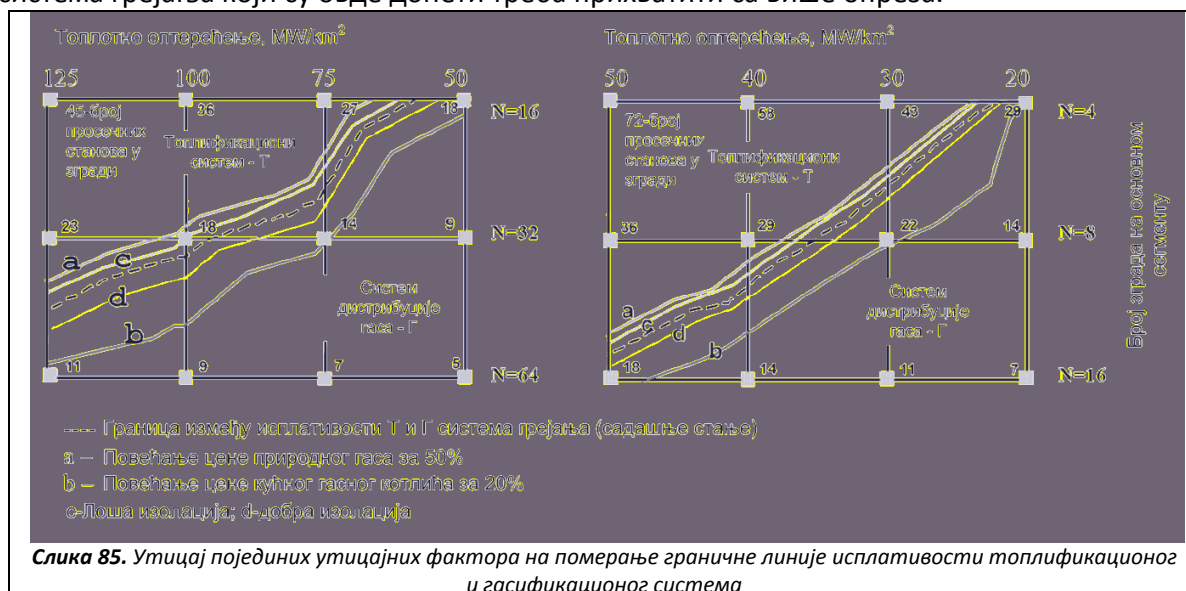


Слика 84. Један од случајева где се види како су за исту дужину цевовода потребни различити пречници када су сви остали параметри исти осим квалитета изолације зграда

Стварна урбана површина обележена бројем 8 у оквиру насеља Карабурма (Слика 82) се састоји од малих индивидуалних кућа које у просеку садрже по један просечан стан. Моделска анализа показује да је ове куће најбоље прикључити на гасификациони систем било да су добро или лоше топлотно изоловане. У оквиру насеља само ова зона показује



изразиту исплативост увођење гаса за коришћење директно у становима у односу на топлификацију. Напротив, зона 3 такође у оквиру насеља показује изразиту предност топлификације. У оквиру ове зоне су школа, обданиште, тржни центар, месна канцеларија, итд, тј. на врло малој површини се налазе зграде које имају велику грејну површину. Свака од тих зграда се рачуна као еквивалент стамбене зграде од 20 или више станова. У свим осталим зонама један од два понуђена система је инвестиционо скупљи за не више од 200 € по просечном стану што се не може узети као пресудно при доношењу одлуке о избору конкретних система. Неке илустрације о томе како утиче промена цене појединих елемената грејног система на померање граничне линије се дају на слици 85. Приказан је утицај промене цене гаса и промене цене гасног котлића на померање граничне линије. Треба напоменути да уколико постоје значајне површине које нису изграђене или које су покривене пољопривредним земљиштем, закључке о одабиру система грејања који су овде донети треба прихватити са више опреза.



Треба приметити да цевоводи имају пресудну улогу у доношењу одлуке о избору система грејања у овом моделском приступу. За сваку од шест приказаних густина изграђености (Слика 62) постоји различита дужина цевовода. Међутим када се посматра свака од ових густина изграђености посебно у случају различитог топлотног оптерећења иста је дужина цевовода у сваком случају са тиме да се пречници у саставу тог цевовода разликују. Уколико је топлотно оптерећење поједине зоне веће тада су потребни и већи пречници да би пропустили под истим условима већу количину гаса или топле воде. Такође уколико је изолација слабија веће су грејне потребе стана како би се остварили исти услови у стану као и у случају добре изолације, тако да су опет теоретски потребни већи пречници уколико су сви други параметри исти. Тако нпр. дужина цевовода има већи утицај на избор система у сеоским условима у поређењу са пречником цеви, док је у градским условима обрнуто, већи утицај на одабир система имају пречници цеви него сама дужина цевовода. На пример у нашим условима се сматра да је потпуно неисплативо увођење топлификације у сеоске средине, што показује и овде презентован модел. Међутим најновија Шведска истраживања показују да то није увек случај, већ да под одређеним

условима и топлификација у слабо насељеним областима може бити исплатива (Reidhav-Werner 2008, Forsaeus et al 2008). Да би ова топлификација била исплатива према овим шведским студијама, годишња потрошња топлотне енергије мора бити већа од 50 GJ по кући, док топлотно оптерећење по дужини цеви мора бити најмање 2 GJ/m. Ово је могуће постићи зато што држава фаворизује овај облик грејања разним погодностима у односу на систем коришћења природног гаса, течног горива или електричне енергије за подмиривање грејних потреба. Предност топлификације у слабо насељеним областима у државама где не постоји фаворизовање система даљинског грејања из топлана давањем различитих државних субвенција није могуће остварити.

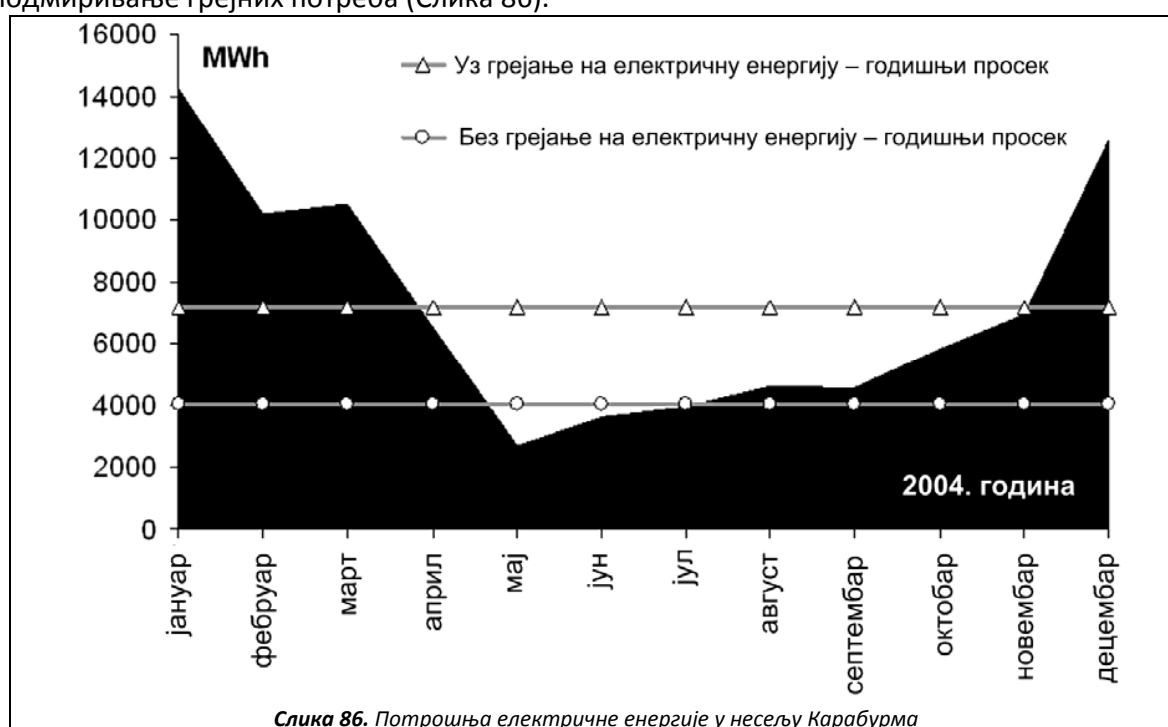
Граница исплативости система приказана у овом докторату је за садашње цене елемената система грејања и цене гаса у Србији. Ова граница се помера, тако да је у модел могуће унети и друге цене<sup>5</sup>.

У данашње време један град се може сматрати одрживим ако се у њему успостави равнотежа између економског и социо-културалног развоја са једне стране и заштите животне средине са друге стране при чему становништво мора узети активну улогу. Када се користи једна врста енергента у различитим системима грејања, при чему је у овом случају то природни гас, обично је утицај на загађење природне средине врло мали. Значајне разлике у примени топлификационог система се не могу јавити када се посматра шири регион али унутар самог насеља разлике могу бити значајне. Директна употреба природног гаса у самом домаћинству узрокује да највећу штету од локалног загађења трпи сам потрошач грејања. За разлику од овога, у топлификационом систему је извор загађења концентрисан у једној тачки тако да штету трпи шира друштвена заједница равномерно било да се греје преко те топлане или не. Укратко речено, код топлификације емисија штетних гасова је тачкаста али је имисија штетних гасова захватила већи простор, док је код гасификационог система емисија хомогена али се загађење мање више задржава на простору насеља у коме је емисија настала, тј. имисија је знатно ужа. Уопштено гледано, већи потрошач гаса је и већи загађивач. Треба ипак напоменути да је природни гас најприхватљивије фосилно гориво са аспекта очувања животне средине пошто се његовим сагоревањем испушта убедљиво најмања количина штетних гасова и честица по јединици ослобођене топлоте. Природни гас сагорева практично без чврстог остатка и са најмањом количином ослобођеног CO<sub>2</sub> у поређењу са свим осталим горивима, тако да природни гас ослобађа сагоревањем само 56 kg/GJ овога гаса што је посебно важно имајући у виду закључке Кјото протокола (Haberl et al 1998, Cowie et al 2007, Karlssona-Gustavsson 2003, Holmgren-Amiri 2007). Тореков и сарадници (Torekov et al 2007) налазе да се при грејању преко система топлификације у просеку ослободи 78–93 kg/MWh CO<sub>2</sub>, 0,1 kg/MWh NO<sub>x</sub>, 0,06 kg/MWh SO<sub>2</sub>. У случају гасоводног система са

<sup>5</sup> MS Excel датотека у којој је могуће ово урадити и пратити како се помера граница је доступна уз рад "Systematic approach to natural gas usage for domestic heating in urban areas" коју је објављен у водећем иностраном часопису "Energy" (Brkić-Tanasković 2008) из области енергетике и горива и коме се може приступити преко академске интернет мреже и система обједињене електронске набавке часописа КОБСОН, пошто је преко овог сервиса академска заједница Србије претплаћена на поменути часопис који у електронском облику излази у оквиру електронске базе Science Direct издавачке куће Elsevier

индивидуалним пећима ослободи се 205 kg/MWh CO<sub>2</sub>, 0,07 kg/MWh NO<sub>x</sub>, 0,001 kg/MWh SO<sub>2</sub>. Код грејања на природни гас ослободи се 559 kg/MWh CO<sub>2</sub>, 88 kg/MWh NO<sub>x</sub> и 44 kg/MWh SO<sub>2</sub>. У поређењу са електричном енергијом сваки испоручени MWh у виду природног гаса је јефтинији за око 61% (Karlssona-Gustavsson 2003). На основу овога и сличних разматрања се може проценити и цена која се плаћа за загађење животне средине у новчаном износу. Нпр. Јанг и сарадници (Yang et al 2008) у свом чланку дају резултате проучавања два различита централизована система грејања на животну средину у случају Канаде.

Главна предност која се остварују приликом инсталирања гасног дистрибутивног система или топлификационог система који ради на природни гас није у њиховој међусобној разлици у односу на различите урбанистичке параметре већ у супституцији далеко скупље електричне енергије која би се у том случају, а нарочито у великим зградама користила за подмиривање грејних потреба (Слика 86).

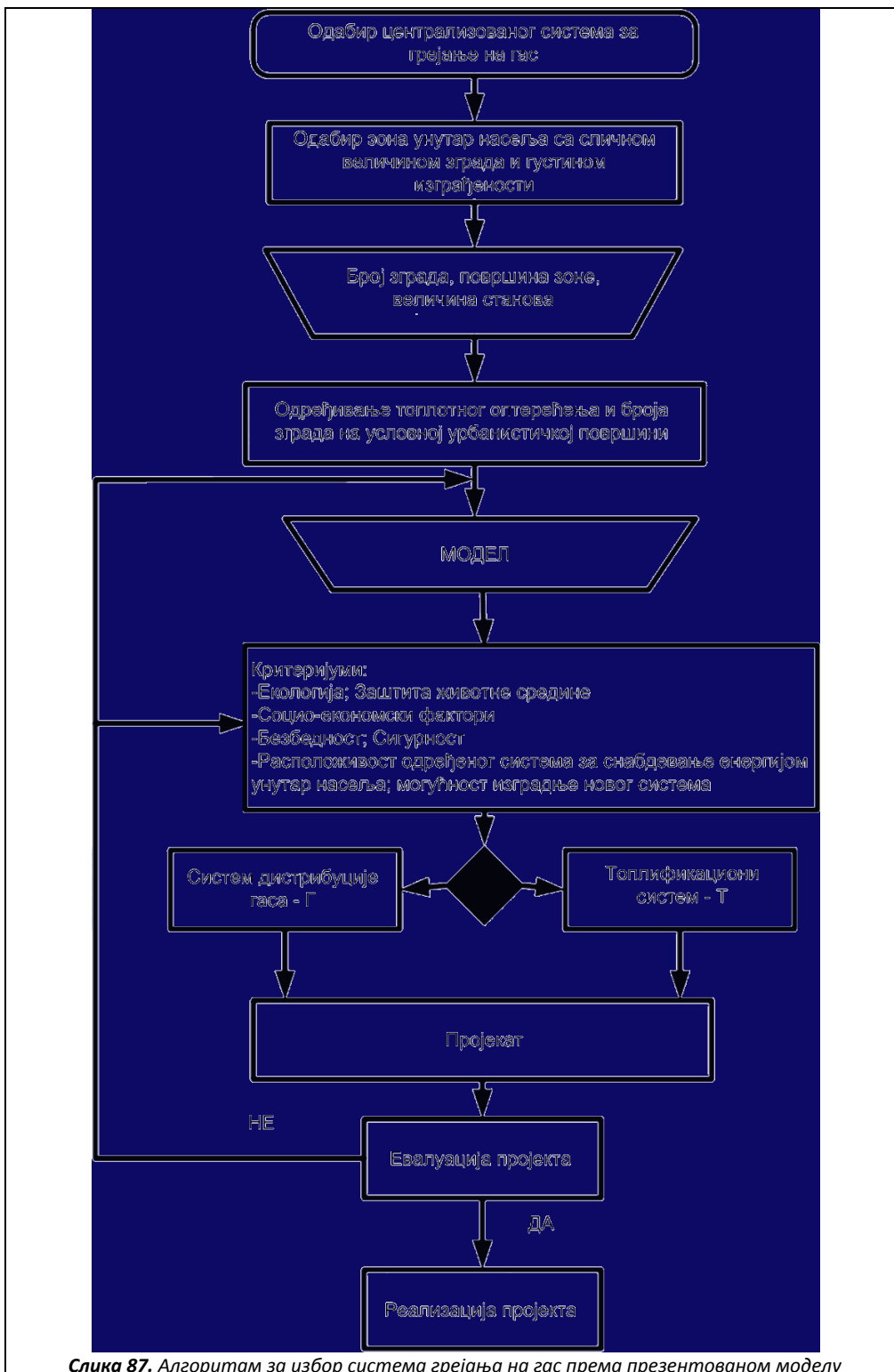


Слика 86. Потрошња електричне енергије у месецу Карабурма

Коришћење електричне енергије као најквалитетнијег облика енергије за подмиривање грејних потреба становништва се сматра најмање рационалним коришћењем овог племенитог вида енергије. И са еколошког гледишта грејање на електричну енергију је најскупљи облик грејања (Ford 2008, Jednak et al 2009, Morais-Marangon Lima 2007, Vodansky 1984).

У данашње време, дискусија у вези увођења топлификационих система није ретка у научној и стручној литератури (Lund et al 1999, de Almeida et al 2004, Knutsson et al 2006, Dotzauer 2003, Sundberg-Karlsson 2000, Gustavsson 2004a,b, Benonysson et al 1995, Gebremedhin-Moshfegh 2004, Barelli et al 2006, Larsen et al 2001).

Алгоритам за избор система грејања на гас према презентованом моделу се даје на слици 87.



Годишње повећање утрошка примарне енергије се процењује на 3% годишње на светском нивоу. Упоредо са том чињеницом, треба да недавно повећање цене природног гаса доводи неминовно до преиспитивања начина грејања који су се до сада користили у Европи. Наравно економија није једина која условљава преиспитивање одрживости досадашњих начина грејања. У том погледу све већу улогу игра и екологија. Највећи део енергије се данас троши на кување, грејање, осветљење и превоз роба и путника. Сама економска исплативост грејања директно на природни гас зависи од много фактора тако да закључци који се донесу на основу овде презентираниог модела не морају увек да буду и у потпуности валидни (Bouvy-Klaus 2007, Söderman-Pettersson 2006). Разматрајући данашње топлификационе системе, они су често мање енергетски ефикасни од савремених система за грејање на природни гас унутар самих домаћинстава помоћу кућних гасних котлића (овде се посебно мисли на ефикасне али и инвестиционе доста скупље кондензационе котлиће) (Rosa-Tosato 1990, Lazzarin-Schibuola 1986, Agrell-Bogetoft 2005). У моделском приступу у овој дисертацији је узет као референтан обичан, тј. просечан гасни котлић, међутим као улазни податак се може унети и цена било ког другог гасног котлића као и његова процењена потрошња за просечан стан на годишњем нивоу. Просечан котлић је узет као што је већ речено из базе SEDBUK. Ефикасност гасног котлића и топлане је у овом моделу изједначена. Типична ефикасност топлане на гас се може проценити и на основу чланка Лазарина и Нора (Lazzarin-Noro 2006), тако да се коришћени податак уклапа у границе које се дају у литератури.

## Ж. Закључци

У поглављу Б ове докторске дисертације су детаљно истражени хидраулички отпори који се јављају приликом протока природног гаса кроз цевоводе<sup>†</sup>. Поред хидрауличких отпора који се јављају приликом протока природног гаса, истраживањем су обухваћени и хидраулички отпори који се јављају и приликом протока течних флуида као што су вода и нафта, или и отпори који се јављају унутар вентилационих мрежа какве постоје у рудницима и зградама. За проблем истраживан у дисертацији је посебно интересантан тзв. хидраулички „глатким“ режим протока који се јавља при протоку природног гаса кроз полиетиленске цеви и прелазни, тј. „делимично“ турбулентни режим који се јавља приликом протока гаса кроз челичне цеви, али исто тако и приликом протока течних флуида. Посебно је проучавана Реноарова једначина за проток гаса, као и Колбрукова једначина за одређивање коефицијента хидрауличног отпора при протоку флуида. Реноарова једначина је данас незаобилазна када треба одредити пад притиска или проток у полиетиленским цевима кроз које протиче природни гас. Досада се ова једначина у домаћој пракси користила у различитим облицима, зависно од примењеног система јединица, тако да се осећала потреба прилагођења Реноарове једначине Међународном систему јединица (SI), што је у дисертацији урађено и испоштовано у прорачунима. Код Колбрукове једначине, проблем је нешто другачији имајући у виду да је ова једначина имплицитна у односу на коефицијент хидрауличног отпора. Колбрукова емпиријска релација је представљена трансцендентном једначином, односно једначином која не може бити изражена преко алгебарских функција у коначном облику. Дакле Колбрукова једначина може бити решена само са приближном тачношћу и то у итеративном поступку, као и преко апроксимативних формула коју су предложили бројни аутори. Међутим, Колбрукова једначина може бити трансформисана у експлицитан облик егзактно без било каквих апроксимација преко Ламберт W-функције. Ламберт W-функција је такође трансцендентна и не може се решити егзактно, већ као и Колбрукова једначина само приближно. У научној литератури се могу наћи делимично успеле трансформације Колбрукове релације у експлицитан облик применом Ламберт W-функције. Ове трансформације су делимично успешне само из разлога што бројне вредности за одређене чланове овако трансформисане једначине постају сувише велике или мале за велике вредности релативне храпавости и Рејнолдсовог броја да би биле записане чак и у регистре данашњих врло моћних рачунара. Егзактно математички трансформисана Колбрукова једначина у експлицитан облик, која је развијена у овом

<sup>†</sup> Објављени резултати из ове области у часописима реферерисаним на SCI листи су следећи:

-Dejan Brkić: Solution of the implicit Colebrook-White equation using Excel, Hydrocarbon Processing /на енглеском језику, прихваћен, у штампи/ (ISSN 0018-8190) (M23 – 3)

-Dejan Brkić: New reformulation of Colebrook-White equation for flow friction based on Lambert-W function, Hydrocarbon Processing /на енглеском језику, прихваћен, у штампи/ (ISSN 0018-8190) (M23 – 3)

-Dejan Brkić: Gas Distribution Network Hydraulic Problem from Practice, Petroleum Science and Technology /на енглеском језику, прихваћен, у штампи/ (Print ISSN: 1091-6466 Online ISSN: 1532-2459) (M23 – 3)

-Dejan Brkić: Comments on "Settling velocities of particulate systems 15: Velocities in turbulent Newtonian flows", International Journal of Mineral Processing 92 (3-4) pp. 201-202 (2009) doi: 10.1016/j.minpro.2009.03.010 /на енглеском језику/ (ISSN 0301-7516) (M25 – 1,5)

докторату, преко Ламберт  $W$ -функције, нема било каква ограничења у односу на полазну имплицитну Колбрукову једначину када су у питању вредности релативне храпавости и Рејнолдсовог броја. Пошто као што је већ речено не постоји начин да Ламберт  $W$ -функција буде егзактно решена у докторату је развијена апроксимација Колбрукове једначине на основу приближних решења Ламберт  $W$ -функције које нуде поједини аутори. Егзактно трансформисана имплицитна Колбрукова једначина у експлицитан облик помоћу Ламберт  $W$ -функције може бити лако приближно решена уз помоћ специјализованих математичких рачунарских програма где је ова функција позната под именом  $W$ ,  $ProductLog$  или сл.

Проблем протока гаса кроз цеви је нелинеаран пошто хидраулички отпор зависи од самог протока гаса. Код електричних кола, отпорност у колу је стална, односно не зависи од јачине струје која протиче кроз коло. Уколико би се успостављала аналогија протока гаса кроз цеви или уопштеније аналогија хидрауличких цевоводних мрежа са електричним колима, тада је најбоље хидрауличке мреже упоредити са електричним мрежама у којима су отпорници замењени диодама. Отпорност диоде зависи од струје која протиче кроз диоду. Проблем протока течног флуида кроз цеви је такође нелинеаран, тако да се и водоводи прстенастог типа морају прорачунавати итеративно.

Поглавље В се бави методама за пројектовање гасоводних мрежа прстенастог типа<sup>u</sup>. Због зависности хидрауличног отпора од самог протока, хидрауличке мреже су нелинеарни системи и стога се морају прорачунавати итеративним поступком. Поред добро познате Харди Крос методе и њених модификованих варијанти у пракси пројектовања гасоводних система нису превише заступљене друге побољшане методе како у Србији тако и свету. Све методе за прорачун цевоводних мрежа прстенастог типа су развијене првенствено за пројектовање водоводних или вентилационих система а тек накнадно су прилагођене за гасоводе. У данашње време просечан инжењер добро познаје расположиве програмске пакете који постоје на тржишту и који су специјализовани за пројектовање гасоводних мрежа прстенастог типа. У пракси инжењери првенствено препознају шта треба унети као улазни сет параметара за прорачун, као и шта се добија као излазни сет параметара који се касније интерпретира и анализира. Сама метода прорачуна гасоводних мрежа је данас стављена у други план пошто је она саставни део програмског пакета за пројектовање и као таква релативно незанимљива просечном инжењеру. У докторату је извршен одабир најбоље методе за пројектовање гасоводних мрежа прстенастог типа. Резултати овог дела доктората врло лако могу бити преточени у врло ефикасан програмски пакет. Поред детаљне анализе оригиналне верзије Харди Крос метода даје се и његова интерпретација у матричној форми. Увођењем матричне форме Харди Крос метод је побољшан попуњавањем празних места која постоје у главној матрици када се посматра матрична интерпретација оригиналне верзије Харди Крос метода. На овај начин је конвергенција оригиналног метода повећана у просеку за преко десет пута. Иако се ово побољшање

---

<sup>u</sup> Објављени резултати из ове области у часописима реферерисаним на SCI листи су следећи:  
-Dejan Brkić: An improvement of Hardy Cross method applied on looped spatial natural gas distribution networks, Applied Energy 86 (7-8) pp. 1290-1300 (2009) doi: 10.1016/j.apenergy.2008.10.005 /на енглеском језику/ (ISSN 0306-2619) (M22 – 5)

примењује већ у водоводним системима до данас је заживело у недовољној мери у пројектовању гасоводних мрежа. Ово побољшање је дефинитивно и успешно прилагођено за пројектовање гасоводних мрежа. Прилагођење је опште, пошто је развијено за просторне или тзв. вишедимензионе мреже какве су вентилационе мреже. Дата су детаљна правила за прорачун просторних мрежа која се директно могу применити и на раванске мреже. Као што је познато, било да се прорачун протока кроз цеви већ постојеће мреже врши оригиналним Харди Крос методом или његовом побољшаном варијантом, као резултат прорачуна у свакој појединачној итерацији се добија не сам проток који служи као улазни податак за следећу итерацију, већ тзв. поправка протока. Израчунату поправку протока треба у зависности од бројних параметара мреже, како стварних тако и у прорачуну претпостављених, алгебарски додати на проток прорачунат у претходној итерацији. У докторату је успешно разрешен овај проблем дефинисањем тачних и прецизних алгебарских правила која служе овој сврси. Алгебарска правила су описана елементима Булове алгебре на основу којих су конструисана фиктивна логичка кола која управо служе за одабир знака поправног протока. Даљи искорак је направљен тиме што се матрица чворова и матрица петљи уводи у сам метод. Матрица чворова код свих варијанти Харди Крос метода, односно боље речено код свих методи које су засноване на решавању једначина петљи, служи само за проверу тачности прорачуна. Овако уведене матрице служе за сам прорачун, а сам метод се сада може назвати обједињеним методом чворова и петљи. Главна предност овог метода је што се као резултат прорачуна у свакој итерацији добија сам проток а не његова поправка чиме се избегава примена сложених правила за одабир алгебарског знака. Применом овога метода се постиже боља конвергенција чак и у поређењу са модификованим Харди Крос методом који се до сада посматрао као еталон за прихватљивост брзине конвергенције. У уобичајеном приступу који се користи при прорачуну хидрауличких мрежа каква је и гасоводна мрежа, обично се претпоставља прва расподела флуида која мора да задовољи први Кирхофов закон. Овај закон мора увек, у свакој итерацији бити задовољен, док други мора бити задовољен са одређеном тачношћу на крају прорачуна. У докторату се разрешава и обрнут случај, односно даје се метод чворова код кога услов по другом Кирхофовом закону мора бити задовољен у свакој итерацији, а услов по првом Кирхофовом закону на крају прорачуна. Метода чворова, и то њена побољшана варијанта чије је побољшање урађено по аналогији са побољшаном Харди Кросовом методом показује уопштено спорију конвергенцију од метода прстенова. У методе прстенова се убрајају како оригинална Харди Крос метода, тако и побољшана, односно модификована Харди Крос метода, али и обједињена метода чворова и прстенова. Аналогно претходном следећи логичан корак је успостављање тзв. обједињене методе прстенова и чворова која би припадала методи чворова и која би била еквивалент обједињене методе чворова и прстенова која као што је речено припада тзв. групи метода петљи. Поред класичног проблема код кога се у задатој мрежи прорачунавају протоци по гранама мреже, у дисертацији се успешно уводи и решење оптимизационог проблема, тиме што за фиксирани проток врши прорачун оптималног пречника цеви, који се заснива на тзв. „оптимизирајућој“ брзини која се као појам уводи у докторату.



У оквиру овога дела који се даје у поглављу В успешно се разрешава питање излагања оптималних параметара за употребу природног гаса у циљу задовољавања грејних потреба домаћинстава у урбаним условима становања<sup>у</sup>. Као што је познато, природни гас за потребе грејања може да се користи применом два типа централизованих система, односно путем дистрибуције самог гаса домаћинствима посредством цевоводног дистрибуционог система, тј. директно или снабдевањем топлане гасом при чему се испоручује топлотна енергија домаћинствима, тј. применом индиректног система. У докторату се анализирају различите опције грајања у оквиру самог стана применом директног система грејања на гас при чему су анализирани опције са различитим типовима гасних котлића уз посебан осврт на примену кондензационе технике. Анализа која се у докторату спроводи показује да топлификациони систем има предност у насељима са малом густином изграђености, али са великим зградама (подразумева се да топлана ради на гас), као и да систем дистрибуције гаса за домаћинства има предност у насељима са великом густином изграђености али са малим зградама (индивидуалним кућама). Главни резултати овога дела доктората, су важећи за одређене економске полазне величине које су биле актуелне у тренутку анализе:

- уколико је просечна изграђеност насеља око 4 зграде на 5 хектара (0,05 km<sup>2</sup>) топлификациони систем има предност над системом за дистрибуцију природног гаса уколико у зградама има више од 29 просечних, тј. условних станова од 60 m<sup>2</sup>, односно у случају да је грејна површина већа од 1740 m<sup>2</sup>, односно уколико је дужина цевовода (тј. гасовода или топловода) испод 8 m сведено на просечан стан.
- уколико је просечна изграђеност насеља око 8 зграда на 5 хектара (0,05 km<sup>2</sup>) топлификациони систем има предност над системом за дистрибуцију природног гаса уколико у зградама има више од 22 просечних, тј. условних станова од 60 m<sup>2</sup>, односно у случају да је грејна површина већа од 1320 m<sup>2</sup>, односно уколико је дужина цевовода (тј. гасовода или топловода) испод 7,6 m сведено на просечан стан.
- уколико је просечна изграђеност насеља око 16 зграда на 5 хектара (0,05 km<sup>2</sup>) топлификациони систем има предност над системом за дистрибуцију природног гаса уколико у зградама има више од 18 просечних, тј. условних станова од 60 m<sup>2</sup>, односно у случају да је грејна површина већа од 1080 m<sup>2</sup>, односно уколико је дужина цевовода (тј. гасовода или топловода) испод 7 m сведено на просечан стан.
- уколико је просечна изграђеност насеља око 32 зграде на 5 хектара (0,05 km<sup>2</sup>) топлификациони систем има предност над системом за дистрибуцију природног гаса уколико у зградама има више од 15 просечних, тј. условних станова од 60 m<sup>2</sup>,

---

<sup>у</sup> Објављени резултати из ове области у часописима реферерисаним на SCI листи су следећи:

-Dejan Brkić, Toma Tanasković: Systematic approach to natural gas usage for domestic heating in urban areas, Energy 33 (12) pp. 1738-1753 (2008) doi: 10.1016/j.energy.2008.08.009 /на енглеском језику/ (ISSN 0360-5442) (M21 – 8)

-Dejan Brkić: Serbian gas sector in the spotlight of oil and gas agreement with Russia, Energy Policy 37 (5) pp. 1925-1938 (2009) doi: 10.1016/j.enpol.2009.01.031 /на енглеском језику/ (ISSN 0301-4215) (M21 – 8)

-Dejan Brkić: Transportation: Serbian, Russian pipeline accord enhances European gas security, Oil & Gas Journal 106 (48) pp. 52-54 (2008) /на енглеском језику/ (ISSN 0030-1388) (M23 – 3)

односно у случају да је грејна површина већа од  $900 \text{ m}^2$ , односно уколико је дужина цевовода (тј. гасовода или топловода) испод 6,4 m сведено на просечан стан.

- уколико је просечна изграђеност насеља око 64 зграде на 5 хектара ( $0,05 \text{ km}^2$ ) топлификациони систем има предност над системом за дистрибуцију природног гаса уколико у зградама има више од 12 просечних, тј. условних станова од  $60 \text{ m}^2$ , односно у случају да је грејна површина већа од  $720 \text{ m}^2$ , односно уколико је дужина цевовода (тј. гасовода или топловода) испод 5,8 m сведено на просечан стан.
- уколико је просечна изграђеност насеља око 128 зграда тада систем за дистрибуцију гаса домаћинствима има увек предност.

## Литература

1. Абрамов, Н.Н. 1974. *Снабдевање водом становништва, индустрије и пољопривреде*. Грађевинска књига, Београд. (на српском)
2. Abdolahi, F., Mesbah, A., Boozarjomehry, R.B., Svrcek, W.Y. 2007. *The effect of major parameters on simulation results of gas pipelines*. International Journal of Mechanical Sciences 49(8), 989–1000. (на енглеском)
3. Afzal, N. 2007. *Friction factor directly from transitional roughness in a turbulent pipe flow*. Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME 129(10), 1255-1267. (на енглеском)
4. Afzal, N., Seena, A., Bushra, A. 2007. *Power law velocity profile in fully developed turbulent pipe and channel flows*. Journal of Hydraulic Engineering ASCE 133(9), 1080-1086. (на енглеском)
5. Agrell, J., Bogetoft, P. 2005. *Economic and environmental efficiency of district heating plants*. Energy Policy 33(10), 1351–1362. (на енглеском)
6. AGFW-Arbeitsgemeinschaft Fernwärme. Pluralistische Wärmeversorgung-Zeithorizont 2005, 2020 (Vorstudie, Hauptstudie). See also: [www.agfw.de/86.0.html](http://www.agfw.de/86.0.html) (на немачком)
7. Ahuja, R.K., Magnanti, Thomas, L., Orlin, J.B., 1991. *Some recent advances in network flows*. SIAM Review 33(2), 175–219. (на енглеском)
8. Arsene, C.T.C., Bargiela, A., Al-Dabass, D. 2004. *Modelling and simulation of water systems based on loop equations*. International journal of simulation: Systems, science & technology 5(1-2), 61–72. (на енглеском)
9. Allen, J.J., Shockling, M.A., Kunkel, G.J., Smits, A.J. 2007. *Turbulent flow in smooth and rough pipes*. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 365(1852), 699-714. (на енглеском)
10. Altman, T., Boulos, P.F., 1995. *Convergence of Newton method nonlinear network analysis*. Mathematical and Computer Modelling 21(4), 35–41. (на енглеском)
11. Andriyashev, M.M. 1964. *Hydraulics calculation of water distribution networks*. Stroizdat, Moscow (на руском)
12. Aydinalp-Koksal, M., Ismet Ugursal, V. 2008. *Comparison of neural network, conditional demand analysis, and engineering approaches for modeling end-use energy consumption in the residential sector*. Applied Energy 85(4), 271–296. (на енглеском)
13. Aynsley, R.M. 1997. *A resistance approach to analysis of natural ventilation airflow networks*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics 67-68, 711-719 (на енглеском)
14. Aziz, Khalid, Ouyang, Liang-Biao. 1995. *Simplified equation predicts gas flow rate, pressure drop*. Oil and Gas Journal 93(19), 70-71. (на енглеском)
15. Barenblatt, G.I., Chorin, A.J., Prostokishin, V.M. 1997. *Scaling laws for fully developed turbulent flow in pipes*. Applied Mechanics Reviews 50(7), 413-429. (на енглеском)
16. Barelli, L., Bidini, G., Pinchi, E.M. 2006. *Implementation of a cogenerative district heating: optimization of a simulation model for the thermal power demand*. Energy & Buildings 38(12), 1434–1442. (на енглеском)

17. Barr, D.I.H. 1981. *Solutions of the Colebrook-White function for resistance to uniform turbulent flow*. Proceedings of the Institution of Civil Engineers 71(2), 529–536. (на английском)
18. Barry, D.A., Parlange, J.-Y., Crapper, M. 1999. *Approximations for the Hantush M function*. Journal of Hydrology 221(1-2), 91-96. (на английском)
19. Barry, D.A., Parlange, J.-Y., Li, L., Prommer, H., Cunningham, C.J., Stagnitti, F. 2000. *Analytical approximations for real values of the Lambert W-function*. Mathematics and Computers in Simulation 53(1-2), 95-103. (на английском)
20. Barry, D.A., Parlange, J.-Y., Li, L., Prommer, H., Cunningham, C.J., Stagnitti, F. 2002. *Erratum: Analytical approximations for real values of the Lambert W-function (Mathematics and Computers in Simulation (2000) 53 (95-103): S0378475400001725)*. Mathematics and Computers in Simulation 59(6), 543. (на английском)
21. Barry, D.A., Parlange, J.-Y., Sander, G.C., Sivaplan, M. 1993. *A class of exact solutions for Richards' equation*. Journal of Hydrology 142(1-4), 29-46. (на английском)
22. Barry, J.D. 2008. *Eliminate iteration from flow problems*. Chemical Engineering Progress 104(3), 36-41. (на английском)
23. Basha, H.A., Kassab, B.G. 1996. *Analysis of water distribution systems using a perturbation method*. Applied Mathematical Modelling 20(4), 290–297. (на английском)
24. Benonysson, A., Bohm, B., Ravn, H.F. 1995. *Operational optimization in a district heating system*. Energy Conversion & Management 36(5), 297–314. (на английском)
25. Bhave, P.R., Gupta, R. 2004. *Optimal design of water distribution networks for fuzzy demands*. Civil Engineering and Environmental Systems 21(4), 229-245. (на английском)
26. Blasius, H. 1913. *Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten*. Forschungs-Arbeit des Ingenieur-Wesens 131. (на немецком)
27. Bodansky, D. 1984. *Electricity and natural gas use for residential space heating: U.S. experience, 1976–1980*. Energy 9(4), 303–313. (на английском)
28. Bojić, M., Despotović, M., 2007. *Influence of duration of thermal comfort provision on heating behavior buildings*. Energy Convers Manage 48(8), 2416–2423. (на английском)
29. Bombardelli, F.A., Garcia, M.H. 2003. *Hydraulic design of large-diameter pipes*. Journal of Hydraulic Engineering 129(11), 839-846. (на английском)
30. Boulos, P.F., Lansey, K.E., Karney, B.W. 2006. *Comprehensive water distribution systems analysis handbook for engineers and planners*. MWH Soft Inc, Hardback. (на английском)
31. Bouvy, C., Klaus, L. 2007. *Multicriterial optimisation of communal energy supply concepts*. Energy Conversion & Management 48(11), 2827–2835. (на английском)
32. Boyd, J.P. 1998. *Global approximations to the principal real-valued branch of the Lambert W-function*. Applied Mathematics Letters 11(6), 27-31. (на английском)
33. Braniš, M., Domasova, M., Rezačova, P. 2007. *Particulate air pollution in a small settlement: the effect of local heating*. Applied Geochemistry 22(6), 1255–1264. (на английском)
34. Branislavljevic, N., Ivetic, M. 2006. *Fuzzy approach in the uncertainty analysis of the water distribution network of Becej*. Civil Engineering and Environmental Systems 23(3), 221-236. (на английском)

35. Бркић, Д. 2005а. *Дијагностиковање проблема насталих при прорачуну прстенасте гасне дистрибутивне мреже ниског притиска*. Техничка дијагностика 4(2), 11-16. (на српском)
36. Бркић, Д. 2005b. *Пројектовање посебне класе гасних дистрибутивних мрежа*. Истраживања и пројектовања за привреду ИИПП, 9, 49-56. (на српском)
37. Бркић, Д. 2005c. *Критеријуми за прекид итеративног поступка при прорачуну гасне дистрибутивне мреже са прстеновима*. Техничка дијагностика 4(3-4), 71-75. (на српском)
38. Бркић, Д. 2005d. *Одређивање граничних параметара употребе природног гаса у Београду*. Рударско-геолошки факултет, Магистарски рад, Београд.
39. Бркић, Д., Ђајић, Н. 2005. *Повећање тачности при прорачуну гасне дистрибутивне мреже Харди-Крос методом*. XXXII Сум-Ор-Is стр: 187-190. (на српском)
40. Бркић, Д., 2006. *Природни гас као гориво за грејање*. Задужбина Андрејевић, Београд. (на српском)
41. Бркић, Д. 2007а. *Варијанте индиректне и директне употребе природног гаса за грејање станова*. Техничка дијагностика 6(3), 41-48. (на српском)
42. Бркић, Д. 2007b. *Провера модела условних површина грејања на гас у насељима*. Техничка дијагностика 6(4), 39-44. (на српском)
43. Бркић, Д., Танасковић, Т. 2007. *Поређење гасних котлова у домаћинствима на основу сезонске ефикасности*. XXXIV Сум-Ор-Is стр: 167-170. (на српском)
44. Brkić, D. 2008. *Natural gas heating in Serbian settlements according to urbanity parameters*. FACTA UNIVERSITATIS Series: Architecture and Civil Engineering 6 (1), 139-153. (на енглеском)
45. Brkić, D., Tanasković, T., 2008. *Systematic approach to natural gas usage for domestic heating in urban areas*. Energy 1738-1753. (на енглеском)
46. Бркић, Д., Танасковић, Т. 2008. *Унапређење методе контура прилагођене за прорачун гасних дистрибутивних мрежа*. XXXV Сум-Ор-Is стр: 97-100. (на српском)
47. Бркић, Д. 2008а. *Прилог пројектовања гасних дистрибуционих мрежа*. Истраживања и пројектовања за привреду-ИИПП 22, 7-18. (на српском)
48. Brkić, D. 2008b. *Nonlinear-programming offers way to optimize looped pipeline network analysis – one improved method*. Nonlinear Systems and Optimization Techniques, научни скуп у организацији ЦАНУ, Будва, /in press/ (на енглеском)
49. Brkić, D. 2008c. *Transportation: Serbian, Russian pipeline accord enhances European gas security*. Oil & Gas Journal 106 (48) 52-54. (на енглеском)
50. Brkić, D. 2009a. *Solution of the implicit Colebrook-White equation using Excel*. Hydrocarbon Processing /in press/ (на енглеском)
51. Brkić, D. 2009b. *Comments on "Settling velocities of particulate systems 15: Velocities in turbulent Newtonian flows"*. International Journal of Mineral Processing 92(3-4) 201-202 (на енглеском)
52. Brkić, D. 2009c. *New reformulation of Colebrook-White equation for flow friction based on Lambert-W function*. Hydrocarbon Processing /in press/ (на енглеском)
53. Бркић, Д. 2009d. *Примена Ламберт-*W* функције за прорачун отпора трења у цевима*. Водопривреда /in press/ (на српском)

54. Brkić, D. 2009e. *Lambert W function in hydraulics problems*. MICOM (2009) Ohrid, MASSEE International Congress on Mathematics, Organized by Mathematical Society of South-Eastern Europe and Union of Mathematicians of Macedonia, 16–20 September /in press/ (на енглеском)
55. Brkić, D. 2009f. *An improvement of Hardy Cross method applied on looped spatial natural gas distribution networks*. Applied Energy 86(7-8), 1290-1300. (на енглеском)
56. Brkić, D. 2009g. *Similarities and Differences in Optimization of Water- and Gas-Distribution Pipeline Networks*, Dubrovnik Conference on Sustainable Development of Energy, Water and Environment Systems (2009) научни скуп у организацији UNESCO (United Nation Education, Science and Culture Organization) и TWAS (Third World Academy of Science), Дубровник, Хрватска, 29. септембар-4. октобар 2009, уредници: Звонимир Гузовић, Невен Дуић, Марко Бан (ISBN 978-953-6313-98-3, CIP catalogue for this book is available from the National and University Library in Zagreb under 715548, Book of Abstracts ISBN 978-953-6313-97-6, a CIP catalogue for this book is available from the National and University Library in Zagreb under 715546) (на енглеском)
57. Brkić, D. 2009h. *Gas distribution network topology problem*, MICOM (2009) Ohrid, MASSEE International Congress on Mathematics, Organized by Mathematical Society of South-Eastern Europe and Union of Mathematicians of Macedonia, 16–20 September /in press/ (на енглеском)
58. Brkić, D. 2009i. *Gas distribution network hydraulic problem from practice*, Petroleum Science and Technology /in press/ (на енглеском)
59. Brkić, D. 2009. *Serbian gas sector in the spotlight of oil and gas agreement with Russia*. Energy Policy 37 (5) 1925-1938. (на енглеском)
60. Бркић, Д., Танасковић, Т. 2009. *Прорачун расподеле протока у прстенастој цевоводној мрежи обједињеном методом чворова и прстенова*. XXXVI Sym-Op-Is /in press/ (на српском)
61. Brown, G.O. 2002a. *Henry Darcy and the making of a law*. Water Resources Research 38(7), 111-1112. (на енглеском)
62. Brown, G.O. 2002b. *The history of the Darcy-Weisbach equation for pipe flow resistance*. Proceedings of the Environmental and Water Resources History 34-43. /available in open access/ (на енглеском)
63. Buzzelli, D. 2008. *Calculating friction in one step*. Machine Design 80(12), 54-55. (на енглеском)
64. Caillol, J.M. 2003. *Some applications of the Lambert W function to classical statistical mechanics*. Journal of Physics A: Mathematical and General 36(42), 10431–10442. (на енглеском)
65. Calzetta, E. 2009. *Friction factor for turbulent flow in rough pipes from Heisenberg's closure hypothesis*. <http://arxiv.org/abs/0901.0255v1> (на енглеском)
66. Ceylan, K., Kelbaliyev, G. 2003. *The roughness effects on friction and heat transfer in the fully developed turbulent flow in pipes*. Applied Thermal Engineering 23(5), 557-570. (на енглеском)
67. Chen, N.H. 1979. *An explicit equation for friction factor in pipe*. Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals 18(3), 296–297. (на енглеском)

68. Chen, N.H. 1980. *Comments on "An explicit equation for friction factor in pipes"*. Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals 19(2), 229–230. (на енглеском)
69. Chenoweth, H., Crawford, C. 1974. *Pipe network analysis*. Journal of American Water Works Association 66, 55–8. (на енглеском)
70. Churchill, S.W. 1977. *Friction-factor equation spans all fluid flow regimes*. Chemical Engineering 84(24), 91–92. (на енглеском)
71. Churchill, S.W. 2000. *The art of correlation*. Industrial and Engineering Chemistry Research 39(6), 1850-1877. (на енглеском)
72. Churchill, S.W., Zajic, S.C. 2002. *Prediction of fully developed turbulent convection with minimal explicit empiricism*. AIChE Journal 48(5), 927-940. (на енглеском)
73. Chiplunkar, A.V., Mehndiratta, S.L., Khanna, P. 1990. *Analysis of looped water distribution networks*. Environmental Software 5(4), 202–6. (на енглеском)
74. Cipra, B. 1996. *A new theory of turbulence causes a stir among experts*. Science 272(5264), 951. (на енглеском)
75. Clamond, D. 2009. *Efficient resolution of the Colebrook equation*. Industrial and Engineering Chemistry Research 48(7), 3665–3671. (на енглеском)
76. Coelho, P.M., Pinho, C. 2007. *Considerations about equations for steady state flow in natural gas pipelines*. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering 29(3), 262-273. (на енглеском)
77. Colebrook, C.F., White, C.M. 1937. *Experiments with fluid friction in roughened pipes*. Proceedings of the Royal Society A161(906), 367-381. (на енглеском)
78. Colebrook, C.F. 1939. *Turbulent flow in pipes with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws*. Journal of the Institution of Civil Engineers (London), 11(4), 133-156. (на енглеском)
79. Colin, E., Etienne, S., Pelletier, D., Borggaard, J. 2005. *Application of a sensitivity equation method to turbulent flows with heat transfer*. International Journal of Thermal Sciences 44(11), 1024-1038. (на енглеском)
80. Collins, M., Cooper, L., Helgason, R., Kenningtonf, J., Leblanc, L. 1978. *Solving the pipe network analysis problem using optimization techniques*. Management Science 24(7):747–760. (на енглеском)
81. Collins, A.G., Johnson, R.L., 1975. *Finite-element method for water distribution networks*. Journal of American Water Works Association 67(7), 385–389. (на енглеском)
82. Concha F., 2008. *Settling velocities of particulate systems 15: Velocities in turbulent Newtonian flows*. International Journal of Mineral Processing 88(3-4), 89-93. (на енглеском)
83. Cordero, G.O. 2008. *An improved experimental correlation for Darcy friction factor*. Hydrocarbon Processing 87(7), 97-99. (на енглеском)
84. Corfield, G., Hunt, B.E., Ott, R.J., Binder, G.P., Vandaveer, F.E. 1974. *Distribution design for increased demand*. In: Segeler, CG. editor. Gas Engineers Handbook. New York: Industrial Press; 63–83 [chapter 9]. (на енглеском)
85. Corless, R.M., Gonnet, G.H., Hare, D.E.G., Jeffrey, D.J., Knuth, D.E. 1996. *On the Lambert W function*. Advances in Computational Mathematics 5(4), 329-359. (на енглеском)
86. Cross, H. 1930. *Analysis of continuous frames by distributing fixed moments*. Proceedings of the ASCE 57, 919–928. (на енглеском)

87. Cross, H. 1932. *Analysis of continuous frames by distributing fixed moments*. Transactions of the ASCE 96, 1–10. (на английском)
88. Cross, H. 1936. *Analysis of flow in networks of conduits or conductors*. University of Illinois Engineering Experimental Station Bulletin 286, 34(22), 3–29. (на английском)
89. Cowie, A.L., Kirschbaum, M.U.F., Ward, M. 2007. *Options for including all lands in a future greenhouse gas accounting framework*. Environmental Science & Policy 10(4), 306–321. (на английском)
90. Dan Bai, Pei-Jun Yang, Li-Xun Song. 2007. *Optimal design method of looped water distribution network*. Systems Engineering - Theory & Practice (English version of Chinese journal) 27(7), 137–143. (на английском)
91. Datta, A.B., Majumdar, A.K. 1980. *Flow distribution in parallel and reverse flow manifolds*. International Journal of Heat and Fluid Flow 2(4), 253–262. (на английском)
92. Darcy, H. 1857. *Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux*. Mallet-Bachelier, Paris. (на французском)
93. deAlmeida, A.T., Lopes, A.C., Carvalho, A., Mariano, J., Jahn, A., Broege, M. 2004. *Examining the potential of natural gas demand-side measures to benefit customers, the distribution utility, and the environment: two case studies from Europe*. Energy 29(7), 979–1000. (на английском)
94. Dinca, C., Badea, A., Rousseaux, P., Apostol, T. 2007. *A multi-criteria approach to evaluate the natural gas energy systems*. Energy Policy 35(11), 5754–5765. (на английском)
95. Djordjević, S., Prodanović, D., Walters, G.A. 2004. *Simulation of transcritical flow in pipe/channel networks*. Journal of Hydraulic Engineering ASCE 130(12), 1167-1178. (на английском)
96. Douthitt, R.A. 1989. *An economic analysis of the demand for residential space heating fuel in Canada*. Energy 14(4), 187–197. (на английском)
97. Dotzauer, E. *Experiences in mid-term planning of district heating systems*. Energy 28(15), 1545–1555. (на английском)
98. Durand, A.A. 1997. *Simple rule can be used to calculate friction loss in piping*. Oil and Gas Journal 95(21), 77-78. (на английском)
99. Dzenajaviciene, E.F., Kveselis, V., McNaught, C., Tamonis, M. 2007. *Economic analysis of the renovation of small-scale district heating systems—4 Lithuanian case studies*. Energy Policy 35(4), 2569–2578. (на английском)
100. Eck, B. 1973. *Technische Stromungslehre*. New York, New York: Springer. (на английском)
101. Eckhardt, B. 2008. *Turbulence transition in pipe flow: Some open questions*. Nonlinearity 21(1), T1-T11. (на английском)
102. Eckhardt, B. 2009. *Introduction. Turbulence transition in pipe flow: 125th anniversary of the publication of Reynolds' paper*. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 367(1888), 449-455. (на английском)
103. Eckhardt, B., Schneider, T.M. 2008. *How does flow in a pipe become turbulent?* European Physical Journal B 64(3-4), 457-462. (на английском)
104. Eiger, G.U., Shamir, U., Ben-Tal, A. 1994. *Optimal design of water distribution networks*. Water Resource Research 30(9), 2637–2646. (на английском)



- <sup>105.</sup> El-Emam, N., Gad, F.K., Nafey, A.S., Zoghaib, N. 1997. *New friction factor derived from study of Egyptian gas-field pipeline*. Oil and Gas Journal 95(45), 72-74+76. (на енглеском)
- <sup>106.</sup> El-Emam, N., Kamel, A.H., El-Shafei, M., El-Batrawy, A.M. 2003. *New equation calculates friction factor for turbulent flow of non-Newtonian fluids*. Oil and Gas Journal 101(36), 74-83. (на енглеском)
- <sup>107.</sup> Ellis, J.D. 2001. *The behavior of pipe network analysis solution techniques*. Thesis (Ph.D.), University of Adelaide, dept. of Civil and Environmental Engineering. (на енглеском)
- <sup>108.</sup> Epp, R., Fowler, A.G. 1970. *Efficient code for steady flows in networks*. Journal of Hydraulic Division of American Society of Civil Engineers 96(1), 43–56. (на енглеском)
- <sup>109.</sup> Ewing, R.E., Wang, J., Weekes, S.L. 1999. *On the simulation of multicomponent gas flow in porous media*. Applied Numerical Mathematics 31(4), 405-427. (на енглеском)
- <sup>110.</sup> Fanning, J.T. 1877. *A practical treatise on water-supply engineering*. Van Nostrand, New York. (на енглеском)
- <sup>111.</sup> Fankhauser, C., Tepic, C. 2007. *Can poor consumers pay for energy and water? An affordability analysis for transition countries*. Energy policy 35(2), 1038–1049. (на енглеском)
- <sup>112.</sup> Farshad, F., Rieke, H., Garber, J. 2001. *New developments in surface roughness measurements, characterization, and modelling fluid flow in pipe*. Journal of Petroleum Science and Engineering 29(2), 139–150. (на енглеском)
- <sup>113.</sup> Fillion, Y.R., Karney B.W. 2003. *Sources of error in network modeling: A question of perspective*. Journal of American Water Works Association 95(2), 119-130. (на енглеском)
- <sup>114.</sup> Ford, A. 2008. *Simulation scenarios for rapid reduction in carbon dioxide emissions in the western electricity system*. Energy Policy 36(1), 443–455. (на енглеском)
- <sup>115.</sup> Forsaeus Nilsson, S., Reidhav, C., Lygnerud, K., Werner, S. 2008. *Sparse district-heating in Sweden*. Applied Energy 85(7), 555–564. (на енглеском)
- <sup>116.</sup> Gas Engineers Handbook. 1974. New York: Industrial Press; Segeler, CG. editor (на енглеском)
- <sup>117.</sup> Gato, L.M.C., Henriques, J.C.C. 2005. *Dynamic behaviour of high-pressure natural-gas flow in pipelines*. International Journal of Heat and Fluid Flow 26(5), 817-825. (на енглеском)
- <sup>118.</sup> Gay, B., Middleton, P. 1971. *The solution of pipe network problems*. Chemical Engineering Science 26(1), 109–123. (на енглеском)
- <sup>119.</sup> Gebremedhin, A., Moshfegh, B. 2004. *Modelling and optimization of district heating and industrial energy system—an approach to alocally deregulated heat market*. International Journal of Energy Research 28(5), 411–422. (на енглеском)
- <sup>120.</sup> Gersten, K., Papenfuss, H.-D., Kurschat, T., Genillon, P., Fernández Pérez, F., Revell, N. 2000. *New transmission-factor formula proposed for gas pipelines*. Oil and Gas Journal 98(7), 58-62. (на енглеском)
- <sup>121.</sup> Gosselin, L. 2006. *Fitting the flow regime in the internal structure of heat transfer systems*. International Communications in Heat and Mass Transfer 33(1), 30-38. (на енглеском)

122. Goudar, C.T., Sonnad, J.R. 2003. *Explicit friction factor correlation for turbulent flow in smooth pipes*. Industrial and Engineering Chemistry Research 42(12), 2878-2880. (на английском)
123. Goudar, C.T., Sonnad, J.R. 2007. *Explicit friction factor correlation for turbulent flow in rough pipe*. Hydrocarbon Processing 86(4), 103-105. (на английском)
124. Goudar, C.T., Sonnad, J.R. 2008. *Comparison of the iterative approximations of the Colebrook-White equation*. Hydrocarbon Processing 87(8), 79-83. (на английском)
125. Goudar, C.T., Sonnad, J.R. 2009. *Explicit friction factor correlations for turbulent fluid flow in noncircular ducts and polymeric fluids*. Hydrocarbon Processing 88(5), 75-79. (на английском)
126. Gray, J.J., 1978. *Johann Heinrich Lambert, mathematician and scientist, 1728 – 1777*. Historia Mathematica 5 (1), 13-41. (на английском)
127. Gregory, G.A., Fogarasi, M., 1985. *Alternate to standard friction factor equation*. Oil & Gas Journal 83 (13), 120-127. (на английском)
128. Grohnheit, P.E., Mortensen, B.O.G. 2003. *Competition in the market for space heating. District heating as the infrastructure for competition among fuels and technologies*. Energy Policy 31(9), 817–826. (на английском)
129. Gulyani, B.B. 1999. *Simple equations for pipe flow analysis*. Hydrocarbon Processing 78(8), 67-70. (на английском)
130. Gupta, R., Bhave, P.R. 2007. *Fuzzy parameters in pipe network analysis*. Civil Engineering and Environmental Systems 24(1), 33-54. (на английском)
131. Gupta, I., Bassin, J.K., Gupta, A., Khanna, P. 1993. *Optimization of water distribution system*. Environmental Software 8(2), 101–13. (на английском)
132. Gustafsson, S.I., Karlsson, B.G. 1990. *Natural gas in optimized bivalent heating systems*. Energy 15(11), 993–999. (на английском)
133. Gustafsson, S.I., Bojić, M. 1997. *Optimal heating-system retrofits in residential buildings*. Energy 22(9), 867–874. (на английском)
134. Gustavsson, L. 1994. *District heating systems and energy conservation—part I*. Energy 19(1), 81–91. (на английском)
135. Gustavsson, L. 1994. *District heating systems and energy conservation—part II*. Energy 19(1), 93–102. (на английском)
136. Gustavsson, L., Karlsson, A. 2003. *Heating detached houses in urban areas*. Energy 28(8), 851–875. (на английском)
137. Haaland, S.E. 1983. *Simple and explicit formulas for friction factor in turbulent pipe flow*. Journal of Fluids Engineering Transactions of the American Society of Mechanical Engineers 105(1), 89-90. (на английском)
138. Haberl, H., Adensam, H., Geissler, S. 1998. *Optimal climate protection strategies for space heating; the case of Austria*. Energy Policy 26(15), 1125–1135. (на английском)
139. Hagen, G. 1839. *Über die Bewegung des Wassers in engen zylindrischen Röhren*. Pogg. Ann., 46, 423-442. (на немецком)
140. Hager, W.H. 2006. *Discussion of "Explicit solutions of the Manning equation for partially filled circular pipes"*. Canadian Journal of Civil Engineering 33(3), 347-348. (на английском)

- <sup>141.</sup> Haktanır, T., Ardiçlioğlu, M. 2004. *Numerical modeling of Darcy–Weisbach friction factor and branching pipes problem*. Advances in Engineering Software 35(12), 773–779. (на енглеском)
- <sup>142.</sup> Hartshorn, J.E. 1985. *Introduction: natural gas development begins at home*. Energy 10(2), 111–118. (на енглеском)
- <sup>143.</sup> Hall, K.R., Iglesias-Silva, G.A. 2007. *Improved equations for the Standing-Katz tables*. Hydrocarbon Processing 86(4), 107-110. (на енглеском)
- <sup>144.</sup> Haman, Y.M., Brameller, A. 1971. *Hybrid method for the solution of piping networks*. Proc. IEE. 113, 1607-1612. (на енглеском)
- <sup>145.</sup> Hayes, B., 2005. *Why w?* American Scientist 93 (2), 104-108. (на енглеском)
- <sup>146.</sup> Herwig, H., Gloss, D., Wenterodt, T. 2008. *A new approach to understanding and modelling the influence of wall roughness on friction factors for pipe and channel flows*. Journal of Fluid Mechanics 613, 35-53. (на енглеском)
- <sup>147.</sup> Holmgren, K., Amiri, S. 2007. *Internalising external costs of electricity and heat production in a municipal energy system*. Energy Policy 35(10), 5242–5253. (на енглеском)
- <sup>148.</sup> Huddleston, D.H., Alarcon, V.J., Chen, W. 2004a. *Water distribution network analysis using Excel*. Journal of Hydraulic Engineering ASCE 10(1), 1033-1035. (на енглеском)
- <sup>149.</sup> Huddleston, D.H., Alarcon, V.J., Chen, W. 2004b. *A spreadsheet replacement for Hardy-Cross piping system analysis in undergraduate hydraulics*. Proceedings of the 2004 World Water and 23 Environmental Resources Congress: Critical Transitions in Water and Environmental Resources Management 3108-3115. (на енглеском)
- <sup>150.</sup> Huei-Chu, L., Tsai-Feng, C. 2002. *Space-heating and water-heating energy demands of the aged in the US*. Energy Economics 24(3), 267–284. (на енглеском)
- <sup>151.</sup> Izquierdo, J., Montalvo, I., Pérez, R., Herrera, M. 2008. *Sensitivity analysis to assess the relative importance of pipes in water distribution networks*. Mathematical and Computer Modelling 48(1-2), 268-278. (на енглеском)
- <sup>152.</sup> Жахић, М. 1988. *Урбани водоводни системи*. Удружење за технологију воде, Београд. (на српском)
- <sup>153.</sup> Jain, A.K. 1976. *Accurate explicit equation for friction factor*. ASCE Hydraulic Division Journal 102(HY5), 674–677. (на енглеском)
- <sup>154.</sup> Jednak, S., Kragulj, D., Bulajić, M., Pittman, R. 2009. *Electricity reform in Serbia*. Utilities Policy 17 (1), 125-133 (на енглеском)
- <sup>155.</sup> Jovanović, M., Afgan, N., Radovanović, P., Stevanović, V., 2009. *Sustainable development of the Belgrade energy system*. Energy 34(5), 532–539. (на енглеском)
- <sup>156.</sup> Ke, S.L., Ti, H.C. 2000. *Transient analysis of isothermal gas flow in pipeline network*. Chemical Engineering Journal 76(2), 169-177. (на енглеском)
- <sup>157.</sup> Калуђерчић, П. 2002. *Проблем двострано напајаних дионица у дистрибутивној гасној мрежи*. Гас 7(2–3), 48–51. (на српском)
- <sup>158.</sup> Karlssona, A., Gustavsson, L. 2003. *External costs and taxes in heat supply systems*. Energy Policy 31(14), 1541–1560. (на енглеском)
- <sup>159.</sup> Keady, G. 1998. *Colebrook-White formula for pipe flows*. Journal of Hydraulic Engineering ASCE 124(1), 96-97. (на енглеском)

- <sup>160.</sup> Kentish, P. 2007. *Stress corrosion cracking of gas pipelines - Effect of surface roughness, orientations and flattening*. Corrosion Science 49(6), 2521-2533. (на енглеском)
- <sup>161.</sup> Kessler, A., Shamir, U. 1989. *Analysis of the linear programming gradient method for optimal design of water supply networks*. Water Resources Research 25(7), 1469–80. (на енглеском)
- <sup>162.</sup> Knutsson, D., Sahlin, J., Werner, S., Ekvall, T., Ahlgren, E.O. 2006. *HEATSPOT—a simulation tool for national district heating analyses*. Energy 31(2–3), 278–293. (на енглеском)
- <sup>163.</sup> Kornienko, Y.N. 1995. *Generalized integral forms for friction, heat and mass transfer coefficients*. International Journal of Heat and Mass Transfer 38(16), 3103-3108. (на енглеском)
- <sup>164.</sup> Koutsoyiannis, D. 2008. *A power-law approximation of the turbulent flow friction factor useful for the design and simulation of urban water networks*. Urban Water Journal 5(2), 107-115. (на енглеском)
- <sup>165.</sup> Крстић, М. 1990. *Алгоритми за израчунавање стационарне расподеле протока и притисака у дистрибутивним гасоводним мрежама*. Нафта 41(6), 265-274. (на српском)
- <sup>166.</sup> Kwak, D., Kiris, C., Kim, C.S. 2005. *Computational challenges of viscous incompressible flows*. Computers and Fluids 34(3), 283-299. (на енглеском)
- <sup>167.</sup> LaBarbera, M. 1990. *Principles of design of fluid transport systems in zoology*. Science 249(4972), 992-1000. (на енглеском)
- <sup>168.</sup> Lahiouel, Y., Haddad, A. 2002. *Evaluation of energy losses in pipes*. Proceedings of the 6th Saudi Engineering Conference KFUPM, Dhahran, 5: 577-589. /available in open access/ (на енглеском)
- <sup>169.</sup> Lahiouel, Y., Haddad, A., Chaoui, K. 2005. *Evaluation of head losses in fluid transportation networks*. Sciences & Technologie B 23, 89-94. /available in open access/ (на енглеском)
- <sup>170.</sup> Larsen, H.V., Paison, H., Bohm, B., Ravn, H.F. 2001. *Aggregated dynamic simulation model of district heating networks*. Energy Conversion & Management 43(8), 995–1019. (на енглеском)
- <sup>171.</sup> Langelandsvik, L.I., Kunkel, G.J., Smits, A.J. 2008. *Flow in a commercial steel pipe*. Journal of Fluid Mechanics 595, 323-339. (на енглеском)
- <sup>172.</sup> Latišenkov, A.M., Lobačev, V.G. 1956. *Hydraulics*. Moscow, Gosstroizdat (на руском); постоји превод на српском: Марковић, Б.-преводацац; Хидраулика. 1950. Београд /Научна књига
- <sup>173.</sup> Lazzarin, R., Noro, M. 2006. *Local or district heating by natural gas: which is better from energetic, environmental and economic point of views?* Applied Thermal Engineering 26(2–3), 244–250. (на енглеском)
- <sup>174.</sup> Lazzarin, R.M., Schibuola, L. 1986. *Performance analysis of heating plants equipped with condensing boilers*. Journal of Heat Recovery Systems 6(4), 269–276. (на енглеском)
- <sup>175.</sup> Lopes, A.M.G. 2004. *Implementation of the Hardy-Cross method for the solution of piping networks*. Computer Applications in Engineering Education 12(2), 117-125. (на енглеском)

- <sup>176.</sup> Li, Wen-Hsiung, 1983. *Fluid mechanics in water resources engineering*. Allyn and Bacon, Newton, Massachusetts. (на енглеском)
- <sup>177.</sup> Liou, C.P. 1998. *Limitation and proper use of the Hazen-Williams equation*. Journal of Hydraulic Engineering ASCE 124(9), 951-954. (на енглеском)
- <sup>178.</sup> Лилић, Б.С. 1958. *Расподела протока у хидрауличким мрежама*. Универзитет у Београду, Београд. (на српском)
- <sup>179.</sup> Лилић, Н., Кузмановић, Д. 1993. *Математичко моделирање рудничких вентилационих мрежа*. Рударско геолошки факултет Универзитета у Београду, Београд. (на српском)
- <sup>180.</sup> Lund, H., Hvelplund, H., Kass, I., Dukalskis, E., Blumberga, D. 1999. *District heating and market economy in Latvia*. Energy 24(7), 549–559. (на енглеском)
- <sup>181.</sup> Mah, R.S.H., Shacham, M. 1978. *Pipeline network design and synthesis*. Advances in Chemical Engineering 10, 125-209. (на енглеском)
- <sup>182.</sup> Mah, R.S.H., Lin, T.D. 1980. *Comparison of modified Newton's methods*. Computers and Chemical Engineering 4(2), 75-78. (на енглеском)
- <sup>183.</sup> Malin, M.R. 1997a. *The turbulent flow of Bingham plastic fluids in smooth circular tubes*. International Communications in Heat and Mass Transfer 24(6), 793-804. (на енглеском)
- <sup>184.</sup> Malin, M.R. 1997b. *Turbulent pipe flow of power-law fluids*. International Communications in Heat and Mass Transfer 24(7), 977-988. (на енглеском)
- <sup>185.</sup> Manadilli, G. 1997. *Replace implicit equations with signomial functions*. Chemical Engineering 104(8), 129–130. (на енглеском)
- <sup>186.</sup> Manojlović, V., Arsenović, M., Rajović, V. 1994. *Optimized design of a gas-distribution pipeline network*. Applied Energy, 48(3), 217–224. (на енглеском)
- <sup>187.</sup> Martorano, S. 2006. *Calculating friction loss: Darcy-Weisbach formula vs. Hazen-Williams*. [www.vikongcorp.com](http://www.vikongcorp.com) (на енглеском)
- <sup>188.</sup> Mathews, E.H., Kohler, P.A.J. 1995. *A numerical optimization procedure for complex pipe and duct network design*. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow 5(5), 445-457. (на енглеском)
- <sup>189.</sup> McClure, D.C., Miller, T. 1983. *Linear-programming offers way to optimize pipeline analysis*. Oil and Gas Journal 81(29), 135–138. (на енглеском)
- <sup>190.</sup> McKeon, B.J., Li, J., Jiang, W., Morrison, J.F., Smits, A.J. 2004a. *Further observations on the mean velocity distribution in fully developed pipe flow*. Journal of Fluid Mechanics 501, 135-147. (на енглеском)
- <sup>191.</sup> McKeon, B.J., Swanson, C.J., Zagarola, M.V., Donnelly, R.J., Smits, A.J. 2004b. *Friction factors for smooth pipe flow*. Journal of Fluid Mechanics 511, 41-44. (на енглеском)
- <sup>192.</sup> McKeon, B.J., Zagarola, M.V., Smits, A.J. 2005. *A new friction factor relationship for fully developed pipe flow*. Journal of Fluid Mechanics 538, 429-443. (на енглеском)
- <sup>193.</sup> McPherson, M.J., ?. *Chapter 7. Ventilation Network Analysis*. [www.mvsengineering.com/chapter7.pdf](http://www.mvsengineering.com/chapter7.pdf) (на енглеском)
- <sup>194.</sup> Mihalakakou, G., Santamouris, M., Tsagrassoulis, A. 2002. *On the energy consumption in residential buildings*. Energy & Buildings 34(7), 727–736. (на енглеском)
- <sup>195.</sup> Moghazi, H.D.M. 1998. *Estimating Hazen-Williams coefficient for polyethylene pipes*. Journal of Transportational Engineering 124(2) 197-199. (на енглеском)

196. Mokhatab, S. 2002a. *New approximation of friction factor developed for general gas-flow equation*. Oil and Gas Journal 100(26), 62-63. (на енглеском)
197. Mokhatab, S. 2002b. *Correlation predicts pressure drop in gas-condensate pipelines*. Oil and Gas Journal 100(4), 66-68. (на енглеском)
198. Moody, L.F. 1944. *Friction factors for pipe flow*. Transactions of ASME, 66(8), 671-684. (на енглеском)
199. Moody, L.F. 1947. *An approximate formula for pipe friction factors*. Transactions of ASME, 69(12), 1005–1011. (на енглеском)
200. Morais, M.S., Marangon Lima, J.W. 2007. *Combined natural gas and electricity network pricing*. Electric Power Systems Research 77(5–6), 712–719. (на енглеском)
201. More, A.A. 2006. *Analytical solutions for the Colebrook and White equation and for pressure drop in ideal gas flow in pipes*. Chemical Engineering Science 61(16), 5515-5519. (на енглеском)
202. Nandakumar, V. 2007. *Analytical calculation of Fanning friction factor*. Hydrocarbon Processing 86(1), 97-100. (на енглеском)
203. Nekrasov, B., 1969. *Hydraulics*. Mir, Moscow. (на енглеском)
204. Nikuradse, J. 1932. *Laws of turbulent flow in smooth pipes*. VDI, Forschungsheft English translation NACA TTF-10 (на енглеском)
205. Nikuradse, J. 1933. *Laws of flow in rough pipes*. VDI Forschungsheft 361. In translation, NACA TM 1292, 1950. (на енглеском)
206. Nilsson, S.F., Reidhav, C., Lygnerud, K., Werner, S. 2008. *Sparse district-heating in Sweden*. Applied Energy 85(7), 555–564. (на енглеском)
207. Обровић, Б., Шашић, М. 1996. *Хидраулика*. Научна књига: 4. издање, Београд (на српском)
208. Ormsbee, L.E. 2006. *The history of water distribution network analysis: The computer age*. 8th Annual Water Distribution Systems Analysis Symposium, doi.10.1061/40941(247)3 (на енглеском)
209. Olunloyo, V.O.S., Ajofoyinbo, A.M., Badiru, A.B. 2004. *Neurofuzzy mathematical model for monitoring flow parameters of natural gas*. Applied Mathematics and Computation 149(3), 747-770. (на енглеском)
210. Osiadacz, A.J. 1987. *Simulation and analysis of gas networks*. E.&F.N. Spon, London. (на енглеском)
211. Osiadacz, A.J. 1988. *Comparison of numerical methods for steady-state simulation of gas networks*. Civil Engineering Systems. 5(1), 25-30. (на енглеском)
212. Osiadacz, A.J., Pienkosz, K. 1988. *Methods of steady-state simulation for gas networks*. International Journal of Systems Science 19(7), 1311-1321. (на енглеском)
213. Osiadacz, A.J., Rudowski, K. 1987. *Analysis of loop methods for simulating gas networks*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 65(3), 201-213. (на енглеском)
214. Ossebaard, M.E., van Wijk, A.J.M., van Wees, M.T. 1997. *Heat supply in the Netherlands: a systems analysis of costs, exergy efficiency, CO<sub>2</sub> and NO<sub>x</sub> emissions*. Energy 22(11), 1087–1098. (на енглеском)
215. Ouyang, L.-B., Aziz, K. 1996. *Steady-state gas flow in pipes*. Journal of Petroleum Science and Engineering 14(3-4), 137-158. (на енглеском)

- <sup>216.</sup> Özger, M., Yildirim, G. 2009. *Determining turbulent flow friction coefficient using adaptive neuro-fuzzy computing technique*. Advances in Engineering Software 40(4), 281-287 (на енглеском)
- <sup>217.</sup> Parlange, J.-Y., Barry, D.A., Haverkamp, R. 2002. *Explicit infiltration equations and the Lambert W-function*. Advances in Water Resources 25(8-12), 1119-1124. (на енглеском)
- <sup>218.</sup> Patankar, S.V. 1980. *Numerical heat transfer and fluid flow*. 1st ed. Hemisphere Publishing Corp. Washington DC. (на енглеском)
- <sup>219.</sup> Papadopoulos, A.M., Oxizidis, S., Papandritsas, G. 2008. *Energy, economic and environmental performance of heating systems in Greek buildings*. Energy & Buildings 40(3), 224–230. (на енглеском)
- <sup>220.</sup> Pioge, P. 2007. *Bernoulli's Theorem and the Hazen-Williams Equation: rapid determination of diameter using the Hazen-Williams Equation*. [http://www.interaide.org/pratiques/pages/presente/present\\_english.htm](http://www.interaide.org/pratiques/pages/presente/present_english.htm) (на енглеском)
- <sup>221.</sup> Poiseuille, J.L. 1841. *Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres*. Comptes Rendus, Académie des Sciences, Paris 12, 112. (на француском)
- <sup>222.</sup> Prandtl, L. 1935. *The mechanics of viscous fluids*. In: Durand WF, editor. Aerodynamic theory, vol. III (Division G); 34–208. (на енглеском)
- <sup>223.</sup> Pretorius, J.J., Malan, A.G., Visser, J.A. 2008. *A flow network formulation for compressible and incompressible flow*. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow 18(2), 185-201. (на енглеском)
- <sup>224.</sup> Прстојевић, Б., Ђајић, Н., Вулетић, В. 2005. *Дистрибуција природног гаса*. Рударско-геолошки факултет, Београд. (на српском)
- <sup>225.</sup> Радојковић, М., Обрадовић, Д., Максимовић, Ч., 1989. *Рачунари у комуналној хидротехници*. Грађевинска књига, Београд. (на српском)
- <sup>226.</sup> Радојковић, М., Клем, Н. 1989. *Примена рачунара у хидраулици*. Грађевинска књига, Београд. (на српском)
- <sup>227.</sup> Rao, A.R., Kumar, V. 2007. *Friction factor for turbulent pipe flow*. Preprint: Division of Mechanical Science, Civil Engineering, Indian Institute of Science, Bangalore, India, ID Code 9587, (from: <http://eprints.iisc.ernet.in/9587/>) (на енглеском)
- <sup>228.</sup> Ramalingam, D., Lingireddy, S., Ormsbee, L.E. 2002. *History of water distribution network analysis: Over 100 years of progress*. Proceedings of the Environmental and Water Resources History 55-67. (на енглеском)
- <sup>229.</sup> Renouard, P. 1952. *Nouvelle méthode pour le calcul des réseaux maillés de conduites de gaz*. Communication au Congrès du Gaz. (на француском)
- <sup>230.</sup> Reidhav, C., Werner, S. 2008. Profitability of sparse district heating. Applied Energy 85(9), 867–877. (на енглеском)
- <sup>231.</sup> Revelli, R., Ridolfi, L. 2002. *Fuzzy approach for analysis of pipe networks*. Journal of Hydraulic Engineering ASCE 128(1), 93-101. (на енглеском)
- <sup>232.</sup> Reynolds, O. 1883a. *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels*. Proceedings of the Royal Society of London, 35, 84-99. (на енглеском)



- <sup>233</sup>. Reynolds, O. 1883b. *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 174, 935-982. (на английском)
- <sup>234</sup>. Reynolds, O. 1894. *On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion*. Proceedings of the Royal Society of London, 56, 40-45. (на английском)
- <sup>235</sup>. Reynolds, O. 1895. *On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A, 186, 123-164. (на английском)
- <sup>236</sup>. Robertson, J.M., Martin, J.D., Burkhart, T.H. 1968. *Turbulent flow in rough pipes*. Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals 7(2), 253-265. (на английском)
- <sup>237</sup>. Robinson, A.L. 1983. *How does fluid flow become turbulent?* Science, New Series 221(4606), 140-143. (на английском)
- <sup>238</sup>. Romeo, E., Royo, C., Monzon, A. 2002. *Improved explicit equation for estimation of the friction factor in rough and smooth pipes*. Chemical Engineering Journal 86(3), 369–374. (на английском)
- <sup>239</sup>. Roth, U., Häubi, F., Albrecht, J. 1980. *Interaction between urban infrastructure and district heating system (Wechselwirkung zwischen der Siedlungsstruktur und Wärmeversorgungssystemen)*. Bonn: Bundesminister für Raumordnung, Bauwesen und Städtebau (на немецком)
- <sup>240</sup>. Rosa, L., Tosato, R. 1990. *Experimental evaluation of seasonal efficiency of condensing boilers*. Energy & Buildings 14(3), 237–241. (на английском)
- <sup>241</sup>. Round, G.F. 1980. *An explicit approximation for the friction factor-Reynolds number relation for rough and smooth pipes*. Canadian Journal of Chemical Engineering 58(1), 122–123. (на английском)
- <sup>242</sup>. Rouse, H. 1943. *Evaluation of boundary roughness*. Proceedings Second Hydraulics Conference, University of Iowa Studies in Engineering, Bulletin 27. (на английском)
- <sup>243</sup>. Rouse, H. 1976. *Hydraulics in the United States, 1776-1976*. Iowa Institute of Hydraulic Research, University of Iowa, Iowa City. (на английском)
- <sup>244</sup>. Rouse, H. 1987. *Hydraulic's latest golden age*. in 'Hydraulics and hydraulic research; A historical review', editor Garbrecht, G., Balkanema; Rotterdam, Boston, 307-313. (на английском)
- <sup>245</sup>. Sablani, S.S., Shayya, W.H., Kacimov, A. 2003. *Explicit calculation of the friction factor in pipeline flow of Bingham plastic fluids: A neural network approach*. Chemical Engineering Science 58(1), 99-106. (на английском)
- <sup>246</sup>. Santamouris, M., Kapsis, K., Korres, D., Livada, I., Pavlou, C. Assimakopoulos, M.N. 2007. *On the relation between the energy and social characteristics of the residential sector*. Energy & Buildings 39(8), 893–905. (на английском)
- <sup>247</sup>. Schlichting, H. 1979. *Boundary layer theory*. 7th ed. New York, NY: McGraw-Hill. (на английском)
- <sup>248</sup>. Schorle, B.J., Churchill, S.W., Shacham, M. 1980. *Comments on "An explicit equation for friction factor in pipes"*. Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals 19(2), 228–229. (на английском)



249. Schroeder, D.W. 2002. *A tutorial on pipe flow equations*. <http://www.psig.org/papers/2000/0112.pdf> (на енглеском)
250. Scobey, F.C. 1966. *The flow of water in commercially smooth pipes: Introducing a general formula*. Water Resources Center Archive, University of California, Berkley. (на енглеском)
251. Serghides, T.K. 1984. *Estimate friction factor accurately*. Chemical Engineering 91(5), 63–64. (на енглеском)
252. Shamir, U., Howard, C.D.D., 1968. *Water Distribution Systems Analysis*. Journal of Hydraulics Division of American Society of Civil Engineers 94, 219–234. (на енглеском)
253. Shan, H., Zhang, Z., Nieuwstadt, F.T.M. 1998. *Direct numerical simulation of transition in pipe flow under the influence of wall disturbances*. International Journal of Heat and Fluid Flow 19(4), 320-325. (на енглеском)
254. Shayya, W.H., Sablani, S.S. 1998. *An artificial neural network for non-iterative calculation of the friction factor in pipeline flow*. Computers and Electronics in Agriculture 21(3), 219-228. (на енглеском)
255. Shockling, M.A., Allen, J.J., Smits, A.J. 2006. *Roughness effects in turbulent pipe flow*. Journal of Fluid Mechanics 564, 267-285. (на енглеском)
256. Sletfjerding, E., Gudmundsson, J., Sjøen, K. 1998. *Flow experiments with high pressure natural gas in coated and plain pipes: comparison of transport capacity*. PSIG 30th annual meeting, Denver, Colorado <http://www.psig.org/papers/1990/9808.pdf> (на енглеском)
257. Söderman, J., Pettersson, F. 2006. *Structural and operational optimisation of distributed energy systems*. Applied Thermal Engineering 26(13), 1400–8. (на енглеском)
258. Sonnad, J.R., Goudar, C.T. 2004. *Constraints for using Lambert W function-based explicit Colebrook-White equation*. Journal of Hydraulic Engineering ASCE 130(9), 929-931. (на енглеском)
259. Sonnad, J.R., Goudar, C.T. 2005. *Explicit friction factor correlation for pipe flow analysis*. Hydrocarbon Processing 84(6), 103-105. (на енглеском)
260. Sonnad, J.R., Goudar, C.T. 2006. *Turbulent flow friction factor calculation using a mathematically exact alternative to the Colebrook-White equation*. Journal of Hydraulic Engineering ASCE 132(8), 863–867. (на енглеском)
261. Sonnad, J.R., Goudar, C.T. 2007. *Explicit reformulation of the Colebrook-White equation for turbulent flow friction factor calculation*. Industrial and Engineering Chemistry Research 46(8), 2593-2600. (на енглеском)
262. Spriggs, H.D. 1973. *Comments on transition from laminar to turbulent flow*. Industrial and Engineering Chemistry 12(3), 286-290. (на енглеском)
263. Spriggs, H.D. 1973. *Erratum: Comments on transition from laminar to turbulent flow (Industrial Engineering Chemistry Fundamentals (1973) 12 (286))*. Industrial Engineering Chemistry Fundamentals 12(4), 493. (на енглеском)
264. Stanislaw, S. 1985. *The measurement of demand for natural gas*. Energy 10(2), 165–180. (на енглеском)
265. Strachan, N., Farrell, A. 2006. *Emissions from distributed vs. centralized generation: the importance of system performance*. Energy Policy 34(17), 2677–2689. (на енглеском)

- <sup>266.</sup> Стрелец, В. 2003. *Плинарски приручник*. 6. издање, Енергетика маркетинг, Загреб. (на српском)
- <sup>267.</sup> Sukharev, M.G., Karasevich, A.M., Samoilov, R.V., Tverskoi, I.V. 2005. *Investigation of the hydraulic resistance in polyethylene pipelines*. Journal of Engineering Physics and Thermophysics 78(2), 350-359. (на енглеском)
- <sup>268.</sup> Sundberg, G., Karlsson, B.G. 2000. *Interaction effects in optimising a municipal energy system*. Energy 25(9), 877–891. (на енглеском)
- <sup>269.</sup> Swamee, P.K., Jain, A.K. 1976. *Explicit equations for pipe flow problems*. Journal of Hydraulic Engineering ASCE 102(5), 657–664. (на енглеском)
- <sup>270.</sup> Танасковић, П. 1976. *Транспорт сирове нафте и гаса; други део-транспорт*. Нафтагас, Нови Сад. (на српском)
- <sup>271.</sup> Танасковић, Т., Ђајић, Н., Танасијевић, М., Бркић, Д. 2004. Анализа карактеристика гасификације и топлификације на моделу условне грађевинске површине. XXXI Сум-Ор-Is 69-72. (на српском)
- <sup>272.</sup> Танасковић, Т., Бркић, Д. 2007. Сезонска ефикасност кућних гасних котлова, XXXIV Сум-Ор-Is 171-174. (на српском)
- <sup>273.</sup> Танасковић, Т., Бркић, Д. 2009. *Оптимизација пречника цеви у прстенастој цевоводној мрежи модификованом методом петљи*. XXXVI Сум-Ор-Is /in press/ (на српском)
- <sup>274.</sup> Taylor, J.B., Carrano, A.L., Kandlikar, S.G. 2006. *Characterization of the effect of surface roughness and texture on fluid flow-past, present, and future*. International Journal of Thermal Sciences 45(10), 962-968. (на енглеском)
- <sup>275.</sup> Ter Brugge, R. 1984. *Spatial structure in relation to energy production and consumption*. Tijdschrift voor Economische Sociale Geografie 75(3), 214–222. (на енглеском)
- <sup>276.</sup> Todini, E. 2000. *Looped water distribution networks design using a resilience index based heuristic approach*. Urban Water 2(2), 115–122. (на енглеском)
- <sup>277.</sup> Todini, E. 2006. *On the convergence properties of the different pipe network algorithms*. 8th Annual Water Distribution Systems Analysis Symposium. doi.10.1061/40941(247)75 (на енглеском)
- <sup>278.</sup> Todini, E., Pilati, S. 1987. *A gradient method for the analysis of pipe networks*. International Conference on Computer Applications for Water Supply and Distribution, Leicester Polytechnic, UK, September 8-10. (на енглеском)
- <sup>279.</sup> Todini, E., Pilati, S. 1988. *A gradient method for the analysis of pipe networks*. in: B. Coulbeck, C.H. Orr (Eds), Computer applications in water supply, John Wiley & Sons Research Studies Press; London, 1988. 1–20. (на енглеском)
- <sup>280.</sup> Torchio, M.F., Genon, G., Poggio, A., Poggio, M. 2008. *Merging of energy and environmental analyses for district heating systems*. Energy 34 (3), 220-227. (на енглеском)
- <sup>281.</sup> Torekov, M.S., Bahnsen, N., Qvale, B. 2007. *The relative competitive positions of the alternative means for domestic heating*. Energy 32(5), 627–633. (на енглеском)
- <sup>282.</sup> Towler, B.F., Pope, T.L. 1994. *New equation for friction-factor approximation developed*. Oil & Gas Journal 92(14), 55-58. (на енглеском)

- <sup>283.</sup> Travis, Q.B., Mays, L.W. 2007. *Relationship between Hazen–William and Colebrook–White roughness values*. Journal of Hydraulic Engineering ASCE 133(11), 1270-1273. (на енглеском)
- <sup>284.</sup> Valiantzas, J.D. 2005. *Modified Hazen–Williams and Darcy–Weisbach equations for friction and local head losses along irrigation laterals*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering 131(4), 342-350. (на енглеском)
- <sup>285.</sup> Varma, K.V.K., Narasimhan, S., Bhallamudi, M., 1997. *Optimal design of water distribution systems using an NLP method*. Journal of Environmental Engineering 123(4), 381–388. (на енглеском)
- <sup>286.</sup> Verma, M.P. 2008. *Moodychart: an activex component to calculate frictional factor for fluid flow in pipelines*. Proceedings, Thirty-Third Workshop on Geothermal Reservoir Engineering, Stanford University, Stanford, California, January 28-30, 2008, SGP-TR-185. (на енглеском)
- <sup>287.</sup> von Bernuth, R.D. 1990. *Simple and accurate friction loss equation for plastic pipe*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering 116(2), 294-298. (на енглеском)
- <sup>288.</sup> von Kármán, T. 1930. *Mechanische Aehnlichkeit und Turbulenz*. Proc. Third International Congress for Applied Mechanics, C. W. Oseen and W. Weibull eds., Stockholm. 1, 79-93. (на немачком)
- <sup>289.</sup> Vondraček, J., Pelikan, E., Konar, O., Чермакова, J., Eben, K., Maly, M., Brabec, M. 2008. *A statistical model for the estimation of natural gas consumption*. Applied Energy 85(5), 362–370. (на енглеском)
- <sup>290.</sup> Weisbach, J. 1845. *Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik*. Vol. 1. Theoretische Mechanik, Vieweg und Sohn, Braunschweig. (на немачком)
- <sup>291.</sup> Wood, D.J. 1966. *An explicit friction factor relationship*. Civil Engineering (New York). 36(12), 60–61. (на енглеском)
- <sup>292.</sup> Вучковић, Ј. 1971. *Транспорт нафте и плина цјевоводима*. ИНА-Нафталин, Загреб. (на српском)
- <sup>293.</sup> Wang, Y.-J., Hartman, H.L. 1967. *Computer solution of three-dimensional mine ventilation networks with multiple fans and natural ventilation*. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 4(2), 129-154. (на енглеском)
- <sup>294.</sup> Walski, T.M. 2006. *Water distribution system analysis before digital computers*. 8th Annual Water Distribution Systems Analysis Symposium (на енглеском)
- <sup>295.</sup> Wood, D.J., Charles, C.O.A., 1972. *Hydraulic network analysis using linear theory*. Journal of Hydraulics Division of American Society of Civil Engineers 98(7), 1157–1170. (на енглеском)
- <sup>296.</sup> Wood, D.J., Rayes, A.G., 1981. *Reliability of algorithms for pipe network analysis*. Journal of Hydraulics Division of American Society of Civil Engineers 107(10), 1145–1161. (на енглеском)
- <sup>297.</sup> Wright, E.M. 1959. *Solution of the equation  $ze^z = a$* . Bulletin of the American Mathematical Society 65(2), 89-93. (на енглеском)
- <sup>298.</sup> Yang, L., Zmeureanu, R., Rivard, H. 2008. *Comparison of environmental impacts of two residential heating systems*. Building & Environment 43(6), 1072–1081. (на енглеском)
- <sup>299.</sup> Yang, Yong S. 1995. *Equation determines pressure drop in coiled tubing*. Oil and Gas Journal 93(49), 67-68. (на енглеском)

- <sup>300.</sup> Yen, B.C. 2002. *Open channel flow resistance*. Journal of Hydraulic Engineering ASCE 128(1), 20-39. (на енглеском)
- <sup>301.</sup> Yıldırım, G. 2009. *Computer-based analysis of explicit approximations to the implicit Colebrook–White equation in turbulent flow friction factor calculation*. Advances in Engineering Software 40(11), 1183–1190. (на енглеском)
- <sup>302.</sup> Yıldırım, G., Özger, M. 2009. *Neuro-fuzzy approach in estimating Hazen–Williams friction coefficient for small-diameter polyethylene pipes*. Advances in Engineering Software 40 (на енглеском)
- <sup>303.</sup> Yoo, D.H., Singh, V.P. 2005. *Two methods for the computation of commercial pipe friction factors*. Journal of Hydraulic Engineering 131(8), 694-704. (на енглеском)
- <sup>304.</sup> Yuhong, Z., Wenxin, H. 2009. *Application of artificial neural network to predict the friction factor of open channel flow*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 14(5), 2373-2378. (на енглеском)
- <sup>305.</sup> Zagarola, M.V., Perry, A.E., Smits, A.J., 1997. *Log laws or power laws: The scaling in the overlap region*. Physics of Fluids 9 (7), 2094-2100. (на енглеском)
- <sup>306.</sup> Zagarola, M.V., Smits, A.J. 1998. *Mean-flow scaling of turbulent pipe flow*. Journal of Fluid Mechanics 373, 33-79. (на енглеском)
- <sup>307.</sup> Zecchin, A.C., Simpson, A.R., Maier, H.R., Leonard, M., Roberts, A.J., Berrisford, M.J. 2006. *Application of two ant colony optimisation algorithms to water distribution system optimisation*. Mathematical and Computer Modelling 44(4-5), 451–68. (на енглеском)
- <sup>308.</sup> Zigrang, D.J., Sylvester, N.D. 1982. *Explicit approximations to the solution of Colebrook’s friction factor equation*. American Institute of Chemical Engineers Journal 28(3), 514–515. (на енглеском)
- <sup>309.</sup> Живковић, М., Бркић, Д. 2005. Избор централизованог система снабдевања енергијом демо насеља. XXXII Сум-Ор-Is 175-178. (на српском)
- <sup>310.</sup> Чалишев, К. 1922. *О допуштеним напрезањима решеткастих носача*. Технички лист удружења Југославенских инжењера и архитеката 4(1-2), 1–6. (на српском)
- <sup>311.</sup> Чалишев, К. 1923. *Израчунавање вишеструко статички неодређених система помоћу постепених апроксимација*. Технички лист удружења Југославенских инжењера и архитеката 5(17,18-19,20,21), 125–127, 141–143, 151–154, 157–158. (на српском)
- <sup>312.</sup> Шашић, М. 1990. *Транспорт флуида и чврстих материјала цевима*. Научна књига, Београд (на српском)

## Сажетак

Хидрауличке отпоре у цевоводу кроз који протиче природни гас или ма какав други флуид могуће је одредити на основу једначина чији резултати зависе од Рејнолдсовог броја и/или релативне храпавости цеви а које се дају за различите хидрауличке режиме; од ламинарног, преко делимично турбулентног (укључујући и тзв. хидраулички 'гладак' режим) до потпуно турбулентног режима у изразито храпавим цевима. Коефицијент хидрауличног отпора зависи од величине протока флуида, особина флуида и особина унутрашње површине цеви, односно све набројано се може узети у обзир увођењем два бездимензиона параметра: Рејнолдсовог броја и релативне храпавости. Апсолутна храпавост се усваја као  $0.01 \cdot 10^{-2}$  m када су у питању челичне цеви, односно као  $0.002 \cdot 10^{-2}$  m за пластичне, тј. полиетиленске (ПВЦ) цеви. До скора су се истоветне формуле уобичајено користиле за прорачуне у случају протока флуида кроз челичне и полиетиленске цеви. Ове формуле су се разликовале једино по нумеричкој вредности коефицијента храпавости. Данас, полиетиленске цеви налазе све већу примену у системима за снабдевање гасом. Полиетиленске цеви имају бројне предности наспрам челичних цеви: дуговечност (и преко 50 година), релативно малу цену коштања, широк опсег примене (погодне за повезивање насеља, за цевоводе унутар градова, уличне цевоводе, итд.), као и малу храпавост унутрашње површи која се практично не мења протоком времена. Ове цеви нису склоне корозији и, стога, не захтевају примену електролитичке заштите. Очекује се да ће постепено полиетиленске цеви истиснути челичне готово у свим системима који раде на релативно ниском притиску. Бројни истраживачи су спровели опсежне лабораторијске експерименте у циљу да се нађу оптималне вредности храпавости полиетиленских цеви које би се користиле за прорачуне једначином Колбрука и Вајта, а самим тим би се одредиле и граничне вредности за хидрауличке отпоре који се могу јавити у полиетиленским цевима. Резултати добијени у лабораторијама се донекле разликују од оних који се добијају применом једначине Колбрука и Вајта. Уместо ове једначине, бројни аутори предлажу једначине у тзв. Блазијусовом облику уз измењене бројне вредности коефицијента и експонента у односу на основну Блазијусову једначину. Фактор трења односно отпора се обично одређује из Модјевог дијаграма. У хидраулички 'глатком' режиму који је типичан за проток флуида кроз полиетиленске цеви, фактор отпора је функција само Рејнолдсовог броја док не зависи уопште од храпавости цеви. Овај режим се јавља при ниским вредностима Рејнолдсовог броја и при ниским вредностима релативне храпавости где се сматра да је читава храпава унутрашња површ прекривена непокретним слојем флуида који се налази уз сам зид цеви и који је непокретан (гранични слој). Реноарова једначина припада групи тзв. једначина Блазијусовог типа и данас се практично она користи скоро увек када се ради о протоку гаса кроз полиетиленске цеви што је и најчешћи случај код градских гасоводних дистрибутивних мрежа. Фактор хидрауличног отпора може бити у имплицитном облику као нпр. што је случај код Колбрукове једначине. Колбрукова једначина се уобичајено користи код прорачуна протока кроз челичне цеви. Колбрук је у сарадњи са Вајтом развио тридесетих година двадесетог века, функцију која покрива област делимичног турбулентног протока чиме је тзв. 'глатком' кривом премошћен јаз између хидраулички 'глатког' и потпуно развијеног турбулентног режима протока флуида. Ова формула важи за прелазну зону између слабо развијене турбуленције у хидраулички глатком режиму и потпуно развијене турбуленције у храпавим цевима, али исто тако покрива и ове граничне случајеве. Нажалост, Колбрукова једначина је имплицитна у погледу фактора отпора и стога је нужна употреба итеартивног поступка за њено решавање. Препознајући ову тешкоћу, неколико аутора је предложило експлиците апроксимације ове функције. Наравно, ове апроксимације су нужно релативно компликоване и са

превише коефицијената и експонената. Инжењери уобичајено користе у својој пракси једну од апроксимација док се труде да запамте само физичку суштину Колбрукове једначине. Ипак, и данас се Колбрукова једначина доста користи у нафтној индустрији. Колбрукова једначина се може преуредити да служи за прорачун Дарсијевог (тј. Модијевог) или Фанинговог фактора отпора струјању флуида. Разлика између појмова Колбрукова једначина или једначина Колбрука и Вајта или не постоји или је разлика само у појединим коефицијентима, тј. неки истраживачи користе ову једначину у донекле модификованом облику са нешто измењеним коефицијентима. За делимично турбулентан проток флуида кроз цеви који је од највећег практичног интереса, једначина Колбрука и Вајта је до сада највише коришћена једначина за прорачун фактора отпора. Она повезује фактор отпора или боље речено фактор пропусности са Рејнолдсовим бројем и релативном храпавошћу цеви. Такође, основна сврха ове једначине није у самом одређивању фактора отпора, већ посредно служи за одеђивање количина протока у цевима, односно падова притисака у њима. Погодна релација која служи овој сврси, а за познат израз којим се одређује фактор отпора или за познату бројну вредност овога фактора се такође даје у дисертацији. Све једначине се дају у SI систему мера (тј. дужине се обавезно дају у метрима, не у милиметрима, за нпр. пречнике цеви, односно не у километрима за дужине цеви). Као што је речено раније, фактор отпора протоку флуида у цевоводима може бити дат у имплицитном облику као нпр. у Колбруковој једначини која мора бити решена итеративним поступком пошто се непозната величина појављује и са леве и са десне стране једначине. На основу Колбрукове једначине, многе апроксимативне једначине у експлицитном облику су до данас развијене. Употреба ових једначина у данашње вереме је према мишљењу аутора ове дисертације, сувишна, пошто су оне по својој идеји у суштини застареле. Колбрукову једначину у свом основном имплицитном облику треба користити уместо апроксимација, где год је потребно (за делимично турбулентан режим). Просечна грешка при коришћењу апроксимација Колбрукове једначине је у просеку мања од 1%. Треба имати у виду да је већина ових апроксимација заснованих на имплицитној једначини Колбрука и Вајта застарело у време напредне рачунарске технологије (MS Excel). Дobar пример примене рачунарске технике у овој области је у примена неуро-фази логике за одређивање фактора отпора за турбулентни режим. Ламберт W функција може исто тако бити коришћена за егзактну математичку трансформацију једначине Колбрука и Вајта у експлицитан облик без било каквих апроксимација, с тим да се тада јавља проблем око самог решавања Ламберт W функције. Једна потпуно нова реформулација Колбрукове једначине се даје у овој дисертацији. Иначе постоје различите једначине којима се одређују падови притисака услед трења у цевоводима, нпр. једначина по Дарси-Вајсбаху, Фанингу, Чези-Манингу, Хазен-Вилијамсу, Скобију, итд. Ове једначине стављају губитке притиска услед трења у зависност од својстава унутрашње површине зида цеви или зида канала у случају отвореног тока течног флуида и различитих других параметара протока. Дарсијев фактор трења (познат и као Модијев фактор) је најзначајнији параметар једначине по Дарсију и Вајсбаху. Дарсијев фактор хидрауличног трења дају различити аутори за различите хидрауличке режиме протока као што су: ламинаран, хидраулички 'гладак' режим, турбулентан, итд. Аутори ових Дарсијевих фактора су нпр. Реноар, Блазијус, Моди, Колбрук, Алтшуљ, итд. Остале расположиве формулације, за разлику од Дарси-Вајсбахове и Фанингове, као што су нпр. Чези-Манингова, Хазен-Вилијамсова и Скобијева су развијене само за случај протока воде, односно могу се применити за уз модификације за проток осталих течних флуида, и као такве не могу се користити за прорачуне гасовода. Фактори отпора који улазе у ове једначине (изузетак су Дарси-Вајсбахова и Фанингова једначина) не могу се рачунати користећи Колбрукову или Реноарову једначину. Хазен-Вилијамсова једначина која је уведена почетком двадесетог века, и која се користи за прорачун губитака у водоводним системима, захтева посебан фактор хидрауличног отпора



различит од Дарсијевог или Фанинговог. На жалост, чак и у случају водовода применом ове једначине могу настати грешке и до  $\pm 40\%$  када се користи изван ограниченог и донекле дискутабилног опсега Рејнолдсовог броја, опсега пречника цеви и Хазен-Вилијамсових коефицијената. Не само што често даје нетачне резултате, једначина Хазена и Вилијамса има и суштинске недостатке који потичу из саме њене дефиниције.

За разгранате мреже напајане из једног правца, више независних једначина је потребно да би се цео систем описао, с тим да је свака од једначина независна и самим тим лако решива (систем од више нпр. Хазен-Вилијамсових једначина у случају протока воде кроз цевоводе, или Реноарових у случају протока гаса). У овом случају, код разгранатих мрежа, методе линераног програмирања су довољне за оптимизацију, као са хидрауличног, тако и са економског аспекта. Анализа најбоље трасе гасовода као и оптимизација применом методе коначних елемената се може спровести за разгранате мреже. За хидрауличке мреже чије цеви граде затворене контуре, прстенове, много комплексније технике морају бити примењене. Бројни алгоритми су развијени како би се осигурала конвергенција итеративног поступка који је нужно потребан за решавање и оптимизацију прстенастог типа мрежа. Данас је Харди Крос метод један од најзаступљенијих који се користе за прорачун прстенастих цевних мрежа. Харди Крос је развио нумеричку процедуру за прорачун протока и падова притисака у прстенастој мрежи. Овај метод је подједнако коришћен као за гасоводне мреже, тако и за пројектовање водоводних мрежа у насељима. Харди Крос метод подразумева равнотежу између притисака и сила отпора протоку у случају стационарног и нестишљивог протока. Као последица, овај метод се не може користити у случају нестационарног и стишљивог режима протока када у мрежи постоје велики падови притисака као и када су инерцијалне силе знатне. Како оригинална, тако и побољшана верзија Харди Крос метода су методе узастопних корекција у итеративном поступку, с тим да се код прве варијанте корекције у свакој итерацији рачунају за сваку контуру посебно, док се код друге корекције за све контуре рачунају истовремено помоћу Њутн-Рапсоновог нумеричког матричног метода. Харди Крос метод је само један начин за решавање тзв. једначина контура у мрежи. Код оригиналног метода, прво се током једне итерације одређују поправке за сваку контуру независно, а затим се те корекције на основу посебних алгебарских правила додају претходним протоцима у цевима како би се добила нова прерасподела протока. Овај приступ није ефикасан у поређењу са побољшаним Харди Крос методом код кога се цео систем једначина, тј. цела мрежа посматра као јединствени систем. Ово Побољшање су увели Еп и Фовлер, али су га тада разматрали само за водоводне системе. Неки од метода које су развили руски аутори су врло слични оригиналном Харди Крос методу. Истовремено када и Харди Крос, совјетски аутор В. Г. Лобачев развио је сличан метод оригиналном Харди Кросовом методу. Метод М. М. Андријашева је врло често био коришћен током совјетске ере у Русији. Према овој методи контура и петља (прстен) нису синоними (контура по правилу обухвата више прстенова тј. петљи а само изузетно један прстен). Узимајући једначину прстенова да представе закон очување енергије, Вуд и Чарлс су развили тзв. линеарни метод (метод усклађивања протока) чија је суштина у спајању једначина петљи са једначинама чворова. Касније су конвергенциона својства овога метода побољшали Вуд и Рејес. Код модификованог линеарног метода у свакој итерацији се као крајњи резултат не добија корекција протока као код обе варијанте Харди Крос метода већ сам проток. Шамир и Ховард претходно решавају једначине чворова Њутн-Рапсоновим методом уместо уобичајено једначина контура. Пошто се израчунају падови притисака у цевима по овој методи, налазе се затим и протоци. Резултат прорачуна према свим претходним методама су посебно, или протоци (или притисци код методе чворова). Хаман и Брамелер као и Тодини и Пилати развијају методе којима се истовремено рачунају како протоци по цевима, тако и притисци по

чворовима мреже. Притом, овде се једначина за сваку цев конституише тако да обухвати како проток тако и сам пад притиска у њој. Сходно томе и број једначина је већи него код осталих метода, али је предност што алгоритам не захтева посебно дефинисање контура. Даља побољшања уводи Патанкар. Он развија процедуру тзв. коначних запремина да би решио Навије-Стоксове једначине у структурираном координатном систему. Од изласка његовог рада са оригиналном идејом 1972. године појавило се мноштво побољшања. Дата и Мајамундар су искористили овај алгоритам да развију метод за решавање цевоводних система са петљама. Данас су примери прорачуна мрежа по Харди Крос методу доступни у бројним приручницима. Међутим, детаљна побољшања ове методе су рађена само за водоводне мреже. Данас су доступне и методе оптимизације које се базирају на путањама које праве мрави у природи када иду у потрагу за храном. У овој докторској дисертацији се постојеће методе трансформишу у матрични облик и преводе у облик који је погоднији за дистрибуцију гаса у односу на до сада познатије облике примењиване за водоводе. Нови метод за оптимизацију пречника цеви у мрежи се развија.

Сматра се да је природни гас најбоље решење као енергент за подмиривање грејних потреба становништва у српским градовима. Стога је потребно изнаћи најповољнији начин употребе природног гаса. Природни гас се може користити за подмирење грејних потреба становништва на два дијаметрално супростављена начина, и то директно, тако што би се гас директно уводио у зграде путем дистрибутивног система за снабдевање гасом и затим сагоревао у гасном котлу којим је сваки стан опремљен (гасни дистрибутивни систем), или индиректно, тако што би се градска топлана снабдевала гасом а даље би се из ње насеља напајала топлотном енергијом (даљински топоводни систем). Избор једног од два понуђена система може се направити на основу просторног распореда зграда у насељу, њиховог броја, величине, квалитета изолације, итд. У складу са овим својствима, могуће је направити прорачун инвестиционих и експлоатационих трошкова за оба система а за затим их и упоредити што се и чини у дисертацији за 96 случајева који представљају исто толико различитих типова насеља. Скоро сваки тип насеља који може да се нађе у реалности може бити представљен једним типом тзв. условне урбане целине која се као појам дефинише у овој дисертацији. Главни циљ који се постиже у овом делу дисертације је успостављање општег модела на основу којег се може остварити координисани развој централизованог грејног система на природни гас који се усваја на основу унапред дефинисаних и усвојених критеријума. Анализа структуре целокупног система је дата са акцентом на њихове цевоводне мреже. Ако се планира увођење грејања на гас у једно насеље, одлука о начину грејања се доноси између две успостављене опције: 1. Индиректан систем; природни гас се сагорева у топлани а насеља се снабдевају топлотном енергијом посредством топоводног система за даљинско грејање, и 2. Директног система; где се станови греју на природни гас који се у станове доводи посредством градске гасоводне мреже и који се затим на лицу места у самом стану сагорева у кућном гасном котлу чиме се обезбеђује топлотна енергија за грејање. Почетна одлука се доноси на основу броја и величине зграда у насељу, величине насеља, као и од топлотне изолације зграда. У граничним случајевима, ако су подједнако прихватљиве или подједнако неприхватљиве обе опције, могуће је увођење неке врсте хибридног система који неће бити детаљније разматран у овој дисертацији. Недавно повећање цене гаса, је поново довело у фокус питање подмиривања грејних потреба домаћинства како код нас, тако и у свету. Ипак, економска питања не би смела да буду једина којим би државне или локалне власти требало да се руководе када је у питању преиспитивање досадашњих извора снабдевања или начина њиховог коришћења. Градови су садашње време највећи потрошачи енергије. Процењује се да је годишње повећање потрошње примарне енергије око 3%, с тим да



*се ова додатна енергија највећим делом троши за осветљење, кување, грејање, климатизацију и транспорт роба и путника. Значај који промене у облицима коришћења енергије, увођење напредних технологија, промене животних навика, значајно могу да допринесу смањењу потрошње енергије. Одрживи енергетски ресурси, адекватна дистрибуција и рационална потрошња представљају циљеве који треба да се постигну и који се подразумевају под појмом одрживи развој. Један град се може сматрати одрживим, уколико се у њему успостави равнотежа између економског и социјално-културолошког развоја са једне стране, и напретка у очувању животне средине уз активно учешће његових становника. Са друге стране, економска исплативост оба разматрана система за грејање природним гасом врло много зависи од разних специфичних околности. Ако је предвиђено увођење једног од ова два поменута система у насеља у којима су зграде доста просторно удаљене, дужина цевовода који је неопходно потребан да се ове зграде повежу на систем биће дакако повећана. У том случају ће се трошковима тако повећане дужине цевовода делити на само неколико потрошача. Систем даљинског снабдевања топлотном енергијом је у неку руку доста скупљи, а ако се пореде само цевоводи, он је скупљи зато што има доводни и одводни вод, што су цеви челичне и што је потребна изолација. Као што је речено, директан систем дистрибуције гаса је опонент систему даљинског грејања. Овде су димензије потребних цеви мање, изолација није потребна, цеви су пластичне, тако да су овде издатци доста мањи. Исто је потребно нагласити да је систем даљинског грејања често доста мање ефикасан у поређењу са модерним технологијама које се примењују у директним системима грејања на природни гас. Увођење кондензационих котлова за грејање на природни гас у поређењу са „традиционалним“ технологијама, значајно доприноси уштедама енергената. У овој дисертацији за потребе поређења система гасни котло за кућну употребу се бира из британске базе података “Seasonal Efficiency of Domestic Boilers in United Kingdom”. Исто тако у дисертацији се дају коментари о процени потребних количина природног гаса за потребе грејања у зависности од различитих параметара.*

## Abstract

*It is possible, using the set of equation, to correlate the hydraulic friction factor with Reynolds number and/or relative pipe roughness for all flow regimes from laminar through partially (including 'smooth' hydraulic regime) to fully turbulent flow of natural gas or other fluids.*

*The friction factor is related to fluid-flow rate, fluid properties and pipe characteristics through two dimensionless groups: Reynolds number and relative roughness. Absolute roughness are adopted as  $0.01 \cdot 10^{-2}$  m for steel pipes and  $0.002 \cdot 10^{-2}$  m for polyethylene (PVC) pipes. To date, same formulas have been used in technological calculations of steel and polyethylene pipelines. These formulas differed only in the numerical values of the roughness coefficient. At present, polyethylene pipes are finding wider and wider application in gas-supply distribution systems. Polyethylene pipes have a number of advantages over the steel pipes: long service life (as long as 50 years), relatively low cost, high adaptability (suitability for inter-settlement, inner-town, and street service lines), and low inner-surface roughness that practically does not change with time. They are not prone to corrosion and, therefore, do not call for electrolytic protection. Polyethylene pipes will gradually supplant steel pipes in pipeline systems operating at a relatively low pressure. Laboratory experiments were conducted and attempted to find the optimum value of the roughness height of PVC pipes for the Colebrook–White equation and then the value of the friction factor of PVC pipes. Their computation results were, however, quite different from those obtained in the laboratory when using the Colebrook–White equation. Instead Blasius type equation with minor modifications were proposed. The friction factor is typically estimated from the Moody diagram. In the hydraulically smooth regime as typical for flow through PVC pipes, the friction factor is a function of Reynolds number only and the resistance to flow is independent of relative roughness. This regime is restricted to small values of Reynolds number and relative pipe roughness in that the surface roughness are completely hidden in the laminar boundary layer. The Renouard equation belongs to group of Blasius type and today is most used equation in distribution PVC pipeline networks in urban areas. Friction factor can be in implicit form in some of the relations such as e.g. Colebrook. The Colebrook relation is used for flow through steel pipelines. C.F. Colebrook in collaboration with C.M. White developed in 1930's a function which gives a practical form of transition curve in a partially turbulent region of turbulence to bridge the gap between hydraulically smooth and fully turbulent regime. This formula is valid for the transition zone of incomplete turbulence in smooth and rough pipes. Unfortunately the Colebrook formula is implicit in the friction factor and requires an iterative procedure for solution. Recognizing this difficult, several authors have proposed explicit approximations. Of course, these kinds of approximations are very complicated with too many coefficients and exponents. Engineers usually use one of them and try to remember only physical essence of the Colebrook equation. However, even today the Colebrook relation is widely used in the petroleum industry. The Colebrook relation can be arranged to calculate the Darcy (Moody) or the Fanning friction factor. The difference between the Colebrook and the Colebrook-White equation are only in some coefficients i.e., many researchers adopt a modification of the Colebrook-White equation using the different constant. For turbulent flow in rough pipes which is of greater practical interest, the Colebrook–White equation is by far the most widely used correlation to calculate friction factor. It relates the friction factor, or better to say transmission factor to the Reynolds number and relative pipe roughness. Also, essential purpose for determination of friction factor is in its usage for determination of pressure drops and discharges in pipes during the gas flow. Suitable relations for pressure drops and discharges with known relation for friction factor or its value accordingly will be shown. All relations are in SI units without multipliers (i.e. for distances in meters, not in millimetres for i.e. diameters or in kilometres for lengths of pipes). As noticed before, friction factor in pipes can be expressed in implicit form in some of the relations such as e.g. Colebrook and must be*

solved by iteration because the unknown friction factor appears on both sides of the equation. Many less or more accurate explicit approximations for these equations were developed. Usage of shown approximation as obsolete in approach and in an opinion of the author of this dissertation cannot be recommended. The implicit Colebrook relation should be used whenever is appropriate (region of partially turbulence). The average error of almost all explicit approximations of the Colebrook-White relation is less than 1%. But most of these explicit relations created to solve the implicit Colebrook-White form have been made obsolete by advancing computing technology (MS Excel). Good example for the era of computerization is usage of adaptive neuro-fuzzy computing technique for determination of turbulent flow friction coefficient. Lambert W function can also be used for exact mathematical transformation of Colebrook-White function in explicit form with no approximations, but problem is then in solution of this function. Original reformulation of the Colebrook relation using the Lambert W function is shown in this dissertation. Various equations have been proposed to determinate the head losses due to friction e.g. Darcy-Weisbach, Fanning, Chezy-Manning, Hazen-Williams, Scobey formulas, etc. These equations relate the friction losses to physical characteristics of the pipe or the wall of a channel in the case of open flow and various flow parameters. The Darcy friction factor (somewhere known as Moody factor) is the main parameter of the Darcy-Weisbach equation. The Darcy friction factor is recommended after different authors for different flow regimes such as laminar, smooth, turbulent, etc. Authors of these factors are e.g. Renourad, Blasius, Moody, Colebrook, Altshul, etc. Other available formulations e.g. Chezy-Manning, Hazen-Williams and Scobey formulas are only for water, i.e. for liquid flow and these factors cannot be used for gas pipeline calculation. Friction factor for these relations (except Darcy-Weisbach and Fanning equation) cannot be calculated using the Colebrook or Renouard relation. Introduced in the early 1900s, the Hazen-Williams equation determines pipe friction head loss for water, requiring a single roughness coefficient. Unfortunately even for water it may produce errors as high as  $\pm 40\%$  when applied outside a limited and somewhat controversial range of Reynolds numbers, pipe diameters and coefficients. Not only inaccurate the Hazen-Williams equation is conceptually incorrect.

For single source, branching networks, only the reach equations need to be solved (e.g. using Hazen-Williams for water or Renouard for natural gas). In this case, optimization by linear programming could yield the best alternative network, both hydraulically and economically. Critical path analysis for optimizing branched pipe networks and implementation of the finite element method can be done for branched networks. For looped networks, however, techniques that are more powerful are required. Algorithms have been developed to ensure convergence of the iterative procedures. Today, Hardy Cross method is very often used for calculation of gas distribution networks with loops of conduits. Hardy Cross developed a numerical method for calculating flow and pressure distribution in a looped network. This method also has been widely used in modeling of waterworks with ring-like structures of conduits in municipalities. Hardy Cross method assumes equilibrium between pressure and friction forces in steady and incompressible flow. As a result, it cannot be successfully used in unsteady and compressible flow calculations with large pressure drop where inertia force is important. Original and improved Hardy Cross method, are methods of successive iterative corrections, but for the first one, corrections are calculated for each contour separately, while for the second one, corrections for all contours in each iteration is calculated simultaneously using the Newton-Raphson numerical procedure. Hardy Cross method is one approach to solve the loop equations. Original method first determines corrections for each loop independently and applies this correction to compute new flow in each conduit. It is not efficient compared to improved Hardy Cross method that considers entire system simultaneously. Simultaneous method is used by Epp and Fowler, but only for looped waterworks systems. Some methods developed by Russian authors are similar with original Hardy Cross method. Contemporary with Hardy Cross, soviet author V.G. Lobachev was being developed very similar method compared to original

*Hardy Cross method. Andrijashev method was very often being used in Russia during the soviet era. According to this method, contour and loop are not synonyms (contours for calculations has to be chosen to include few loops and only by exception one). Using the loop equations to represent conservation of energy, Wood and Charles developed a linear theory (flow adjustment) method by coupling the loop equations with node equations. Convergence characteristics of linear theory are later improved by Wood and Rayes. Modified linear theory solves directly for the conduits flow rates rather than the loop equations approach of Hardy Cross method. Shamir and Howard solved node equations instead loop equations using the Newton–Raphson method. After the nodal heads are computed, they computed the conduits flow rates. Previous methods solve for the conduits flows or nodal heads separately then use conservation of energy to determine the other set of unknowns. Haman and Brameller, and, Todini and Pilati devised a method to solve for flows and heads simultaneously. Here, each conduit equation is written to include, both, the conduit flows and nodal heads. In addition, although the number of equations is larger than the other methods, the algorithm does not require defining loops. Further procedure is developed by Patankar. He developed a finite volume procedure to solve for Navier–Stokes equations in a structured co-ordinate system. Since the publication of the original paper in 1972, there have been several developments reported to improve the numerical performance of the original algorithm. Datta and Majumdar used this solution algorithm to develop a calculation procedure for manifold flow systems. Today, examples of calculation of looped natural gas distribution network after original Hardy Cross method can be found in handbooks. But, deeper improvement of Hardy Cross method is only shown in case of looped waterworks systems. Very interesting application of two ant colony optimisation algorithms to water distribution system optimisation can be found in literature. In this dissertation are transformed all available methods in matrix form, few are developed or rearranged gas systems. New method for optimization of pipe diameters is developed.*

*Natural gas in Serbian towns will be the most adequate fuel. So rational way for usage of natural gas should be developed. Natural gas can be used for satisfying population needs for heating, either directly by bringing the gas to the dwellings through the gas distribution system and combusting it in the domestic boiler (gas distribution system), or indirectly by combusting the natural gas in the heating plant and distributing the heat energy to the dwellings through the district heating system (district heating system). The selection of a certain type of heating system is made according to the disposition of buildings in the area, their number, size, insulation quality, etc. Based on these characteristics, calculations of investments and exploitation costs have been made for both heating systems and a comparison has been made for all of the 96 presented cases. Almost each type of real settlement can be represented by one of the types of the conditional urban area which are introduced in the dissertation. The main goal of this part of dissertation is to establish a general model to achieve coordinated development of centralized energy supply systems fueled by natural gas, based on defined and accepted criteria. A structure analysis of centralized systems for energy supply has been done with accent on their pipelines. If a gas based system in a settlement is planned, the decision can be done among two conflicted options: 1. Indirect system; natural gas is being combusted in a heating plant and household heat supply is provided by a District Heating System, 2. Direct system; dwellings are being heated by natural gas brought through a gas distribution system and then combusted in domestic gas boilers in each dwelling, individually. The initial decision on choosing one of two systems is based on the number and size of buildings in a settlement, the size of the settlement itself and the heating insulation of buildings. In boundary cases, if it is possible to achieve both options it is also possible to introduce a sort of hybrid system which is not considered in this dissertation. The latest increase in gas prices turned all eyes once again to the space heating problem in Europe. However, economic concern is not the only factor pushing the authorities to rethink about the suitability of the currently existing sources. Cities are the biggest consumers of the country's energy production. The increase in annual consumption of total*

primary energy is 3% and its largest part is used for lighting, cooking, heating, cooling, and transport of freights and passengers. The importance of reducing the energy consumption level, by changing the forms of consumption and making improvements in technology and lifestyle, should be noted. Sustainable forms of energy production, distribution and usage represent the goals of a sustainable development. A city is considered to be sustainable if it establishes the balance between economic and socio-cultural development, on one side and the progress in environmental protection with active participation of citizens. On the other side, the economics of the both gas systems very much depend on the specific circumstances. If installed in an area with only scattered buildings, the length of the pipes which are necessary to supply households will be higher, relative to the number of buildings. Installation costs will be shared by fewer consumers. The district heating system is the capital intensive; in particular due to the distribution system of insulated pipes. The direct gas system is another form of energy which is being distributed for domestic heating purposes. The dimensions of pipes are small compared to the district heating pipes and no insulation is needed, thus the distribution system is less capital intensive. District heating is often less efficient with respect to modern heating technologies using natural gas. Condensing boilers guarantee higher efficiencies with respect to the "traditional" district heating. In this study, a noncondensing boiler with average efficiency has been chosen from following database: "Seasonal Efficiency of Domestic Boilers in United Kingdom". Also some comments on forecasting of gas consumption will be discussed in this dissertation.

## Прилог

### Пример 1:

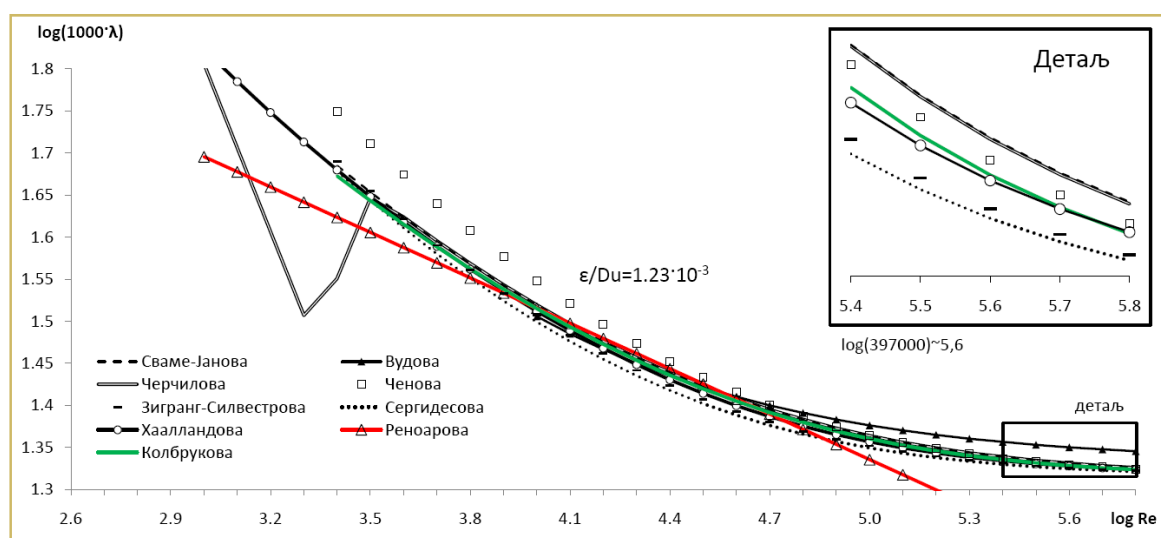
Потребно је израчунати Дарсијев и Фанингов коефицијент хидрауликог отпора у области делимично турбулентног режима користећи Колбрукову једначину и поједине апроксимације исте једначине које се дају даље у тексту, за вредност Рејнолдсовог броја  $Re=3,97 \cdot 10^5$  и за вредност релативне хрпавости  $\epsilon/D_u=1,23 \cdot 10^{-3}$ , и утврдити релативну грешку појединих апроксимација за дате услове. У табели се даје решење.

**Табела:** Вредности добијене Колбруковом релацијом и апроксимацијама за дати пример

Једначина	Дарсијев фактор $\lambda_{dt}$	<sup>a</sup> Фанингов фактор $f_{dt}$	<sup>b</sup> релативна грешка %
за $Re=3,97 \cdot 10^5$ и $\epsilon/D_u=1,23 \cdot 10^{-3}$			
Колбрукова (35)	0,021310371	0,005327593	-
<sup>b</sup> модификована Колбрукова	0,021386953	0,005346738	0,3594
Сваме-Јанова (42)	0,021441289	0,005360322	0,6143
Вудова (39)	0,022396374	0,005599094	5,0961
Сергидесова (49)	0,021310345	0,005327586	-0,0001
Модијева (38)	0,023422065	0,005855516	9,9092
Черчилова (43)	0,021434927	0,005358732	0,5845
Ченова (44)	0,021351770	0,005337942	0,1943
Зигранг-Силвестрова (47)	0,021157082	0,005289270	-0,7193
Хааландова (48)	0,021269816	0,005317454	-0,1903
Манадилијева (50)	0,021463492	0,005365873	0,7185
Ромео и др. (51)	0,021299362	0,005324840	-0,0517
Барова (46)	0,020761994	0,005190499	-2,5733
Јанова (41)	0,021419142	0,005354786	0,5104
Екова (40)	0,021211013	0,005302753	-0,4662
Рао-Кумарева (53)	0,020658518	0,005164630	-3,0589
Сонад-Годарева (52)	0,021320217	0,005330054	0,0462
Бркић (54)	0,021360083	0,005340021	-0,2332

<sup>a</sup> $f_{dt}=\lambda_{dt}/4$ ; <sup>b</sup>у односу на Колбрукову; <sup>c</sup>константа 2,51 замењена константом 2,825

Графички приказ претходног примера се даје на следећој слици:



**Слика:** Графичка интерпретација претходно дефинисаног проблема

### Пример 2:

За вредност Рејнолдсовог броја  $Re=10^5$  израчунати вредност Дарсијевог коефицијента хидрауличног отпора  $\lambda_R$  користећи Прандтлову једначину и Колбрукову интерпретацију исте, као и њихове реформулисане експлицитне облике изражене преко Ламберт W функције (у овом решењу се под  $\lambda$  подразумева  $\lambda_R$ ). Користећи експлицитну реформулацију Прандтлове основне формуле преко Ламберт W функције (76) добија се вредност аргумента Ламбертове функције  $x=45833,78$ ; а затим користећи Бојдову 'померену' функцију (60) добија се њена вредност  $\omega_0(y)=9,270471102$  преко њеног аргумента  $y=124590,1362$  добијеног на основу (58), односно користећи побољшану верзију (61) добија се  $\omega_0(y)=9,274092672$ . Затим се примењује Њутн-Рапсонова процедура (62) тако да се током пет итерација добијају резултати:  $\omega_1(y)=9,6423578844$ ;  $\omega_2(y)=9,5848972519$ ;  $\omega_3(y)=9,5829958994$ ;  $\omega_4(y)=9,5829939004$ ;  $\omega_5(y)=9,5829939004$ . Примењујући (57) добија се приближна вредност Ламберт W функције по Бојду;  $W(x)=8,5829939004$  за вредност аргумента  $x=45833,78$  како је већ пре наведено. Даље се лако може израчунати Дарсијев коефицијент хидрауличке пропусности  $1/\lambda^{0,5}=7,455093778$ ; односно сам Дарсијев коефицијент хидрауличног отпора  $\lambda=0,017992594$  који се на крају може дати у облику прилагођеном за приказивање у координатном систему са прилагођеним Никурадсеовим осама,  $\log(1000 \cdot \lambda)=1,255093778$ . Користећи експлицитну реформулацију Прандтлове формуле преко Ламберт W функције у Колбруковом облику (80) и примењујући исти поступак, добија се  $\log(1000 \cdot \lambda)=1,255025685$ . Применом простије формуле по Барију и сарадницима (63), добија се  $\log(1000 \cdot \lambda)=1,243269878$  за једначину (76) и  $\log(1000 \cdot \lambda)=1,243202365$  за једначину (80). Користећи MS Excel и полазну Прандтлову формулу (17) добија се,  $\log(1000 \cdot \lambda)=1,255093473$ , а за Колбрукову интерпретацију исте (18), сличан резултат, тј.  $\log(1000 \cdot \lambda)=1,25502538$ . Грешка добијена решењем Ламберт W функције по Барију и сарадницима је процењена на око 2,5% (уз напомену да постоји и знатно сложенији али тачнији начин рачунања по Барију и сарадницима), док је Бојду далеко испод 1%. Случај разматран у овом примеру је на горњој граници могућег постојања хидраулички 'глатког' режима протока, тако да се не би направила грешка ни када би се користиле формуле које важе за делимично турбулентан режим протока.

### Пример 3:

За вредност Рејнолдсовог броја  $Re=10^5$  и вредност релативне храпавости унутрашњег зида цеви  $\epsilon/D_v=1/60$ , израчунати вредност Дарсијевог коефицијента хидрауличког отпора  $\lambda_{dt}$  користећи Колбрукову једначину (35) као и њен реформулисан експлицитан облик изражен преко Ламберт  $W$  функције (82). Добијене резултате упоредити са расположивим експлицитним апроксимативним формулама Колбрукове једначине. Резултати прорачуна се дају у табелама:

**Табела:** Процена грешке у резултатима решења примера

Једначина	Дарсијев фактор $\lambda_{dt}$	<sup>a</sup> релативна грешка %
Колбрукова (35)	0,045800558	-
<sup>b</sup> модификована Колбрукова	0,045854602	-0,097006
Сваме-Јанова (42)	0,046081644	0,397648
Вудова (39)	0,046551873	1,422132
Сергидесова (49)	0,045845166	-0,117564
Модијева (38)	0,044012468	-4,110446
Черчилова (43)	0,046057969	0,346068
Ченова (44)	0,045834884	-0,139966
Зигранг-Силвестрова (47)	0,045892270	-0,014939
Хааландова (48)	0,045919405	0,044179
Манадилијева (50)	0,046102402	0,442873
Ромео са сарадницима (51)	0,045817411	-0,178034
Барова (46)	0,045439785	-1,000764
Јанова (41)	0,046010946	0,243619
Екова (40)	0,045898947	-0,000392
Рао-Кумарева (53)	0,045393923	-1,100683
Сонад-Годарева (52)	0,045852835	-0,100856
Бркић (54)	0,045981062	-0,394108
Бојдово (57-62)	0,045800558	0,000000
Бари са сарадницима (63)	0,042908683	-6,314058
Формално (56)	0,045800558	0,000000

<sup>a</sup>у односу на Колбрукову; <sup>b</sup>константа 2,51 замењена константом 2,825



Наставак примера 3:

за $Re=10^5$ и $\epsilon/D_0=1/60$		
по Бојду (Boyd 1998)		
-	$x$	$1,42 \cdot 10^{94}$
(58)	$y$	$3,84688 \cdot 10^{94}$
(60)	$\omega_0(y)$	212,4067293
(61)	$\varpi_0(y)$	212,4067293
(62)	$\omega_1(y)$	212,4367826238
(62)	$\omega_2(y)$	212,4363379269
(62)	$\omega_3(y)$	212,4363378275
(62)	$\omega_4(y)$	212,4363378275
(62)	$\omega_5(y)$	212,4363378275
(57)	$W(x)$	211,4363378275
(82)	$\lambda_{dt}$	0,045800558
-	$\log(1000 \cdot \lambda_{dt})$	1,660870766
по Барију и сарадницима (Barry et al 2000; 2002)		
-	$x$	$1,42 \cdot 10^{94}$
(63)	$W(x)$	211,6146641
(82)	$\lambda_{dt}$	0,042908683
-	$\log(1000 \cdot \lambda_{dt})$	1,63254519
формално решење Ламберт $W$ функције		
(56)	$W(x)$	211,4363378
(82)	$\lambda_{dt}$	0,045800558
-	$\log(1000 \cdot \lambda_{dt})$	1,660870766
користећи <i>MS Excel</i> (Brkić 2009a)		
(35)	$1/\sqrt{\lambda_{dt}}$	4,672664687
-	$\lambda_{dt}$	0,045800558
-	$\log(1000 \cdot \lambda_{dt})$	1,660870766

#### Пример 4:

За вредност Рејнолдсовог броја  $Re=3,97 \cdot 10^5$  и за вредност релативне храпавости у случају 1:  $\epsilon/D_0=1,23 \cdot 10^{-3}$ , а у случају 2:  $\epsilon/D_0=1/60$ , решити Колбрукову једначину која је трансформисана у експлицитан облик помоћу Ламберт W функције (82), користећи приказане расположиве методе за приближно решавање Ламберт W функције и проценити грешку.

**Табела: Процена грешке у резултатима решења једначине (82)**

Метод решавања	Дарсијев фактор $\lambda_{dt}$		релативна грешка %	
	Случај 1	Случај 2	Случај 1	Случај 2
Бојдово (57-62)	0,045800558	-	0.000000	-
Бари са сарадницима (63)	0,042908683	-	-4.189157	-
Формално (56)	0,045800558	-	0.000000	-

**Табела Решење примера**

по Бојду (Boyd 1998)		Случај 1	Случај 2
-	x	$3,02 \cdot 10^{31}$	нерешиво
(58)	y	$8,19 \cdot 10^{31}$	-
(60)	$\omega_0(y)$	69,18696415	-
(61)	$\varpi_0(y)$	69,18696415	-
(62)	$\omega_1(y)$	69,2607021617	-
(62)	$\omega_2(y)$	69,2606981100	-
(62)	$\omega_3(y)$	69,2606981100	-
(62)	$\omega_4(y)$	69,2606981100	-
(62)	$\omega_5(y)$	69,2606981100	-
(57)	W(x)	68,2606981100	-
(82)	$\lambda_{dt}$	0,02129766	-
-	$\log(1000 \cdot \lambda_{dt})$	1,328331889	-
по Барију и сарадницима (Barry et al 2000; 2002)			
-	x	$3,02 \cdot 10^{31}$	нерешиво
(63)	W(x)	68,43131836	-
(82)	$\lambda_{dt}$	0,020405467	-
-	$\log(1000 \cdot \lambda_{dt})$	1,309746549	-
формално решење Ламберт W функције			
(56)	x	$3,02 \cdot 10^{31}$	нерешиво
(82)	W(x)	68,26069811	-
-	$\lambda_{dt}$	0,02129766	-
(56)	$\log(1000 \cdot \lambda_{dt})$	1,328331889	-
користећи MS Excel (Brkić 2009a)			
(35)	$1/\sqrt{\lambda_{dt}}$	6,852263506	4,689336784
-	$\lambda_{dt}$	0,02129766	0,045475465
-	$\log(1000 \cdot \lambda_{dt})$	1,328331889	1,657777151

Приликом решавања случаја 2 у овоме примеру, показало се да је производ чланова  $O_1$  и  $O_2$  који је потребан за израчунавање члана  $O_4$  који представља аргумент x Ламберт W функције, исувише мали да би био израчунат.

### Пример 5:

За вредност Рејнолдсовог броја  $Re=10^5$  и вредност релативне храпавости унутрашњег зида цеви  $\epsilon/D_u=1/60$ , решити Колбрукову једначину (82) која је трансформисана у експлицитан облик помоћу Ламберт  $W$  функције, користећи приказане расположиве методе за приближно решавање Ламберт  $W$  функције и проценити грешку.

**Табела: Решење примера**

за $Re=10^5$ и $\epsilon/D_u=1/60$		
по Бојду (Boyd 1998)		
-	$x$	45868,22894
(58)	$y$	124683,7732
(60)	$\omega_0(y)$	9,271158295
(61)	$\varpi_0(y)$	9,27477615
(62)	$\omega_1(y)$	9,6430259939
(62)	$\omega_2(y)$	9,5855698257
(62)	$\omega_3(y)$	9,5836687879
(62)	$\omega_4(y)$	9,5836667896
(62)	$\omega_5(y)$	9,5836667896
(57)	$W(x)$	8,5836667896
(82)	$\lambda_{dt}$	0,046057731
-	$\log(1000 \cdot \lambda_{dt})$	1,66330254
по Барију и сарадницима (Barry et al 2000; 2002)		
-	$x$	45868,22894
(63)	$W(x)$	8,70130738
(82)	$\lambda_{dt}$	0,045981445
-	$\log(1000 \cdot \lambda_{dt})$	1,662582612
формално решење Ламберт $W$ функције		
(56)	$x$	45868,22894
(82)	$W(x)$	8,583669807
-	$\lambda_{dt}$	0,046057729
(56)	$\log(1000 \cdot \lambda_{dt})$	1,66330252
користећи MS Excel (Brkić 2009a)		
(35)	$1/\sqrt{\lambda_{dt}}$	4,672664687
-	$\lambda_{dt}$	0,045800558
-	$\log(1000 \cdot \lambda_{dt})$	1,660870766

Решење по Барију и сарадницима овде показује знатно мању процењену грешку, тј. 0,394% док Бојдово и формално решење дају грешку од 0,561% чиме се показује да се грешка по целом опсегу врло неправилно диспергује када је у питању приближно решавање Ламберт  $W$  функције. Формално решење (56) и решење по Бојду дају истоветну вредност процењене грешке. Мања вредност аргумента  $x$  Ламберт  $W$  функције који се добија према у оригинално трансформисаним облицима Колбрукове једначине, а који су приказани у овој дисертацији (82 и 85) дају знатно мање вредности грешке када се користи метод прорачуна по Барију и сарадницима.

**Пример 6:**

За вредност Рејнолдсовог броја  $Re=3,97 \cdot 10^5$  и за вредност релативне храпавости у случају 1:  $\epsilon/D_u=1,23 \cdot 10^{-3}$ , а у случају 2:  $\epsilon/D_u=1/60$ , решити Колбрукову једначину која је трансформисана у експлицитан облик помоћу Ламберт W функције (82), користећи приказане расположиве методе за приближно решавање Ламберт W функције и проценити грешку.

**Табела: Решење**

по Бојду (Boyd 1998)		Случај 1	Случај 2
-	x	182096,8689	182096,8689
(58)	y	494991,6098	494991,6098
(60)	$\omega_0(y)$	10,53876433	10,53876433
(61)	$\varpi_0(y)$	10,53923455	10,53923455
(62)	$\omega_1(y)$	10,8776487172	10,8776487172
(62)	$\omega_2(y)$	10,8285130093	10,8285130093
(62)	$\omega_3(y)$	10,8271465805	10,8271465805
(62)	$\omega_4(y)$	10,8271455597	10,8271455597
(62)	$\omega_5(y)$	10,8271455597	10,8271455597
(57)	W(x)	9,8271455597	9,8271455597
(82)	$\lambda_{dt}$	0,021449641	0,045565955
-	$\log(1000 \cdot \lambda_{dt})$	1,33142003	1,658640478
по Барију и сарадницима (Barry et al 2000; 2002)			
-	x	182096,8689	182096,8689
(63)	W(x)	9,950528288	9,950528288
(82)	$\lambda_{dt}$	0,021360515	0,045542667
-	$\log(1000 \cdot \lambda_{dt})$	1,329611716	1,658418457
формално решење Ламберт W функције (51)			
(56)	x	182096,8689	182096,8689
(82)	W(x)	9,827146994	9,827146994
-	$\lambda_{dt}$	0,02144964	0,045565955
(56)	$\log(1000 \cdot \lambda_{dt})$	1,331420008	1,658640475
користећи MS Excel (Brkić 2009a)			
(35)	$1/\sqrt{\lambda_{dt}}$	6,852263506	4,689336784
-	$\lambda_{dt}$	0,02129766	0,045475465
-	$\log(1000 \cdot \lambda_{dt})$	1,328331889	1,657777151

Треба приметити да је истоветан случај 2 у оквиру примера 4 био нерешив. Овде приказане трансформације Колбрукове једначине уз помоћ Ламберт W функције (82 и 85) су стога супериорније у односу на облик доступан у литератури (81).

**Табела. Процена грешке у резултатима решења једначине (82)**

Метод решавања	Дарсијев фактор $\lambda_{dt}$		релативна грешка %	
	Случај 1	Случај 2	Случај 1	Случај 2
MS Excel (Brkić 2009a)	0,021297660	0,045475465	-	-
Бојдово (57-62)	0,021449641	0,045565955	0,7136	0,1989
Бари са сарадницима (63)	0,021360515	0,045542667	0,2951	0,1477
Формално (56)	0,021449640	0,045565955	0,7136	0,1989

Као што се види, метод Барија и сарадника се у овом случају показао као знатно бољи.

### Пример 7:

Израчунати пад притиска у цевоводу ако је дужина цевовода 1000 m, пречник цевовода 0,225 m, динамички вискозитет гаса који се транспортује  $\eta=1,0758 \cdot 10^{-5}$  Pa и густина гаса  $\rho=0,84$  kg/m<sup>3</sup>, а густина ваздуха 1,28 kg/m<sup>3</sup>. Проток гаса је 2000 m<sup>3</sup>/h на стандардним условима. Претпоставља се да је апсолутни притисак гаса на почетку цевовода  $p=4 \cdot 10^5$  Pa. Користити Дарсијев коефицијент хидрауличног отпора по Реноару и по Панхандлу А. Средња температура у цевоводу је 288,15 K а средњи фактор компресибилитета гаса  $Z_{sr}=1$ .

Брзина гаса у цевоводу се може израчунати по једначини:

$$v = \frac{4 \cdot p_{st} \cdot Q}{D_u^2 \cdot \pi \cdot \rho} = \frac{4 \cdot 101325 \cdot \frac{2000}{3600}}{0,225^2 \cdot 3,1415 \cdot 400000} = 3,53 \frac{m}{s}$$

На основу Реноарове једначине за проток гаса (91) може се добити:

$$\frac{2000}{3600} = 0,00448643 \cdot \left[ \frac{p_1^2 - p_2^2}{203993,093} \right]^{1/1,82}$$

Односно:

$$p_1^2 - p_2^2 = 1,31 \cdot 10^9 \text{ Pa}^2$$

На основу Панхандлове А једначине за проток гаса, добија се:

$$\frac{2000}{3600} = 0,00568275 \cdot \left[ \frac{p_1^2 - p_2^2}{201100,9458} \right]^{0,5394}$$

Односно:

$$p_1^2 - p_2^2 = 9,84 \cdot 10^8 \text{ Pa}^2$$

Ако се узме да је  $p_1=4 \cdot 10^5$  Pa, тада је  $p_2=398768$  Pa, односно пад притиска  $\Delta p=1231,89$  Pa.

Добијени резултати се слажу са закључцима који су донети на основу слике 7, тј. применом Панхандле А једначином се добијају мањи падови притисака у цевоводу у односу на рестриктивнију Реноарову једначину.

Уместо претходних једначина прилагођених за проток гаса применимо Блазијусову једначину за Реноарове коефицијенте како би израчунали Дарсијев коефицијент хидрауличног отпора, односно Дарси-Вајсбахову једначину:

$$\lambda_g = 0,172 \cdot \text{Re}^{-0,18} = 0,172 \cdot 62180,63^{-0,18} = 0,023586$$

$$p_1 - p_2 = \lambda_g \cdot \frac{L}{D_u^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2} \cdot \rho = 0,023353 \cdot \frac{1000}{(0,225)^5} \cdot \frac{8 \cdot \left(\frac{2000}{3600}\right)^2}{\pi^2} \cdot 0,84 = 8595,72 \text{ Pa}$$

Односно за истоветан случај користећи Панхандлову А једначину:

$$\lambda_g = 0,08475 \cdot \text{Re}^{-0,1461} = 0,08475 \cdot 62180,63^{-0,1461} = 0,0168961$$

$$p_1 - p_2 = \lambda_g \cdot \frac{L}{D_u^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2} \cdot \rho = 0,0168961 \cdot \frac{1000}{(0,225)^5} \cdot \frac{8 \cdot \left(\frac{2000}{3600}\right)^2}{\pi^2} \cdot 0,84 = 6157,41 \text{ Pa}$$

### Пример 8:

Дата је дужина цевовода 1000 m, пречник цевовода 0,225 m, динамички вискозитет гаса који се транспортује  $\eta=1,0758 \cdot 10^{-5}$  Pa и густина гаса  $\rho=0,84$  kg/m<sup>3</sup>, а густина ваздуха 1,28 kg/m<sup>3</sup>. Проток гаса је 2000 m<sup>3</sup>/h. Претпоставља се да је апсолутни притисак гаса у цевоводу око  $p=4 \cdot 10^5$  Pa. Израчунати падове притиска по Колбруковој и по Алтшуљовој једначини у датој цеви ако се узме да је цев челична са процењеном средњом вредношћу апсолутне храпавости  $\epsilon=0,01 \cdot 10^{-2}$  m.

Вредност Рејнолдсовог броја је иста као што је дато у решењу примера 5, тј.  $Re=62180,63$ . Режим протока услед постојања храпавости  $\epsilon$  није више хидраулички 'гладак', већ је делимично парцијалан турбулентни режим. Релативна храпавост је  $\epsilon/D_0=0,01 \cdot 10^{-2}/0,225=0,0004444$ , а Дарсијем коефицијент хидрауличке пропусности се помоћу *MS Excel-a* израчунава у вредности 6,838134682, односно Дарсијев коефицијент хидрауличног отпора износи  $\lambda_{dt}=0,021385761$ .

$$\frac{2000}{3600} = 6,838134682 \cdot \frac{3,1415 \cdot \sqrt{1000 \cdot 8,31441 \cdot 0,225^5}}{\sqrt{29 \cdot 16}} \cdot \frac{1 \cdot 288,15}{101325} \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{1000 \cdot \left(\frac{0,84}{1,29}\right) \cdot 288,15 \cdot 1}}$$

Односно;

$$p_1^2 - p_2^2 = 1,51 \cdot 10^9 \text{ Pa}^2$$

Ако се узме да је  $p_1=4 \cdot 10^5$  Pa, тада је  $p_2=398108$  Pa, односно пад притиска  $\Delta p=1891$  Pa.

Уколико се користи Алтшуљева једначина за проток гаса (100) добија се следећи резултат:

$$\frac{2000}{3600} = \left(0,000444 + \frac{68}{65705,39}\right)^{\frac{1}{8}} \frac{3,1415 \cdot \sqrt{1000 \cdot 8,31441 \cdot 0,225^5}}{\sqrt{29 \cdot 16 \cdot 0,11}} \cdot \frac{1 \cdot 288,15}{101325} \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{1000 \cdot \left(\frac{0,84}{1,29}\right) \cdot 288,15 \cdot 1}}$$

Односно;

$$p_1^2 - p_2^2 = 1,54 \cdot 10^9 \text{ Pa}^2$$

Ако се узме да је  $p_1=4 \cdot 10^5$  Pa, тада је  $p_2=398070$  Pa, односно пад притиска  $\Delta p=1929$  Pa.

Пошто се ради о малим вредностима храпавости добијени падови притиска по Алтшуљовој и Колбруковој једначини су скоро идентични, али ако би се разматрао случај где је релативна храпавост већа, тада би и падови притисака по Колбруковој једначини били приметније већи.

### Пример 9:

Дата је дужина цевовода 1000 m, пречник цевовода 0,225 m, динамички вискозитет гаса који се транспортује  $\eta=1,0758 \cdot 10^{-5}$  Pa и густина гаса  $\rho=0,84 \text{ kg/m}^3$ , а густина ваздуха  $1,28 \text{ kg/m}^3$ . Претпоставља се да је апсолутни притисак гаса у цевоводу око  $p=4 \cdot 10^5$  Pa. Уз повећану релативну храпавост цеви која се сада процењује на  $\epsilon/D_u=1/60$  и за смањену количину протока у цевоводу која је сада  $500 \text{ m}^3/\text{h}$  на стандардним условима, израчунати пад притиска у датом цевоводу користећи Колбрукову и Алтшуљову једначину.

Брзина гаса у цевоводу се може израчунати по једначини:

$$v = \frac{4 \cdot p_{st} \cdot Q}{D_u^2 \cdot \pi \cdot p} = \frac{4 \cdot 101320 \cdot \frac{500}{3600}}{0,225^2 \cdot 3,1415 \cdot 400000} = 0,88 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Вредност Рејнолдсовог броја за дате податке је  $Re=15541,15$ . Дарсијев коефицијент хидрауличке пропусности се помоћу MS Excel-а према Колбруковој једначини израчунава у вредности 4,563137756, односно Дарсијев коефицијент хидрауличног отпора износи  $\lambda_{dt}=0,048025605$ .

$$\frac{500}{3600} = 4,563137756 \frac{3,1415 \cdot \sqrt{1000 \cdot 8,31441 \cdot 0,225^5}}{\sqrt{29 \cdot 16}} \frac{1 \cdot 288,15}{101325} \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{1000 \cdot \left(\frac{0,84}{1,29}\right) \cdot 288,15 \cdot 1}}$$

$$p_1^2 - p_2^2 = 3,398 \cdot 10^9 \text{ Pa}^2$$

Ако се узме да је  $p_1=4 \cdot 10^5$  Pa, тада је  $p_2=395729$  Pa, односно пад притиска  $\Delta p=4270$  Pa.

Уколико се користи Алтшуљева једначина за проток гаса (100) добија се следећи резултат:

$$\frac{500}{3600} = \left(\frac{1}{60} + \frac{68}{15541,15}\right)^{\frac{1}{8}} \frac{3,1415 \cdot \sqrt{1000 \cdot 8,31441 \cdot 0,225^5}}{\sqrt{29 \cdot 16 \cdot 0,11}} \frac{1 \cdot 288,15}{101325} \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{1000 \cdot \left(\frac{0,84}{1,29}\right) \cdot 288,15 \cdot 1}}$$

$$p_1^2 - p_2^2 = 2,96 \cdot 10^9 \text{ Pa}^2$$

Ако се узме да је  $p_1=4 \cdot 10^5$  Pa, тада је  $p_2=396282$  Pa, односно пад притиска  $\Delta p=3717$  Pa.

### Пример 10:

Израчунати Дарсијев коефицијент хидрауличног отпора у цевоводу ако је дужина цевовода 1000 m, пречник цевовода 0,225 m, релативна храпавост  $\epsilon/D_u=0,04$ , динамички вискозитет гаса који се транспортује  $\eta=1,0758 \cdot 10^{-5}$  Pa и густина гаса  $\rho=0,84 \text{ kg/m}^3$ , а густина ваздуха  $1,28 \text{ kg/m}^3$ . Проток гаса је  $2000 \text{ m}^3/\text{h}$ . Претпоставља се да је апсолутни притисак гаса у цевоводу око  $p=4 \cdot 10^5$  Pa. Користити обрасце по Колбруку и по фон Карману.

Брзина гаса у цевоводу се може израчунати у вредности од 3,53 m/s, а затим и Рејнолдсов број у вредности од  $Re=62180,63$ . Услед присутне велике релативне храпавости процењено је да је режим протока потпуно турбулентан (видети Модријев дијаграм на слици 2 за дате вредности Рејнолдсовог броја и релативне храпавости). Дарсијев коефицијент хидрауличке пропусности се помоћу *MS Excel-a* израчунава у вредности 3,921966445, односно Дарсијев коефицијент хидрауличног отпора износи  $\lambda_{dt}=0,065011809$  када се користи Колбрукова једначина. Дарсијев коефицијент хидрауличке пропусности који се добија помоћу фон Карманове једначине износи 3,934627837, односно Дарсијев коефицијент хидрауличног отпора износи  $\lambda_t=0,064594074$ . Релативно је добро слагање у вредностима Дарсијевог фактора хидрауличног отпора тако да се може закључити да би и прорачунати падови притиска били врло слични.

### Пример 11:

Израчунати пад притиска у цевоводу користећи Реноарову једначину за гасоводе, ако је дужина цевовода 1000 m, пречник цевовода 0,225 m, динамички вискозитет гаса који се транспортује  $\eta=1,0758 \cdot 10^{-5}$  Pa и густина гаса  $\rho=0,84 \text{ kg/m}^3$ , а густина ваздуха  $1,28 \text{ kg/m}^3$ . Проток гаса је  $2000 \text{ m}^3/\text{h}$ . Претпоставља се да је апсолутни притисак гаса у цевоводу око  $p=4 \cdot 10^5$  Pa. Средња температура у цевоводу је 288,15 K а средњи фактор компресибилитета гаса  $Z_{avr}=1$ .

Брзина протицања гаса је 3,53 m/s, као и Рејнолдсов број  $Re=62180,63$ . На основу Реноарове једначине за проток гаса пад притиска у цевоводу износи  $\Delta p=1231,89$  Pa. Надаље, користећи једначину, добија се:

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{4088 \cdot Q_{st}^{1,82} \cdot L \cdot \rho_r^{0,82}}{D_u^{4,82}} = \frac{4088 \cdot \left(\frac{2000}{3600}\right)^{1,82} \cdot 1000 \cdot \left(\frac{0,84}{1,28}\right)^{0,82}}{0,225^{4,82}} = 1,31 \cdot 10^9 \text{ Pa}^2$$

Ако се узме да је  $p_1=4 \cdot 10^5$  Pa, тада је  $p_2=398359$  Pa, односно пад притиска  $\Delta p=1640$  Pa.

Примењујући једначину добија се:

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{4810 \cdot Q_{st}^{1,82} \cdot L \cdot \rho_r}{4,485321 \cdot 10^{-4}} = \frac{4810 \cdot 0,3430868 \cdot 1000 \cdot 0,65625}{4,485321 \cdot 10^{-4}} = 1,43 \cdot 10^9 \text{ Pa}^2$$

Ако се узме да је  $p_1=4 \cdot 10^5$  Pa, тада је  $p_2=398208$  Pa, односно пад притиска  $\Delta p=1791$  Pa.

Процентуална разлика између резулата је око 9%.



### Пример 12:

Израчунати пад притиска користећи Реноарову једначину за проток гаса, њене упрошћене варијанте, као и користећи Шифронсонову једначину прилагођену за проток гаса. Након тога одредити који хидраулички режим протока влада у цевоводу и прокоментарисати добијене резултате. Проток у цеви пречника 0,044 m, дужине 276 m, је 27,41 m<sup>3</sup>/h. Израчунати брзину протока у цеви ако је апсолутна храпавост цеви процењена на  $\epsilon_u=0,000007$  m. Параметре који недостају узети са уобичајеним вредностима. Просечан притисак у цевоводу је  $4 \cdot 10^5$  Pa abs.

На основу Реноарове једначине за проток гаса, добија се:

$$\frac{27,41}{3600} = \frac{26,4415}{(1,0757 \cdot 10^{-5})^{0,0989}} \frac{288,15}{101325} \left[ \frac{p_1^2 - p_2^2}{276 \cdot \left(\frac{0,84}{1,28}\right)^{0,82} \cdot 288,15 \cdot 1} \right]^{1/1,82} \cdot 0,044^{4,82/1,82} = 3,84 \cdot 10^8 \text{ Pa}^2$$

Ако се узме да је  $p_1=4 \cdot 10^5$  Pa, тада је  $p_2=399519$  Pa, односно пад притиска  $\Delta p=480$  Pa.

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{4088 \cdot Q_{st}^{1,82} \cdot L \cdot \rho_r^{0,82}}{D_u^{4,82}} = \frac{4088 \cdot \left(\frac{27,41}{3600}\right)^{1,82} \cdot 276 \cdot \left(\frac{0,84}{1,28}\right)^{0,82}}{0,044^{4,82}} = 3,85 \cdot 10^8 \text{ Pa}^2$$

Ако се узме да је  $p_1=4 \cdot 10^5$  Pa, тада је  $p_2=399518$  Pa, односно пад притиска  $\Delta p=481$  Pa.

$$p_1^2 - p_2^2 = \frac{4810 \cdot Q_{st}^{1,82} \cdot L \cdot \rho_r}{D_u^{4,82}} = \frac{4810 \cdot \left(\frac{27,41}{3600}\right)^{1,82} \cdot 276 \cdot \frac{0,84}{1,28}}{0,044^{4,82}} = 4,19 \cdot 10^8 \text{ Pa}^2$$

Ако се узме да је  $p_1=4 \cdot 10^5$  Pa, тада је  $p_2=399475$  Pa, односно пад притиска  $\Delta p=524$  Pa.

Према Шифринсоновој формули, вредност Дарсијевог коефицијента хидрауличног отпора се добија као:

$$\lambda_t = 0,111 \left( \frac{\epsilon}{D_u} \right)^{1/4} = 0,111 \left( \frac{0,000007}{0,044} \right)^{1/4} = 0,0124662$$

А затим користећи Дарси-Вајсбахову формулу (3), даље се добија:

$$p_1 - p_2 = \lambda \cdot \frac{L}{D_u^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2} \cdot \rho = 0,0124662 \cdot \frac{376}{0,044^5} \cdot \frac{8 \cdot \left(\frac{27,41}{3600}\right)^2}{\pi^2} \cdot 0,89 = 823,49 \text{ Pa}$$

Брзина гаса у цеви се процењује као:

$$v = \frac{4 \cdot p_{st} \cdot Q}{D_u^2 \cdot \pi \cdot p} = \frac{4 \cdot 101320 \cdot \frac{27,41}{3600}}{0,044^2 \cdot 3,1415 \cdot 400000} = 1,26 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Тако да је Рејнолдсов број  $Re=4357,76$ , што је уз малу вредност релативне храпавости далеко од области потпуне турбуленције. Резултати добијени коришћењем Реноарове формуле за гасовите флуиде дају задовољавајуће резултате падова притисака.

### Пример 13:

Израчунати количину флуида коју може да пропусти цев пречника 123,4 mm, дужине 175 m, апсолутне храпавости  $0,002 \cdot 10^{-2}$  m ако је пад притиска 10 kPa. Прорачун извршити у складу са Реноаровим једначинама за течни, односно гасовити флуид. Проценити брзину флуида у цевоводу. Гас је у цевоводу на притиску од  $4 \cdot 10^5$  Pa abs. Густина флуида је  $0,84 \text{ kg/m}^3$ , динамичка вискозност  $1,0757 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

Релативна храпавост се рачуна као:

$$\frac{\varepsilon}{D_u} = \frac{0,002 \cdot 10^{-2}}{0,1234} = 1,62 \cdot 10^{-4}$$

При чему се проток течног флуида рачуна на основу Дарси-Вајсбахове једначине:

$$Q = \sqrt{\frac{(p_1 - p_2) \cdot D_u^5 \cdot \pi^2}{8 \cdot \lambda \cdot L \cdot \rho}}$$

Пошто је у претходној једначини непозната вредност Дарсијевог коефицијента отпора проблем нема јединствено решење, с тим да се од бесконачно много решења бира оно за најпогоднију брзину за коју се цевовод прорачунава. Овде ће се претпоставити да је брзина протока течности око 2 m/s. На основу ове брзине се рачуна Рејнолдсов број као:

$$Re = \frac{v \cdot D_u \cdot \rho}{\eta} = \frac{2 \cdot 0,1234 \cdot 0,84}{1,0757 \cdot 10^{-5}} = 19272,28$$

Дарсијев коефицијент се према Реноару рачуна као:

$$\lambda_g = 0,172 \cdot Re^{-0,18} = 0,172 \cdot 19272,28^{-0,18} = 0,02912$$

Реноарова једначина може да се користи пошто је испуњен услов пошто за дате услове у цевоводу влада хидраулички 'гладак' режим. Сходно претходном, на основу Дарси-Вајсбахове једначине се добија проток течности кроз цев у  $\text{m}^3/\text{s}$ :

$$Q = \sqrt{\frac{(p_1 - p_2) \cdot D_u^5 \cdot \pi^2}{8 \cdot \lambda \cdot L \cdot \rho}} = \sqrt{\frac{10000 \cdot 0,1234^5 \cdot 3,1415^2}{8 \cdot 0,02912 \cdot 175 \cdot 0,84}} = 0,287$$

Односно  $1033,81 \text{ m}^3/\text{h}$ , тј. брзина течности се процењује на  $24,01 \text{ m/s}$ . Наравно овако велике брзине су неодрживе у стварном систему. Када је у питању гасовити флуид примењује се упрошћена Реноарова једначина, која се уз претпоставку да је  $p_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ :

$$Q_{st} = \left[ \frac{(p_1^2 - p_2^2) \cdot D_u^{4,82}}{4810 \cdot L \cdot \rho_f} \right]^{1,82} = \left[ \frac{\left( (4 \cdot 10^5)^2 - (3,9 \cdot 10^5)^2 \right) \cdot 0,1234^{4,82}}{4810 \cdot 175 \cdot \frac{0,84}{1,28}} \right]^{1,82} = 0,7527$$

Односно  $2709,72 \text{ m}^3/\text{h}$ , тј. брзина је  $15,73 \text{ m/s}$  за гасовити флуид имајући у виду да је притисак гаса у цеви  $4 \cdot 10^5 \text{ Pa abs}$ , те је  $Q = Q_{st}/4$ . Закључак је да се добијају различите вредности у случају протока гаса и течности. Прорачун протока течности је донекле нереално приказан у овом случају пошто су узете вредности за вискозитет и густину као код природног гаса. Пример је дат да би се показало да се претпоставка о нестишљивости гаса у дистрибутивној мрежи мора узети са одговарајућим ограничењима.

### Пример 14:

Да би се приступило решавању прстенастих мрежа, корисно је као увод у проблем размотрити проток флуида кроз једну цев. Потребно је одредити проток воде кроз цев пречника 0,2204 m, дужине 84 m ако је претпостављена брзина протока воде кроз цев 2 m/s. Кинематски вискозитет воде је  $1,0037 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , густина воде је  $1000 \text{ kg/m}^3$  а храпавост цеви је дата као 0,00026 m. Пад притиска у цеви је 100 Pa.

Проблем је у овом случају једнозначно одређен, има јединствено решење те се може решити неитеративним путем. Вредност Рејнолдсовог броја се даје као:

$$Re = \frac{v \cdot D_u}{\nu} = \frac{2 \cdot 0,2204}{1,0037 \cdot 10^{-6}} = 439175,05$$

Користећи Колбрукову једначину (31), добија се вредност Дарсијевог коефицијента хидрауличног отпора:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{dt}}} = -2 \cdot \log \left( \frac{2,51}{439175,05 \cdot \sqrt{\lambda_{dt}}} + \frac{0,00026}{3,71 \cdot 0,2204} \right) \Rightarrow \lambda_{dt} = 0,021042$$

Те се из Дарси-Вајсбахове једначине може директно израчунати вредност протока у  $\text{m}^3/\text{s}$  као:

$$Q = \sqrt{\frac{(p_1 - p_2) \cdot D_u^5 \cdot \pi^2}{8 \cdot \lambda \cdot L \cdot \rho}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 0,2204^5 \cdot 3,1415^2}{8 \cdot 0,021042 \cdot 84 \cdot 1000}} = 6,024 \cdot 10^{-3}$$

тј. проток је  $21,68 \text{ m}^3/\text{h}$ , а брзина је  $0,1579 \text{ m/s}$ .

Међутим користећи принципе Харди Крос метода потребно је прво насумично претпоставити проток. Овај проток треба да задовољи само услов да колико флуида уђе у цев, исто толико мора да изађе, с тим да густина флуида, тј. у овом случају воде остане константна. Претпоставиће се да је проток  $360 \text{ m}^3/\text{h}$ , односно  $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$ . За решење проблема потребно је узети Дарси-Вајсбахову једначину као функцију у којој се проток третира као променљива док су сви остали чланови константе, те затим одредити њен извод:

$$F(Q) = \Delta p = \lambda \cdot \frac{L}{D_u^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2} \cdot \rho = 0,021042 \cdot \frac{84 \cdot 8 \cdot 0,1^2}{0,2204^5 \cdot 3,1415^2} \cdot 1000 = 27548,54$$

Први извод претходне функције је:

$$\frac{\partial(\Delta p)}{\partial Q} = \lambda \cdot \frac{L}{D_u^5} \cdot \frac{16 \cdot Q}{\pi^2} \cdot \rho = 0,021042 \cdot \frac{84 \cdot 16 \cdot 0,1}{0,2204^5 \cdot 3,1415^2} \cdot 1000 = 550970,8$$

По Харди Крос методи, поправни проток  $\Delta$  се добија као:

$$\Delta = \frac{F(Q)}{\frac{\partial(\Delta p)}{\partial Q}} = \frac{27548,54}{550970,81} = 0,05$$

Проток после прве итерације се добија као:

$$Q_1 = Q - \Delta = 0,1 - 0,05 = 0,05$$

Уколико пад притиска није приближно 100 Pa како је израчунато на уобичајени начин прелази се на другу итерацију по Харди Крос методи.

$$F(Q_1) = \Delta p = \lambda \cdot \frac{L}{D_u^5} \cdot \frac{8 \cdot Q_1^2}{\pi^2} \cdot \rho = 0,021042 \cdot \frac{84 \cdot 8 \cdot 0,05001^2}{0,2204^5 \cdot 3,1415^2} \cdot 1000 = 6887,13$$

Пошто је 6887,13 Pa различито од 100 Pa, итеративни поступак се наставља, тако да је:

$$\frac{\partial(\Delta p)}{\partial Q} = \lambda \cdot \frac{L}{D_u^5} \cdot \frac{16 \cdot Q}{\pi^2} \cdot \rho = 0,021042 \cdot \frac{84 \cdot 16 \cdot 0,05001}{0,2204^5 \cdot 3,1415^2} \cdot 1000 = 275485,4$$

Па је поправни проток  $\Delta$  у другој итерацији у  $\text{m}^3/\text{s}$ :

$$\Delta = \frac{F(Q)}{\frac{\partial(\Delta p)}{\partial Q}} = \frac{6887,13}{275485,4} = 0,025$$

#### Наставак примера 14:

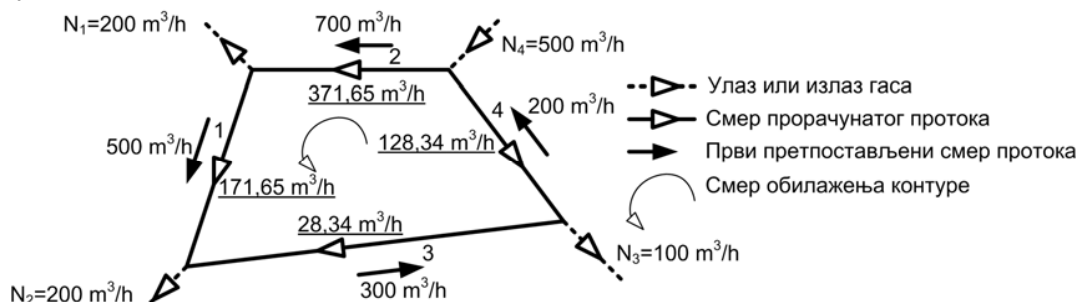
Те је проток кроз дату цев након друге итерације у  $\text{m}^3/\text{s}$ :

$$Q_2 = Q_1 - \Delta = 0,05 - 0,025 = 0,025$$

што одговара паду притиска од 1721,78 Pa, даље је на крају треће  $0,0125 \text{ m}^3/\text{s}$  што одговара паду притиска од 430,44 Pa, затим на крају четврте  $0,00625 \text{ m}^3/\text{s}$  што одговара паду притиска од 107,61 Pa, што приближно одговара тачном решењу те се итеративни поступак прекида. Харди Крос методологија успешно решава проблем конвергенције као тачном решењу што ће се у даљем тексту и показати. Харди Крос метод служи за прорачун протока у затвореној цевној контури, што је у другом делу овог проблема само карикирано јер се суштински претпоставило да се крај цеви надовезује на њен почетак чинећи бесконачну петљу, односно торус у коме се вода врти бесконачно у круг. Исти закључци се могу донети и за проток природног гаса који се неће разматрати на овако баналном примеру једне хипотетичке цеви чији су почетак и крај спојени тако да формирају торус, тј. затворени систем.

### Пример 15:

Израчунати расподелу протока гаса по цевима мреже приказане на слици за максималну потрошњу по чворовима мреже односно за улазе у мрежу као на датој слици. Пречници и дужине цеви се дају у табели. Вредности првих претпостављених протока се дају на слици, као и у табели. Релативна густина гаса је 0,64, док је улазни притисак гаса  $4 \cdot 10^5$  Pa.



Слика. Гасоводна дистрибутивна мрежа са једном петљом

Табела. Решење гасоводне дистрибутивне мреже са једном петљом према оригиналној Харди Крос методи (Слика)

Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 1			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
1	0,1098	75	0,138888889	267508687,7	3505433843,8	0,091499521
2	0,1586	80	0,194444444	89446134,5	837215818,8	0,147055076
3	0,0554	100	0,083333333	3806257069,1	83128654388,6	0,035943965
4	0,1234	85	0,055555556	32584341,4	1067463023,4	0,008166187
			Σ	4195796232,6	88538767074,6	
				Δ=F(Q)/ F'(Q)		0,047389368
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 2			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
1	0,1098	75	0,091499521	125159922,4	2489532808,5	0,069238341
2	0,1586	80	0,147055076	53798148,9	665822857,6	0,124793896
3	0,0554	100	0,035943965	823848349,3	41715041455,1	0,013682785
4	0,1234	85	0,008166187	994214,5	221580813,7	-0,014094993
			Σ	1003800635,1	45091977934,9	
				Δ=F(Q)/ F'(Q)		0,02226118
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 3			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
1	0,1098	75	0,069238341	75355323,8	1980791103,6	0,05756048
2	0,1586	80	0,124793896	39904840,8	581974057,7	0,113116036
3	0,0554	100	0,013682785	142051423,5	18894807405,8	0,002004924
4	0,1234	85	-0,014094993	-2684744,3	346664582,0	-0,025772853
			Σ	254626843,8	21804237149,1	
				Δ=F(Q)/ F'(Q)		0,011677861
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 4			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
1	0,1098	75	0,05756048	53840546,0	1702379717,5	0,045139453
2	0,1586	80	0,113116036	33370882,8	536926584,8	0,100695008
3	0,0554	100	0,002004924	4309495,0	3912008151,0	-0,010416103
4	0,1234	85	-0,025772853	-8052313,2	568629707,8	-0,038193881
			Σ	83468610,7	6719944161,0	
				Δ=F(Q)/ F'(Q)		0,012421027

Наставак примера 15:

Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 5			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
1	0,1098	75	0,045139453	34591984,6	1394731401,8	0,047465262
2	0,1586	80	0,100695008	27004003,1	488080655,7	0,103020818
3	0,0554	100	-0,010416103	-86463251,2	15107676874,1	-0,008090294
4	0,1234	85	-0,038193881	-16475310,1	785075093,9	-0,035868071
			$\Sigma$	-41342573,6	17775564025,5	
			$\Delta=F(Q)/ F'(Q) $		-0,002325809	

Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 6			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
1	0,1098	75	0,047465262	37904183,1	1453391601,1	0,047680914
2	0,1586	80	0,103020818	28149921,0	497305860,2	0,10323647
3	0,0554	100	-0,008090294	-54588727,7	12280331238,0	-0,007874641
4	0,1234	85	-0,035868071	-14695132,7	745653180,2	-0,035652419
			$\Sigma$	-3229756,3	14976681879,5	
			$\Delta=F(Q)/ F'(Q) $		-0,000215652	

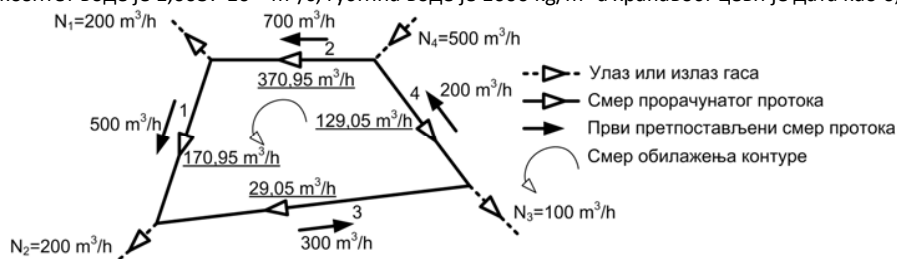
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 7			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
1	0,1098	75	0,047680914	38218194,0	1458804095,4	0,047682866
2	0,1586	80	0,10323647	28257258,2	498159323,4	0,103238422
3	0,0554	100	-0,007874641	-51969435,0	12011261109,5	-0,007872689
4	0,1234	85	-0,035652419	-14534727,3	741975005,6	-0,035650467
			$\Sigma$	-28710,1	14710199533,9	
			$\Delta=F(Q)/ F'(Q) $		-0,0000019517	

Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 8			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
1	0,1098	75	0,047682866	38221041,2	1458853059,9	0,047682866
2	0,1586	80	0,103238422	28258230,5	498167046,0	0,103238422
3	0,0554	100	-0,007872689	-51945994,8	12008819942,7	-0,007872689
4	0,1234	85	-0,035650467	-14533279,3	741941698,8	-0,035650467
			$\Sigma$	-2,4	14707781747,3	
			$\Delta=F(Q)/ F'(Q) $		-0.00000000016	

Функција разлике квадрата притисака F(Q) се добија према упрошћеној Реноаровој једначини за проток гаса. Поправни проток  $\Delta$  се алгебарски сабира са супротним знаком, од добијеног формулом  $\Delta=F(Q)/|F'(Q)|$ . Добијени протоци су након 7 итерација:  $Q_1=171,65 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_2=371,65 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_3=-28,34 \text{ m}^3/\text{h}$  и  $Q_4=-128,34 \text{ m}^3/\text{h}$ . Након седме итерације разлика квадрата почетног и крајњег притисака је само -2,4 Pa, Чиме је задовољен и други Кирхофов закон, те се мрежа сматра уравнотеженом. Након седме итерације се добија да је поправни проток само  $-1,6 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3/\text{s}$ , односно  $-5,78 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{h}$ , тако да се мрежа сматра уравнотеженом и по овом критеријуму.

### Пример 16:

Израчунати расподелу протока воде по цевима мреже приказане на слици за максималну потрошњу по чворовима мреже односно за улазе у мрежу (улази су у ствари потрошње са негативним предзнаком) као на датој слици. Пречници и дужине цеви се дају у табели 10. Вредности првих претпостављених протока се дају такође на слици, као и у табели. Кинематски вискозитет воде је  $1,0037 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , густина воде је  $1000 \text{ kg/m}^3$  а хрававост цеви је дата као  $0,00026 \text{ m}$ .



Слика. Водоводна дистрибутивна мрежа са једном петљом

Да би се израчунао пад притиска у водоводним цевима потребно је одредити Дарсијев коефицијент хидрауличног отпора по Колбруковој формули. Поступак се даје у табели само за прву итерацију, док се за остале итерације не приказује.

Табела. Прорачун Дарсијевог коефицијента хидрауличног отпора при иницијалном протоку за мрежу са слике

Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 1			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	u (m/s)	Re	λ (31)
1	0,1098	75	0,138888889	14,67	1604616,9	0,024594061
2	0,1586	80	0,194444444	9,84	1555244,1	0,022353721
3	0,0554	100	0,083333333	34,57	1908161,7	0,029823041
4	0,1234	85	0,055555556	4,65	571108,4	0,024043512

Табела. Решење водоводне дистрибутивне мреже са једном петљом према оригиналној Харди Крос методи

Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 1			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	Δp=F(Q)	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
1	0,1098	75	0,138888889	1807195,181	26023610,6	0,096054964
2	0,1586	80	0,194444444	546141,5547	5617455,991	0,151610519
3	0,0554	100	0,083333333	32168503,18	772044076,4	0,040499408
4	0,1234	85	0,055555556	178684,2443	6432632,796	0,01272163
			Σ	34700524,16	810117775,8	
			Δ=F(Q)/ F'(Q)		0,042833925	
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 2			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	Δp=F(Q)	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
1	0,1098	75	0,096054964	865997,5955	18031292,95	0,073996307
2	0,1586	80	0,151610519	332604,0752	4387612,109	0,129551863
3	0,0554	100	0,040499408	7612227,253	375917950	0,018440752
4	0,1234	85	0,01272163	9746,380071	1532253,297	-0,009337026
			Σ	8820575,304	399869108,4	
			Δ=F(Q)/ F'(Q)		0,022058656	
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 3			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	Δp=F(Q)	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
1	0,1098	75	0,073996307	514838,8763	13915258,62	0,061723343
2	0,1586	80	0,129551863	243184,4071	3754240,223	0,117278899
3	0,0554	100	0,018440752	1585111,081	171913933,5	0,006167788
4	0,1234	85	-0,009337026	-4514,823981	967079,6556	-0,02160999
			Σ	2338619,541	190550512	
			Δ=F(Q)/ F'(Q)		0,012272964	

Наставак примера 16:

Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 4			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	$\Delta p=F(Q)$	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
1	0,1098	75	0,061723343	358769,776	11625092,1	0,052321222
2	0,1586	80	0,117278899	199481,6313	3401833,288	0,107876777
3	0,0554	100	0,006167788	180055,1791	58385658,73	-0,003234334
4	0,1234	85	-0,02160999	-25704,97322	2378989,841	-0,031012112
			$\Sigma$	712601,6131	75791573,96	
			$\Delta=F(Q)/ F'(Q) $		0,009402122	
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 5			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	$\Delta p=F(Q)$	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
1	0,1098	75	0,050709681	258219,6279	9870550,421	0,045019864
2	0,1586	80	0,106265237	168927,0292	3131851,612	0,100575419
3	0,0554	100	-0,004845874	-45949,38959	28413509,6	-0,010535692
4	0,1234	85	-0,032623652	-53577,0016	3455230,785	-0,03831347
			$\Sigma$	327620,2659	44871142,42	
			$\Delta=F(Q)/ F'(Q) $		0,007301358	
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 6			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	$\Delta p=F(Q)$	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
1	0,1098	75	0,045019864	191513,5046	8507955,755	0,047252877
2	0,1586	80	0,100575419	146950,0883	2922186,936	0,102808432
3	0,0554	100	-0,010535692	-505772,4422	96011245,06	-0,008302679
4	0,1234	85	-0,03831347	-82189,61513	4290377,045	-0,036080457
			$\Sigma$	-249498,4645	111731764,8	
			$\Delta=F(Q)/ F'(Q) $		-0,002233013	
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 7			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	$\Delta p=F(Q)$	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
1	0,1098	75	0,047252877	210858,7512	8924694,804	0,047485495
2	0,1586	80	0,102808432	153508,9484	2986310,465	0,103041051
3	0,0554	100	-0,008302679	-312813,213	75352356,83	-0,00807006
4	0,1234	85	-0,036080457	-72792,19512	4034992,999	-0,035847838
			$\Sigma$	-21237,70851	91298355,1	
			$\Delta=F(Q)/ F'(Q) $		-0,000232619	
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 8			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	$\Delta p=F(Q)$	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
1	0,1098	75	0,047485495	212927,5031	8968107,062	0,047486418
2	0,1586	80	0,103041051	154200,4352	2992990,343	0,103041973
3	0,0554	100	-0,00807006	-295364,1596	73199989,2	-0,008069138
4	0,1234	85	-0,035847838	-71846,01357	4008387,542	-0,035846916
			$\Sigma$	-82,23484909	89169474,14	
			$\Delta=F(Q)/ F'(Q) $		-0,000000922	
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 9			
			Q (m <sup>3</sup> /s)	$\Delta p=F(Q)$	F'(Q)	Q (m <sup>3</sup> /s)
1	0,1098	75	0,047486418	212935,7249	8968279,173	0,04748641
2	0,1586	80	0,103041973	154203,1797	2993016,826	0,103041966
3	0,0554	100	-0,008069138	-295295,9776	73191455,87	-0,008069145
4	0,1234	85	-0,035846916	-71842,27468	4008282,062	-0,035846923
			$\Sigma$	0,652304438	89161033,93	
			$\Delta=F(Q)/ F'(Q) $		0,000000007	

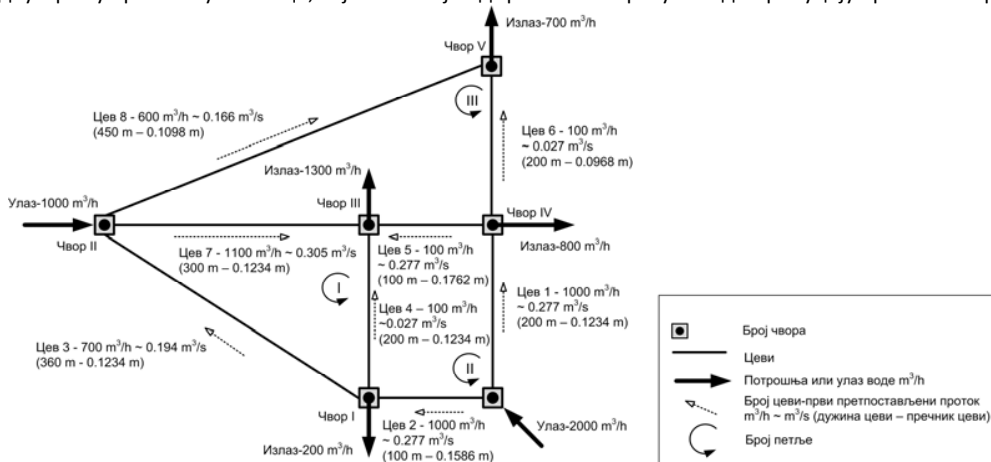


## Наставак примера 16:

Добијени протоци су након 9 итерација:  $Q_1=170,95 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_2=370,95 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_3=-29,05 \text{ m}^3/\text{h}$  и  $Q_4=-129,05 \text{ m}^3/\text{h}$ . Након девете итерације алгебарски збир падова притисака је само  $0,65 \text{ Pa}$ , чиме је задовољен и други Кирхофов закон, те се мрежа сматра уравнотеженом. Након седме итерације се добија да је поправни проток само  $7,32 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}$ , односно  $2,63 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{h}$ , тако да се мрежа сматра уравнотеженом и по овом критеријуму.

## Пример 17:

За водоводну мрежу приказану на слици, која се састоји од три петље израчунати дистрибуцију протока по гранама.



Слика. Водоводна дистрибутивна мрежа са три петље

Као што је већ раније објашњено за сваку контуру понаособ може да се добије поправни проток. Проблем су цеви које су заједничке за две контуре, односно за две петље. У случају са слике, цев 4 је заједничка за петље I и II, цев 7 за петље I и III, док је цев 5 за петље II и III. Ове цеви заједничке за две петље примају поправне протоке истовремено из прорачуна за сваку од две петље понаособ, које се алгебарски сабирају на основу посебних правила (поглавље В.1.1.).

Табела. Решење водоводне дистрибутивне мреже са три петље према оригиналној Харди Крос методи

Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 1						
			Q (m³/s)	F(Q)	F'(Q) /2	$\Delta_1$ (m³/s)	$\Delta_2$ (m³/s)	Q (m³/s)	
I	3	0,1234	360	-0,19444	-5279095,90	27149636,06	+0,12306		-0,07138
	4	0,1234	200	+0,02778	69146,85	2489286,60	+0,12306	+0,09349	+0,24433
	7	0,1234	300	-0,30556	-10718549,81	35078890,29	+0,12306	+0,01068‡	-0,17181
			$\Sigma$	-15928498,86	64717812,94				
			$\Delta=F(Q)/(2 \cdot  F'(Q) )$		-0,12306				
II	1	0,1234	200	+0,27778	5919850,58	21311462,10	-0,09349		+0,18429
	2	0,1586	100	-0,27778	-816585,14	2939706,52	-0,09349		-0,37127
	4	0,1234	200	-0,02778	-69146,85	2489286,60	-0,09349	-0,12306±	-0,24433
	5	0,1762	100	+0,02778	5967,74	214838,73	-0,09349	+0,01068	-0,05503
			$\Sigma$	5040086,33	26955293,94				
			$\Delta=F(Q)/(2 \cdot  F'(Q) )$		+0,09349				
III	5	0,1762	100	-0,02778	-5967,74	214838,73	-0,01068	+0,09349‡	+0,05503
	6	0,0968	200	+0,02778	232186,32	8358707,66	-0,01068		+0,01709
	7	0,1234	300	+0,30556	10718549,81	35078890,29	-0,01068	-0,12306=	+0,17181
	8	0,1098	450	-0,16667	-8874257,48	53245544,85	-0,01068		-0,17735
			$\Sigma$	2070510,92	96897981,53				
			$\Delta=F(Q)/(2 \cdot  F'(Q) )$		+0,01068				

Наставак примера 17:

	Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 2					
				Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q) /2	Δ <sub>1</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Δ <sub>2</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Q (m <sup>3</sup> /s)
I	3	0,1234	360	-0,07138	-750378,77	10511968,27	-0,00400		-0,07538
	4	0,1234	200	+0,24433	+4596449,25	18812565,87	-0,00400	-0,04573=	+0,19459
	7	0,1234	300	-0,17181	-3450640,31	20083999,34	-0,00400	-0,03920±	-0,21501
	Σ				395430,17	49408533,49			
						Δ=F(Q)/(2· F'(Q) )			+0,00400
II	1	0,1234	200	+0,18429	+2639603,39	14323247,91	+0,04573		+0,23002
	2	0,1586	100	-0,37127	-1443784,67	3888798,88	+0,04573		-0,32553
	4	0,1234	200	-0,24433	-4596449,25	18812565,87	+0,04573	+0,00400‡	-0,19459
	5	0,1762	100	-0,05503	-21346,51	387921,00	+0,04573	-0,03920±	-0,04850
	Σ				-3421977,04	37412533,67			
						Δ=F(Q)/(2· F'(Q) )			-0,04573
III	5	0,1762	100	+0,05503	+21346,51	387921,00	+0,03920	-0,04573=	+0,04850
	6	0,0968	200	+0,01709	+92718,55	5424102,88	+0,03920		+0,05629
	7	0,1234	300	+0,17181	+3450640,31	20083999,34	+0,03920	0,00400‡	+0,21501
	8	0,1098	450	-0,17735	-10028129,53	56544084,21	+0,03920		-0,13815
	Σ				-6463424,15	82440107,43			
						Δ=F(Q)/(2· F'(Q) )			-0,03920
	Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 3					
				Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q) /2	Δ <sub>1</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Δ <sub>2</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Q (m <sup>3</sup> /s)
I	3	0,1234	360	-0,07538	-833575,09	11057584,27	+0,03188		-0,04351
	4	0,1234	200	+0,19459	+2937264,02	15094319,19	+0,03188	+0,00017	+0,22664
	7	0,1234	300	-0,21501	-5360704,68	24932027,89	+0,03188	+0,00082‡	-0,18231
	Σ				-3257015,75	51083931,34			
						Δ=F(Q)/(2· F'(Q) )			-0,03188
II	1	0,1234	200	+0,23002	+4081332,46	17743297,74	-0,00017		+0,22985
	2	0,1586	100	-0,32553	-1114865,26	3424722,51	-0,00017		-0,32570
	4	0,1234	200	-0,19459	-2937264,02	15094319,19	-0,00017	-0,03188±	-0,22664
	5	0,1762	100	-0,04850	-16837,73	347200,56	-0,00017	+0,00082‡	-0,04785
	Σ				+12365,46	36609540,01			
						Δ=F(Q)/(2· F'(Q) )			+0,00017
III	5	0,1762	100	+0,04850	+16837,73	347200,56	-0,00082	+0,00017	+0,04785
	6	0,0968	200	+0,05629	+901625,93	16016226,16	-0,00082	‡	+0,05548
	7	0,1234	300	+0,21501	+5360704,68	24932027,89	-0,00082	-0,03188=	+0,18231
	8	0,1098	450	-0,13815	-6138778,62	44435631,16	-0,00082		-0,13897
	Σ				+140389,72	85731085,77			
						Δ=F(Q)/(2· F'(Q) )			+0,00082

Наставак примера 17:

Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 4						
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q) /2	Δ <sub>1</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Δ <sub>2</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	
I	3	0,1234	360	-0,04351	-290756,78	6683164,41	+0,00224		-0,04127
	4	0,1234	200	+0,22664	+3964131,07	17490720,72	+0,00224	-0,01309=	+0,21578
	7	0,1234	300	-0,18231	-3876633,97	21263391,69	+0,00224	-0,00878±	-0,18885
			Σ	-203259,68		45437276,82			
			Δ=F(Q)/(2· F'(Q) )		-0,00224				
II	1	0,1234	200	+0,22985	+4075434,50	17730674,76	+0,01309		+0,24295
	2	0,1586	100	-0,32570	-1116002,00	3426436,86	+0,01309		-0,31261
	4	0,1234	200	-0,22664	-3964131,07	17490720,72	+0,01309	-0,00224‡	-0,21578
	5	0,1762	100	-0,04785	-16417,30	343129,53	+0,01309	-0,00878±	-0,04353
			Σ	-1021115,87		38990961,88			
			Δ=F(Q)/(2· F'(Q) )		-0,01309				
III	5	0,1762	100	+0,04785	+16417,30	343129,53	+0,00878	-0,01309=	+0,04353
	6	0,0968	200	+0,05548	+876402,01	15797929,70	+0,00878		+0,06425
	7	0,1234	300	+0,18231	+3876633,97	21263391,69	+0,00878	-0,00224=	+0,18885
	8	0,1098	450	-0,13897	-6210334,06	44688727,43	+0,00878		-0,13019
			Σ	-1440880,78		82093178,35			
			Δ=F(Q)/(2· F'(Q) )		-0,00878				
Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 5						
			Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q) /2	Δ <sub>1</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Δ <sub>2</sub> (m <sup>3</sup> /s)	Q (m <sup>3</sup> /s)	
I	3	0,1234	360	-0,04127	-262996,94	6372725,05	+0,00908		-0,03219
	4	0,1234	200	+0,21578	+3599077,06	16679042,45	+0,00908	-0,00124=	+0,22362
	7	0,1234	300	-0,18885	-4154291,08	21997354,86	+0,00908	-0,00080±	-0,18057
			Σ	-818210,96		45049122,36			
			Δ=F(Q)/(2· F'(Q) )		-0,00908				
II	1	0,1234	200	+0,24295	+4545352,90	18709278,35	+0,00124		+0,24419
	2	0,1586	100	-0,31261	-1029578,08	3293500,05	+0,00124		-0,31136
	4	0,1234	200	-0,21578	-3599077,06	16679042,45	+0,00124	-0,00908±	-0,22362
	5	0,1762	100	-0,04353	-13753,53	315974,10	+0,00124	-0,00080±	-0,04308
			Σ	-97055,76		38997794,95			
			Δ=F(Q)/(2· F'(Q) )		-0,00124				
III	5	0,1762	100	+0,04353	+13753,53	315974,10	+0,00080	-0,00124=	+0,04308
	6	0,0968	200	+0,06425	+1165209,43	18135093,22	+0,00080		+0,06505
	7	0,1234	300	+0,18885	+4154291,08	21997354,86	+0,00080	-0,00908=	+0,18057
	8	0,1098	450	-0,13019	-5464898,78	41975427,76	+0,00080		-0,12939
			Σ	-131644,73		82423849,95			
			Δ=F(Q)/(2· F'(Q) )		-0,00080				

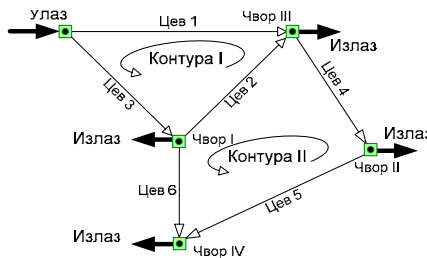
Наставак примера 17:

	Цев	Пречник (m)	Дужина (m)	Итерација 6					
				Q (m <sup>3</sup> /s)	F(Q)	F'(Q) /2	$\Delta_1$ (m <sup>3</sup> /s)	$\Delta_2$ (m <sup>3</sup> /s)	Q (m <sup>3</sup> /s)
I	3	0,1234	360	-0,03219	-164276,15	5103672,76	+0,00124		-0,03095
	4	0,1234	200	+0,22362	+3860806,10	17264927,13	+0,00124	-0,00384=	+0,22102
	7	0,1234	300	-0,18057	-3804217,60	21067666,00	+0,00124	-0,00238±	-0,18171
	$\Sigma$				-107687,64	43436265,89			
$\Delta=F(Q)/(2 \cdot  F'(Q) )$						-0,00124			
II	1	0,1234	200	+0,24419	+4591340,93	18802265,73	+0,00384		+0,24803
	2	0,1586	100	-0,31136	-1021545,65	3280865,09	+0,00384		-0,30753
	4	0,1234	200	-0,22362	-3860806,10	17264927,13	+0,00384	-0,00124±	-0,22102
	5	0,1762	100	-0,04308	-13491,42	313159,71	+0,00384	-0,00238±	-0,04163
	$\Sigma$				-304502,25	39661217,66			
$\Delta=F(Q)/(2 \cdot  F'(Q) )$						-0,00384			
III	5	0,1762	100	+0,04308	+13491,42	313159,71	+0,00238	-0,00384=	+0,04163
	6	0,0968	200	+0,06505	+1193510,00	18347516,33	+0,00238		+0,06743
	7	0,1234	300	+0,18057	+3804217,60	21067666,00	+0,00238	-0,00124=	+0,18171
	8	0,1098	450	-0,12939	-5399421,74	41728460,51	+0,00238		-0,12701
	$\Sigma$				-388202,72	81456802,55			
$\Delta=F(Q)/(2 \cdot  F'(Q) )$						-0,00238			

Слично као и у претходном примеру у коме је обрађена гасна дистрибутивна мрежа исте топологије и са истим пречницима цеви, ни водоводна мрежа после шесте итерације по основном Харди Крос методу, није ни приближно уравнотежена. Слично као на примеру гасоводне мреже, водоводна мрежа се може сматрати уравнотеженом тек негде после педесете итерације, са дистрибуцијом протока:  $Q_1=902,27 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_2=1097,73 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_3=94,86 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_4=802,87 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_5=-146,23 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_6=248,50 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_7=643,36 \text{ m}^3/\text{h}$ ,  $Q_8=451,50 \text{ m}^3/\text{h}$ . Последње три итерације се овде не приказују као у случају прорачуна гасоводне мреже. Знак минус (-) испред бројчане вредности крајњег протока у цеви 5 значи да је смер протока у овој цеви обрнут од првобитно претпостављеног.

### Пример 18:

За просту мрежу са слике упоредити брзину конвергенције користећи основни Харди Крос метод као и модификовани Харди Крос метод.



Слика. Гасна прстенаста дистрибутивна мрежа

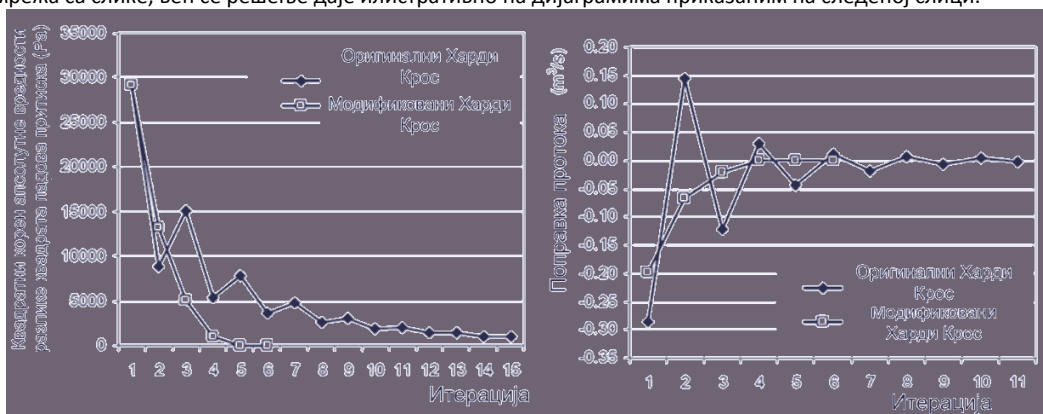
Ако се све контуре описују у истом смеру, а нема цеви које се укрштају, сви чланови ван главне дијагонале у матрици градијената су са негативним предзнаком. Чланови на главној дијагонали су увек позитивни. Поступак се даље одвија итеративно као у случају оригиналног Харди Крос метода.

$$[\text{grad}F(Q)] = [\nabla F(Q)] = \begin{bmatrix} \left| \frac{\partial F_I(Q_1, Q_2, Q_3)}{\partial(\Delta Q_1)} \right| & - \left| \frac{\partial F_I(Q_2)}{\partial(\Delta Q_2)} \right| \\ - \left| \frac{\partial F_{II}(Q_2)}{\partial(\Delta Q_1)} \right| & \left| \frac{\partial F_{II}(Q_2, Q_4, Q_5, Q_6)}{\partial(\Delta Q_2)} \right| \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \begin{array}{cc} n \cdot (R_1 \cdot Q_1^{n-1} + R_2 \cdot Q_2^{n-1} + R_3 \cdot Q_3^{n-1}) & - n \cdot R_2 \cdot Q_2^{n-1} \\ - n \cdot R_2 \cdot Q_2^{n-1} & n \cdot (R_2 \cdot Q_2^{n-1} + R_4 \cdot Q_4^{n-1} + R_5 \cdot Q_5^{n-1} + R_6 \cdot Q_6^{n-1}) \end{array} \right]^{(m-1)}$$

У једначини се у члановима ван главне дијагонале појављује као аргумент само проток кроз цев 2 пошто је ова цев једина заједничка за више контура (у овом случају за једине две контуре).

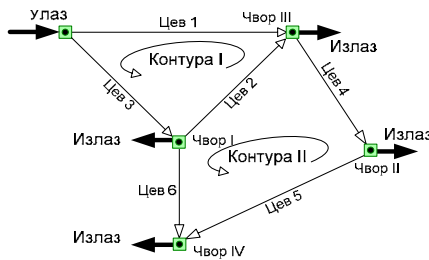
У даљем тексту се не дају резултати детаљног нумеричког прорачуна у виду табела за дати проблем када се има у виду проста мрежа са слике, већ се решење даје илустративно на дијаграмима приказаним на следећој слици.



Слика. Понашање прорачунатог пада притиска и поправке протока по итерацијама рачунао према оригиналном и модификованом Харди Крос методу за мрежу – контура I

### Пример 19:

Извршити математички опис мреже приказане на слици.



Слика. Гасна прстенаста дистрибутивна мрежа

Са слике се види да мрежа има две независне контуре, тј. петље (када се дефинише стабло, остају још две гране, што значи на основу теорије графова која је већ изнета у претходној дискусији у оквиру ове дисертације значи да мрежа има две независне контуре).

Основне претпоставке које морају бити задовољене по Харди-Крос методи је да алгебарски збир протока по чвору, рачунајући и потрошњу гаса сведену на чвор буде једнак нули (први Кирхофов закон) – једначина континуитета, и да укупан збир разлике квадрата притиска на почетку и крају цеви (односно падова притисака у случају водоводних мрежа) по контурама на крају прорачуна мора тежити нули (други Кирхофов закон) – једначина одржања енергије.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{\text{II-output}} \\ Q_{\text{III-output}} \\ Q_{\text{IV-output}} \\ Q_{\text{V-output}} \end{bmatrix}$$

Чвор 1 се произвољно узима као референтан.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \tilde{p}_1^2 \\ \Delta \tilde{p}_2^2 \\ \Delta \tilde{p}_3^2 \\ \Delta \tilde{p}_4^2 \\ \Delta \tilde{p}_5^2 \\ \Delta \tilde{p}_6^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

За случај водоводних мрежа:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \Delta p_3 \\ \Delta p_4 \\ \Delta p_5 \\ \Delta p_6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### Наставак примера 19:

Тако да једна од могућих редукованих матрица чворова може да се запише као:

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Док матрица независних контура која је јединствена гласи:

$$[L] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ако су претходне једначине добро написане тада важи:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Цела матрица чворова члаци:

$$[N^*] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Редукована матрица чворова  $[N]$  која има линеарно независне редове се добија изостављањем било ког реда матрице  $[N^*]$ .

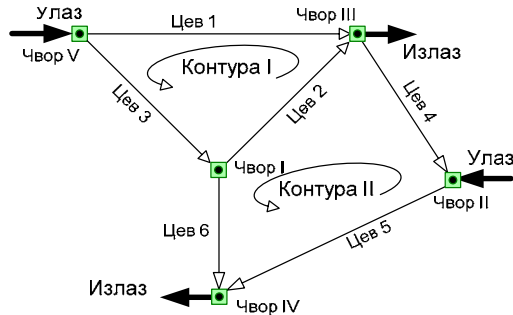
Матрични изрази у развијеном облику се дају у Табели.

**Табела.** Значење матричних једначина у развијеном облику

Први Кирхофов закон			
Улазни чвор: $Q_{input} = Q_1 + Q_3$			
-Чвор I	-Чвор II	-Чвор III	-Чвор IV
$Q_{output I} + Q_2 + Q_6 = Q_3$	$Q_{output II} + Q_5 = Q_4$	$Q_{output III} + Q_4 = Q_1 + Q_2$	$Q_{output IV} = Q_6 + Q_5$
Други Кирхофов закон – гасоводна мрежа			
-Контура (Петља) I	-Контура (Петља) II		
$\Delta \tilde{p}_2^2 + \Delta \tilde{p}_3^2 = \Delta \tilde{p}_1^2$	$\Delta \tilde{p}_2^2 + \Delta \tilde{p}_4^2 + \Delta \tilde{p}_5^2 = \Delta \tilde{p}_6^2$		
Други Кирхофов закон – водоводна мрежа			
-Контура (Петља) I	-Контура (Петља) II		
$\Delta p_2 + \Delta p_3 = \Delta p_1$	$\Delta p_2 + \Delta p_4 + \Delta p_5 = \Delta p_6$		

### Пример 20:

Прорачунати мрежу приказану на слици обједињеном метом чворова и прстенова. Проблем се поставља као класичан, тј. мрежа је задата а прорачунава се расподела протока по цевима мреже.



Слика. Цевоводна мрежа за дистрибуцију флуида прстеног типа

Почетна матрица контура као и матрица чворова је истоветна за дату мрежу било да се користи за дистрибуцију гаса или воде. На слици чвор I је само спој цевима 2, 3 и 6 и стога није ни улазни ни излазни. Матрица чворова [N'] одговара првом Кирхофовом закону, а матрица контура [L] другом Кирхофовом закону. Иницијална матрица чворова за мрежу са слике се може написати као:

$$[N'] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

У претходно приказаној матрици [N'] колоне одговарају цевима, а редови чворовима, тако да нпр. за први чвор почетни протоци у цевима 2 и 6 су усмерени од тог чвора, док је почетни проток кроз цев 3 усмерен ка чвору I. За чвор I су повезане само цевима 2, 3 и 6. Зато у првом реду у колони 2 и 6 стоје јединице са негативним предзнаком, у колони 3 јединица са позитивним предзнаком, док на осталим местима стоје нуле. Истом логиком су формиран и остали редови у матрици чворова. Матрица чворова [N'] је линеарно зависна, тако да се може назвати и проширеном матрицом чворова. Да би се уклонила линеарна зависност између редова матрице [N'] потребно је изоставити било који ред дате матрице чиме се суштински не губи ниједна информација о самој мрежи:

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Код матрице контура [L] овакав проблем не постоји, тако да се одмах може написати:

$$[L] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Такође као и код матрице чворова, колоне одговарају цевима, а редови контурама. Нпр. контуру 1 за мрежу са слике 1 чине цевима 1, 2 и 3. На осталим местима у првом реду матрице [L] стоје нуле; управо зато што те цевима и не припадају првој контури. Усвајајући да је одабрани смер обилазак контуре у смеру обрнутом од окретања казаљке на сату то се први иницијални протоци у цевима 2 и 3 поклапају са овако одабраним смером, док се у цевима 1 не поклапа. Стога у првом реду матрице [L] у колони 2 и 3 стоје јединице са позитивним предзнаком, а у колони 1 са негативним.



## Наставак примера 20:

Разлика квадрата притисака на почетку и крају цеви у случају протока природног гаса се уобичајено прорачунава коришћењем једначине Реноара:

$$F = p_2^2 - p_1^2 = 4810 \cdot \frac{\rho_r \cdot L \cdot Q_{st}^{1,82}}{D_u^{4,82}}$$

Када је проток воде у питању користи се уобичајено Дарси-Вајсбахова једначина којом се одређује пад притиска у цеви:

$$F = p_1 - p_2 = \lambda \cdot \frac{L}{D_u^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2} \cdot \rho$$

Дарсијев коефицијент хидрауличног отпора се у случају протока воде рачуна према формули Колбрука и Вајта:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log \left( \frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3,71 \cdot D} \right)$$

И за случај протока воде као и гаса функција контура за мрежу са слике се може написати као:

$$\left. \begin{aligned} F_I &= -F_1 + F_2 + F_3 \\ F_{II} &= -F_2 - F_4 - F_5 + F_6 \end{aligned} \right\}$$

У претодној једначини римски бројеви се односе на контуре, а арапски на цеви. У функцији контура се у нашем случају само протоци посматрају као промењиве, а пошто се они и траже, потребно је наћи прве изводе функција контура:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_I(Q)}{\partial Q} &= -\frac{\partial F_1(Q)}{\partial Q} + \frac{\partial F_2(Q)}{\partial Q} + \frac{\partial F_3(Q)}{\partial Q} \\ \frac{\partial F_{II}(Q)}{\partial Q} &= -\frac{\partial F_2(Q)}{\partial Q} - \frac{\partial F_4(Q)}{\partial Q} - \frac{\partial F_5(Q)}{\partial Q} + \frac{\partial F_6(Q)}{\partial Q} \end{aligned} \right\}$$

За проток кроз нпр. цев 1 у случају природног гаса овај извод је:

$$F_1' = \frac{\partial F_1(Q)}{\partial Q} = 1,82 \cdot 4810 \cdot \frac{\rho_r \cdot L \cdot Q_1^{0,82}}{D_1^{4,82}}$$

Док се у случају протока воде он даје као:

$$F_1' = \frac{\partial F_1(Q)}{\partial Q} = \lambda \cdot \frac{L}{D_u^5} \cdot \frac{16 \cdot Q}{\pi^2} \cdot \rho$$

где се Дарсијев коефицијент хидрауличног отпора  $\lambda$  рачуна као што је већ речено према.

Матрица протока [Q] који се траже у прорачуну у који су улазни подаци у свакој итерацији, односно који су уједно и коначан резултат који се добија након последње итерације, добија се из матричне једначине:

$$[NL]x[Q]=[V]$$

Односно:

$$[Q]=inv[NL]x [V]$$

### Наставак примера 20:

Матрица [NL] је обједињујућа матрица чворова и контура, где се првих n-1 редова преписује директно из матрице чворова, док се остали редови добијају из матрице контура, уз корекцију да се у делу матрице који се односи на контуре мреже сваки члан који одговара одређеној цеви множи са изводом  $F'$  који одговара тој цеви:

$$[NL] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 \cdot F'_1 & 1 \cdot F'_2 & 1 \cdot F'_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 \cdot F'_2 & 0 & -1 \cdot F'_4 & -1 \cdot F'_5 & 1 \cdot F'_6 \end{bmatrix}$$

У претходној дискусији је n број чворова.

У матрици [V] првих n-1 редова се односи на потрошњу по чворовима која је непроменљива у прорачуну. Први чвор који смо претходно одредили да буде референтни чвор се изоставља из матрице [V]. Матрица [V] има само једну колону. Остали редови ове једноколонске матрице се добијају преко функција појединих цеви, односно преко функција контура као и преко протока прорачунатих у претходној итерацији, односно преко улазних протока у посматраној итерацији:

$$[V] = \begin{bmatrix} -|Q_{/II/}| \\ +|Q_{/III/}| \\ +|Q_{/IV/}| \\ -|Q_{/V/}| \\ -F_I + (-|Q_I| \cdot F'_1 + |Q_2| \cdot F'_2 + |Q_3| \cdot F'_3) \\ -F_{II} + (-|Q_2| \cdot F'_2 - |Q_4| \cdot F'_4 - |Q_5| \cdot F'_5 + |Q_6| \cdot F'_6) \end{bmatrix}$$

Ознака / / између које стоји римски број се односи на чвор. Уколико је предзнак негативан то значи да је тај чвор улазни, односно да је у суми већа количина флуида који улази у мрежу од оног који излази уколико је чвор улазно-излазни. У матрици [V] која је овде приказана чворови II и V су улазни, док су чворови III и IV излазни.

У овом проблему се даје прорачун расподеле протока флуида кроз цевоводну мрежу, при чему се дужине и пречници цеви, као и потрошња узимају као константе у прорачуну. Улази флуида у мрежу се посматрају као негативна потрошња, Предност над другим методама као што је нпр. модификована Харди Кросова је у томе што се као резултат прорачуна добијају директно протоци флуида по цевима а не поправке протока са којима је релативно тешко манипулисати.

Пример 21:

Надаље се уместо табела дају слике прорачуна првих 9 итерација како би прорачун могао да се прати

Итерација 1

Pipe	D (m)	L (m)	Q (m³/s)	sign (Q)	Re	e/D	fM*	λ	R	R·Q	Σ R·Q	
Loop 1	#1	0.305	457.2	-0.0481	-1	2.00E+05	0.0008525	6.99494	0.02044	2869652.14	-6651.53	276315.62
	#9	0.203	243.8	0.0556	1	3.47E+05	0.0012808	6.80600	0.02159	12375413.49	38195.72	1375045.94
	#10	0.152	396.2	0.0139	1	1.16E+05	0.0017105	6.44112	0.02410	95403391.97	18403.43	2650094.22
	#15	0.152	335.3	-0.0065	-1	5.41E+04	0.0017105	6.24716	0.02562	85830318.30	-3601.58	1111979.46
											Σ	46346.04
Loop 2	#8	0.203	762.0	0.0038	1	2.35E+04	0.0012808	6.01121	0.02767	49583923.90	703.49	373532.23
	#10	0.152	396.2	-0.0139	-1	1.16E+05	0.0017105	6.44112	0.02410	95403391.97	-18403.43	2650094.22
	#14	0.152	548.6	-0.0009	-1	7.70E+03	0.0017105	5.31667	0.03538	193887105.83	-164.90	357614.00
											Σ	-17864.85
Loop 3	#2	0.203	304.8	-0.0417	-1	2.60E+05	0.0012808	6.77140	0.02181	15630337.92	-27136.00	1302528.16
	#11	0.152	304.8	0.0194	1	1.62E+05	0.0017105	6.49924	0.02367	72087749.09	27255.40	2803412.46
	#15	0.152	335.3	0.0065	1	5.41E+04	0.0017105	6.24716	0.02562	85830318.30	3601.58	1111979.46
	#17	0.254	365.9	-0.0056	-1	2.77E+04	0.0010236	6.15795	0.02637	7397946.07	-228.33	82199.40
											Σ	3492.64
Loop 4	#7	0.203	304.8	0.0047	1	2.93E+04	0.0012808	6.12050	0.02669	19131581.48	420.62	179411.72
	#11	0.152	304.8	-0.0194	-1	1.62E+05	0.0017105	6.49924	0.02367	72087749.09	-27255.40	2803412.46
	#14	0.152	548.6	0.0009	1	7.70E+03	0.0017105	5.31667	0.03538	193887105.83	164.90	357614.00
	#16	0.152	548.6	0.0048	1	3.98E+04	0.0017105	6.14137	0.02651	145310638.57	3301.62	1385294.75
											Σ	-23368.26
Loop 5	#3	0.203	365.8	-0.0361	-1	2.26E+05	0.0012808	6.75092	0.02194	18872424.67	-24609.87	1363008.45
	#12	0.254	335.3	-0.0144	-1	7.21E+04	0.0010236	6.59141	0.02302	5916965.44	-1232.63	170803.07
	#17	0.254	365.9	0.0056	1	2.77E+04	0.0010236	6.15795	0.02637	7397946.07	228.33	82199.40
	#19	0.152	396.2	-0.0028	-1	2.32E+04	0.0017105	5.91506	0.02858	113127682.00	-872.90	628487.12
											Σ	-26487.07
Loop 6	#6	0.203	335.3	-0.0001	-1	4.86E+02	0.0012808	3.47539	0.08279	65273625.75	-0.39	10153.68
	#12	0.254	335.3	0.0144	1	7.21E+04	0.0010236	6.59141	0.02302	5916965.44	1232.63	170803.07
	#16	0.152	548.6	-0.0048	-1	3.98E+04	0.0017105	6.14137	0.02651	145310638.57	-3301.62	1385294.75
	#18	0.152	548.6	0.0025	1	2.09E+04	0.0017105	5.86519	0.02907	159317570.61	995.73	796587.85
											Σ	-1073.65
Loop 7	#4	0.203	609.6	-0.0018	-1	1.15E+04	0.0012808	5.60581	0.03182	45611970.25	-153.31	167243.89
	#13	0.254	304.8	-0.0092	-1	4.57E+04	0.0010236	6.40383	0.02438	5698450.17	-477.67	104344.95
	#19	0.152	396.2	0.0028	1	2.32E+04	0.0017105	5.91506	0.02858	113127682.00	872.90	628487.12
											Σ	241.92
Loop 8	#5	0.203	853.4	-0.0278	-1	1.74E+05	0.0012808	6.70692	0.02223	44608416.80	-34420.07	2478245.38
	#13	0.254	304.8	0.0092	1	4.57E+04	0.0010236	6.40383	0.02438	5698450.17	477.67	104344.95
	#18	0.152	548.6	-0.0025	-1	2.09E+04	0.0017105	5.86519	0.02907	159317570.61	-995.73	796587.85
											Σ	-34938.14

Слика. Решење класичног проблема са слике 42 обједињеном методом чворова и прстенова (итерација 1), пример прорачуна водовода

Наставак примера 21:

Итерација 2

	Pipe	D (m)	L (m)	Q (m³/s)	sign (Q)	Re	e/D	fA*	λ	R	R·Q'	Σ R·Q
Loop 1	#1	0.305	457.2	-0.05563	-1	2.31E+05	0.0008525	7.02681	0.02025	2843684.59	-8801.46	316408.44
	#9	0.203	243.8	0.04807	1	3.00E+05	0.0012808	6.78961	0.02169	12435222.67	28730.16	1195434.46
	#10	0.152	396.2	0.00582	1	4.86E+04	0.0017105	6.21227	0.02591	102561998.64	-3477.07	1194344.70
	#15	0.152	335.3	-0.01781	-1	1.49E+05	0.0017105	6.48549	0.02377	79638102.16	-25263.69	2836866.10
											Σ	-1857.93
Loop 2	#8	0.203	762.0	0.00434	1	2.71E+04	0.0012808	6.08321	0.02702	48417203.13	913.61	420640.70
	#10	0.152	396.2	-0.00582	-1	4.86E+04	0.0017105	6.21227	0.02591	102561998.64	-3477.07	1194344.70
	#14	0.152	548.6	-0.01135	-1	9.47E+04	0.0017105	6.39866	0.02442	133859761.45	-17228.98	3037280.19
											Σ	-19792.44
Loop 3	#2	0.203	304.8	-0.03782	-1	2.36E+05	0.0012808	6.75780	0.02190	15693286.22	-22449.95	1187120.12
	#11	0.152	304.8	0.01229	1	1.03E+05	0.0017105	6.41615	0.02429	73967086.58	11169.61	1817893.04
	#15	0.152	335.3	0.01781	1	1.49E+05	0.0017105	6.48549	0.02377	79638102.16	25263.69	2836866.10
	#17	0.254	365.9	-0.01822	-1	9.10E+04	0.0010236	6.67312	0.02246	6299790.73	-2091.36	229566.01
											Σ	11891.99
Loop 4	#7	0.203	304.8	0.01569	1	9.80E+04	0.0012808	6.57715	0.02312	16567206.10	4077.89	519843.34
	#11	0.152	304.8	-0.01229	-1	1.03E+05	0.0017105	6.41615	0.02429	73967086.58	-11169.61	1817893.04
	#14	0.152	548.6	0.01135	1	9.47E+04	0.0017105	6.39866	0.02442	133859761.45	17228.98	3037280.19
	#16	0.152	548.6	0.00304	1	2.54E+04	0.0017105	5.95614	0.02819	154489182.89	1426.60	938924.61
											Σ	11563.87
Loop 5	#3	0.203	365.8	-0.01960	-1	1.22E+05	0.0012808	6.63375	0.02272	19545012.04	-7510.26	766258.98
	#12	0.254	335.3	-0.01065	-1	5.32E+04	0.0010236	6.47028	0.02389	6140574.99	-696.81	130825.44
	#17	0.254	365.9	0.01822	1	9.10E+04	0.0010236	6.67312	0.02246	6299790.73	2091.36	229566.01
	#19	0.152	396.2	0.00088	1	7.34E+03	0.0017105	5.28802	0.03576	141547018.87	109.58	249088.73
											Σ	-6006.13
Loop 6	#6	0.203	335.3	0.01265	1	7.91E+04	0.0012808	6.51454	0.02356	18577033.71	2972.80	470003.50
	#12	0.254	335.3	0.01065	1	5.32E+04	0.0010236	6.47028	0.02389	6140574.99	696.81	130825.44
	#16	0.152	548.6	-0.00304	-1	2.54E+04	0.0017105	5.95614	0.02819	154489182.89	-1426.60	938924.61
	#18	0.152	548.6	0.00149	1	1.24E+04	0.0017105	5.93671	0.03193	174969486.41	389.20	521910.22
											Σ	2632.21
Loop 7	#4	0.203	609.6	0.01102	1	6.88E+04	0.0012808	6.47010	0.02389	34239921.87	4156.38	754490.54
	#13	0.254	304.8	-0.01004	-1	5.01E+04	0.0010236	6.44481	0.02408	5626217.52	-567.24	112985.56
	#19	0.152	396.2	-0.00088	-1	7.34E+03	0.0017105	5.28802	0.03576	141547018.87	-109.58	249088.73
											Σ	3479.55
Loop 8	#5	0.203	853.4	-0.01404	-1	8.77E+04	0.0012808	6.54588	0.02334	46830293.82	-9232.98	1315117.33
	#13	0.254	304.8	0.01004	1	5.01E+04	0.0010236	6.44481	0.02408	5626217.52	567.24	112985.56
	#18	0.152	548.6	-0.00149	-1	1.24E+04	0.0017105	5.93671	0.03193	174969486.41	-389.20	521910.22
											Σ	-9054.94

Слика. Решење класичног проблема са слике 42 обједињеном методом чворова и прстенова (итерација 2), пример прорачуна водовода

Наставак примера 21:

Итерација 3

	Pipe	D (m)	L (m)	Q (m <sup>3</sup> /s)	sign (Q)	Re	e/D	f/h*	λ	R	R·Q'	2·R·Q
Loop 1	H1	0.305	457.2	-0.05535	-1	2.30E+05	0.0008525	7.02573	0.02026	2844552.46	-8714.66	314892.40
	H9	0.203	243.8	0.04835	1	3.02E+05	0.0012808	6.79032	0.02169	12432641.55	29063.97	1202234.49
	H10	0.152	396.2	0.00205	1	1.71E+04	0.0017105	5.76627	0.03008	119040910.18	499.68	487779.72
	H15	0.152	335.3	-0.01572	-1	1.31E+05	0.0017105	6.46422	0.02393	80162958.20	-19805.55	2520056.93
											Σ	1043.44
Loop 2	H8	0.203	762.0	0.00840	1	5.25E+04	0.0012808	6.37303	0.02462	44113701.36	3113.50	741209.99
	H10	0.152	396.2	-0.00205	-1	1.71E+04	0.0017105	5.76627	0.03008	119040910.18	-499.68	487779.72
	H14	0.152	548.6	-0.00687	-1	5.74E+04	0.0017105	6.26574	0.02547	139599533.36	-6597.01	1919312.54
											Σ	-3983.19
Loop 3	H2	0.203	304.8	-0.03963	-1	2.48E+05	0.0012808	6.76450	0.02185	15662243.88	-24600.29	1241443.97
	H11	0.152	304.8	0.01089	1	9.09E+04	0.0017105	6.38938	0.02450	74588100.80	8850.07	1624943.04
	H15	0.152	335.3	0.01572	1	1.31E+05	0.0017105	6.46422	0.02393	80162958.20	19805.55	2520056.93
	H17	0.254	365.9	-0.02375	-1	1.19E+05	0.0010236	6.75441	0.02192	6149069.04	-3469.61	292129.25
											Σ	585.72
Loop 4	H7	0.203	304.8	0.01528	1	9.55E+04	0.0012808	6.56982	0.02317	16604228.86	3874.44	507275.23
	H11	0.152	304.8	-0.01089	-1	9.09E+04	0.0017105	6.38938	0.02450	74588100.80	-8850.07	1624943.04
	H14	0.152	548.6	0.00687	1	5.74E+04	0.0017105	6.26574	0.02547	139599533.36	6597.01	1919312.54
	H16	0.152	548.6	0.00271	1	2.26E+04	0.0017105	5.90373	0.02869	157244532.20	1155.81	852631.70
											Σ	2777.19
Loop 5	H3	0.203	365.8	-0.01588	-1	9.92E+04	0.0012808	6.58040	0.02309	19863194.88	-5007.60	630767.65
	H12	0.254	335.3	-0.00684	-1	3.42E+04	0.0010236	6.26523	0.02548	6549083.64	-306.59	89619.20
	H17	0.254	365.9	0.02375	1	1.19E+05	0.0010236	6.75441	0.02192	6149069.04	3469.61	292129.25
	H19	0.152	396.2	0.00643	1	5.37E+04	0.0017105	6.24495	0.02564	101491208.31	4200.13	1305797.00
											Σ	2355.55
Loop 6	H6	0.203	335.3	0.01256	1	7.85E+04	0.0012808	6.51243	0.02358	18589074.64	2934.51	467118.09
	H12	0.254	335.3	0.00684	1	3.42E+04	0.0010236	6.26523	0.02548	6549083.64	306.59	89619.20
	H16	0.152	548.6	-0.00271	-1	2.26E+04	0.0017105	5.90373	0.02869	157244532.20	-1155.81	852631.70
	H18	0.152	548.6	-0.00311	-1	2.59E+04	0.0017105	5.96637	0.02809	153959764.87	-1488.14	957317.45
											Σ	597.15
Loop 7	H4	0.203	609.6	0.00919	1	5.74E+04	0.0012808	6.40658	0.02436	34922271.71	2948.85	641811.69
	H13	0.254	304.8	-0.01638	-1	8.18E+04	0.0010236	6.63708	0.02270	5304969.56	-1424.07	173834.92
	H19	0.152	396.2	-0.00643	-1	5.37E+04	0.0017105	6.24495	0.02564	101491208.31	-4200.13	1305797.00
											Σ	-2675.35
Loop 8	H5	0.203	853.4	-0.00953	-1	5.95E+04	0.0012808	6.41968	0.02426	48689636.23	-4418.97	927702.74
	H13	0.254	304.8	0.01638	1	8.18E+04	0.0010236	6.63708	0.02270	5304969.56	1424.07	173834.92
	H18	0.152	548.6	0.00311	1	2.59E+04	0.0017105	5.96637	0.02809	153959764.87	1488.14	957317.45
											Σ	-1506.76

Слика. Решење класичног проблема са слике 42 обједињеном методом чворова и прстенова (итерација 3), пример прорачуна водовода

Наставак примера 21:

Итерација 4

	Pipe	D (m)	L (m)	Q (m³/s)	sign (Q)	Re	e/D	1/k*	λ	R	R·Q	2·R·Q
Loop 1	H1	0.305	457.2	-0.05566	-1	2.32E+05	0.0008525	7.02691	0.02025	2843602.72	-8809.71	316552.17
	H9	0.203	243.8	0.04804	1	3.00E+05	0.0012808	6.78955	0.02169	12435468.89	28698.61	1194789.71
	H10	0.152	396.2	0.00069	1	5.78E+03	0.0017105	5.13866	0.03787	149894863.89	71.78	207450.75
	H15	0.152	335.3	-0.01568	-1	1.31E+05	0.0017105	6.46382	0.02393	80172934.94	-19718.92	2514695.49
											Σ	241.75
Loop 2	H8	0.203	762.0	0.00945	1	5.90E+04	0.0012808	6.41667	0.02429	43515664.57	3884.09	822237.60
	H10	0.152	396.2	-0.00069	-1	5.78E+03	0.0017105	5.13866	0.03787	149894863.89	-71.78	207450.75
	H14	0.152	548.6	-0.00555	-1	4.63E+04	0.0017105	6.19580	0.02605	142768691.79	-4394.44	1584156.67
											Σ	-582.13
Loop 3	H2	0.203	304.8	-0.03998	-1	2.50E+05	0.0012808	6.76571	0.02185	15656609.89	-25022.35	1251823.07
	H11	0.152	304.8	0.01083	1	9.04E+04	0.0017105	6.38798	0.02451	74620901.20	8747.27	1615833.42
	H15	0.152	335.3	0.01568	1	1.31E+05	0.0017105	6.46382	0.02393	80172934.94	19718.92	2514695.49
	H17	0.254	365.9	-0.02362	-1	1.18E+05	0.0010236	6.75278	0.02193	6152031.01	-3431.74	290600.76
											Σ	12.09
Loop 4	H7	0.203	304.8	0.01500	1	9.37E+04	0.0012808	6.56466	0.02320	16630296.40	3739.62	498762.15
	H11	0.152	304.8	-0.01083	-1	9.04E+04	0.0017105	6.38798	0.02451	74620901.20	-8747.27	1615833.42
	H14	0.152	548.6	0.00555	1	4.63E+04	0.0017105	6.19580	0.02605	142768691.79	4394.44	1584156.67
	H16	0.152	548.6	0.00248	1	2.07E+04	0.0017105	5.86146	0.02911	159520305.04	981.71	791459.46
											Σ	368.49
Loop 5	H3	0.203	365.8	-0.01636	-1	1.02E+05	0.0012808	6.58840	0.02304	19814964.23	-5302.94	648313.30
	H12	0.254	335.3	-0.00727	-1	3.63E+04	0.0010236	6.29550	0.02523	6486263.69	-343.20	94362.48
	H17	0.254	365.9	0.02362	1	1.18E+05	0.0010236	6.75278	0.02193	6152031.01	3431.74	290600.76
	H19	0.152	396.2	0.00492	1	4.11E+04	0.0017105	6.15319	0.02641	104540996.86	2532.27	1029031.47
											Σ	317.88
Loop 6	H6	0.203	335.3	0.01251	1	7.82E+04	0.0012808	6.51120	0.02359	18596081.93	2912.54	465453.98
	H12	0.254	335.3	0.00727	1	3.63E+04	0.0010236	6.29550	0.02523	6486263.69	343.20	94362.48
	H16	0.152	548.6	-0.00248	-1	2.07E+04	0.0017105	5.86146	0.02911	159520305.04	-981.71	791459.46
	H18	0.152	548.6	-0.00395	-1	3.30E+04	0.0017105	6.06877	0.02715	148808348.33	-2326.80	1176855.87
											Σ	-52.77
Loop 7	H4	0.203	609.6	0.01022	1	6.39E+04	0.0012808	6.44448	0.02408	34512726.26	3604.20	705381.53
	H13	0.254	304.8	-0.01615	-1	8.07E+04	0.0010236	6.63204	0.02274	5313037.89	-1385.75	171610.65
	H19	0.152	396.2	-0.00492	-1	4.11E+04	0.0017105	6.15319	0.02641	104540996.86	-2532.27	1029031.47
											Σ	-313.83
Loop 8	H5	0.203	853.4	-0.00873	-1	5.46E+04	0.0012808	6.38761	0.02451	49179678.44	-3748.89	858765.03
	H13	0.254	304.8	0.01615	1	8.07E+04	0.0010236	6.63204	0.02274	5313037.89	1385.75	171610.65
	H18	0.152	548.6	0.00395	1	3.30E+04	0.0017105	6.06877	0.02715	148808348.33	2326.80	1176855.87
											Σ	-36.34

Слика. Решење класичног проблема са слике 42 обједињеном методом чворова и прстенова (итерација 4), пример прорачуна водовода

Наставак примера 21:

Итерација 5

	Pipe	D (m)	L (m)	Q (m <sup>3</sup> /s)	sign (Q)	Re	e/D	1/h*	λ	R	R·Q'	2·R·Q
Loop 1	#1	0.305	457.2	-0.05574	-1	2.32E+05	0.0008525	7.02719	0.02025	2843374.46	-8832.78	316953.56
	#9	0.203	243.8	0.04796	1	3.00E+05	0.0012808	6.78936	0.02169	12436157.83	28610.59	1192989.21
	#10	0.152	396.2	0.00041	1	3.45E+03	0.0017105	4.80534	0.04331	17141165.71	29.32	141786.12
	#15	0.152	335.3	-0.01571	-1	1.31E+05	0.0017105	6.46414	0.02393	80165020.76	-19787.60	2518946.72
										Σ	19.54	
Loop 2	#8	0.203	762.0	0.00965	1	6.03E+04	0.0012808	6.42432	0.02423	43412049.72	4043.44	837935.59
	#10	0.152	396.2	-0.00041	-1	3.45E+03	0.0017105	4.80534	0.04331	17141165.71	-29.32	141786.12
	#14	0.152	548.6	-0.00532	-1	4.44E+04	0.0017105	6.18133	0.02617	143437967.71	-4063.49	1526903.14
										Σ	-49.37	
Loop 3	#2	0.203	304.8	-0.04002	-1	2.50E+05	0.0012808	6.76588	0.02184	15655851.17	-25079.99	1253233.66
	#11	0.152	304.8	0.01080	1	9.02E+04	0.0017105	6.38744	0.02451	74633389.08	8708.58	1612390.63
	#15	0.152	335.3	0.01571	1	1.31E+05	0.0017105	6.46414	0.02393	80165020.76	19787.60	2518946.72
	#17	0.254	365.9	-0.02356	-1	1.18E+05	0.0010236	6.75210	0.02193	6153268.41	-3416.10	289966.61
										Σ	0.09	
Loop 4	#7	0.203	304.8	0.01497	1	9.36E+04	0.0012808	6.56425	0.02321	16632391.68	3729.07	498089.47
	#11	0.152	304.8	-0.01080	-1	9.02E+04	0.0017105	6.38744	0.02451	74633389.08	-8708.58	1612390.63
	#14	0.152	548.6	0.00532	1	4.44E+04	0.0017105	6.18133	0.02617	143437967.71	4063.49	1526903.14
	#16	0.152	548.6	0.00243	1	2.03E+04	0.0017105	5.85137	0.02921	160071210.24	944.89	777816.46
										Σ	28.86	
Loop 5	#3	0.203	365.8	-0.01646	-1	1.03E+05	0.0012808	6.59007	0.02303	19804939.13	-5367.38	652075.66
	#12	0.254	335.3	-0.00741	-1	3.70E+04	0.0010236	6.30430	0.02516	6468168.55	-354.80	95810.81
	#17	0.254	365.9	0.02356	1	1.18E+05	0.0010236	6.75210	0.02193	6153268.41	3416.10	289966.61
	#19	0.152	396.2	0.00471	1	3.93E+04	0.0017105	6.13658	0.02656	105107638.48	2327.60	989238.85
										Σ	21.51	
Loop 6	#6	0.203	335.3	0.01254	1	7.84E+04	0.0012808	6.51192	0.02358	18591963.15	2925.43	466430.78
	#12	0.254	335.3	0.00741	1	3.70E+04	0.0010236	6.30430	0.02516	6468168.55	354.80	95810.81
	#16	0.152	548.6	-0.00243	-1	2.03E+04	0.0017105	5.85137	0.02921	160071210.24	-944.89	777816.46
	#18	0.152	548.6	-0.00397	-1	3.31E+04	0.0017105	6.06996	0.02714	148749933.45	-2339.62	1179862.17
										Σ	-4.28	
Loop 7	#4	0.203	609.6	0.01033	1	6.46E+04	0.0012808	6.44827	0.02405	34472133.70	3679.70	712312.40
	#13	0.254	304.8	-0.01608	-1	8.03E+04	0.0010236	6.63047	0.02275	5315552.85	-1374.10	170927.91
	#19	0.152	396.2	-0.00471	-1	3.93E+04	0.0017105	6.13658	0.02656	105107638.48	-2327.60	989238.85
										Σ	-21.99	
Loop 8	#5	0.203	853.4	-0.00869	-1	5.43E+04	0.0012808	6.38586	0.02452	49206727.49	-3716.07	855231.91
	#13	0.254	304.8	0.01608	1	8.03E+04	0.0010236	6.63047	0.02275	5315552.85	1374.10	170927.91
	#18	0.152	548.6	0.00397	1	3.31E+04	0.0017105	6.06996	0.02714	148749933.45	2339.62	1179862.17
										Σ	-2.35	

Слика. Решење класичног проблема са слике 42 обједињеном методом чворова и прстенова (итерација 5), пример прорачуна водовода

Наставак примера 21:

Итерација 6

	Pipe	D (m)	L (m)	Q (m³/s)	sign (Q)	Re	e/D	1/k*	λ	R	R·Q²	2·R·Q
Loop 1	H1	0.305	457.2	-0.05574	-1	2.32E+05	0.0008525	7.02721	0.02025	2843356.29	-8834.62	316985.55
	H9	0.203	243.8	0.04796	1	3.00E+05	0.0012808	6.78934	0.02169	12436212.82	28603.58	1192845.71
	H10	0.152	396.2	0.00039	1	3.24E+03	0.0017105	4.76414	0.04406	174388505.12	26.34	135556.68
	H5	0.152	335.3	-0.01571	-1	1.31E+05	0.0017105	6.46417	0.02393	80164241.62	-19794.38	2519365.99
											Σ	0.93
Loop 2	H8	0.203	762.0	0.00967	1	6.04E+04	0.0012808	6.42502	0.02422	43402583.86	4058.44	839397.03
	H10	0.152	396.2	-0.00039	-1	3.24E+03	0.0017105	4.76414	0.04406	174388505.12	-26.34	135556.68
	H4	0.152	548.6	-0.00530	-1	4.43E+04	0.0017105	6.18003	0.02618	143498468.57	-4035.28	1521915.39
											Σ	-3.18
Loop 3	H2	0.203	304.8	-0.04003	-1	2.50E+05	0.0012808	6.76589	0.02184	15655799.34	-25083.94	1253330.13
	H11	0.152	304.8	0.01080	1	9.01E+04	0.0017105	6.38739	0.02451	74634662.50	8704.65	1612040.34
	H5	0.152	335.3	0.01571	1	1.31E+05	0.0017105	6.46417	0.02393	80164241.62	19794.38	2519365.99
	H7	0.254	365.9	-0.02356	-1	1.18E+05	0.0010236	6.75206	0.02193	6153348.13	-3415.09	289925.85
											Σ	0.00
Loop 4	H7	0.203	304.8	0.01497	1	9.36E+04	0.0012808	6.56424	0.02321	16632456.44	3728.74	498068.71
	H11	0.152	304.8	-0.01080	-1	9.01E+04	0.0017105	6.38739	0.02451	74634662.50	-8704.65	1612040.34
	H4	0.152	548.6	0.00530	1	4.43E+04	0.0017105	6.18003	0.02618	143498468.57	4035.28	1521915.39
	H6	0.152	548.6	0.00243	1	2.02E+04	0.0017105	5.85069	0.02921	160108404.93	942.47	776910.43
											Σ	1.84
Loop 5	H3	0.203	365.8	-0.01647	-1	1.03E+05	0.0012808	6.59018	0.02303	19804279.85	-5371.66	652324.52
	H12	0.254	335.3	-0.00742	-1	3.70E+04	0.0010236	6.30493	0.02516	6466882.98	-355.65	95915.19
	H7	0.254	365.9	0.02356	1	1.18E+05	0.0010236	6.75206	0.02193	6153348.13	3415.09	289925.85
	H9	0.152	396.2	0.00469	1	3.91E+04	0.0017105	6.13536	0.02657	105149322.33	2313.45	986422.73
											Σ	1.23
Loop 6	H6	0.203	335.3	0.01255	1	7.84E+04	0.0012808	6.51199	0.02358	18591579.46	2926.63	466521.97
	H12	0.254	335.3	0.00742	1	3.70E+04	0.0010236	6.30493	0.02516	6466882.98	355.65	95915.19
	H6	0.152	548.6	-0.00243	-1	2.02E+04	0.0017105	5.85069	0.02921	160108404.93	-942.47	776910.43
	H8	0.152	548.6	-0.00397	-1	3.31E+04	0.0017105	6.07000	0.02714	148747661.06	-2340.12	1179979.40
											Σ	-0.32
Loop 7	H4	0.203	609.6	0.01034	1	6.46E+04	0.0012808	6.44855	0.02405	34469125.42	3685.39	712831.02
	H13	0.254	304.8	-0.01607	-1	8.03E+04	0.0010236	6.63035	0.02275	5315737.63	-1373.25	170877.95
	H9	0.152	396.2	-0.00469	-1	3.91E+04	0.0017105	6.13536	0.02657	105149322.33	-2313.45	986422.73
											Σ	-1.31
Loop 8	H5	0.203	853.4	-0.00869	-1	5.43E+04	0.0012808	6.38572	0.02452	49208840.33	-3713.52	854957.05
	H13	0.254	304.8	0.01607	1	8.03E+04	0.0010236	6.63035	0.02275	5315737.63	1373.25	170877.95
	H8	0.152	548.6	0.00397	1	3.31E+04	0.0017105	6.07000	0.02714	148747661.06	2340.12	1179979.40
											Σ	-0.15

Слика. Решење класичног проблема са слике 42 обједињеном методом чворова и прстенова (итерација 6), пример прорачуна водовода



Наставак примера 21:

Итерација 7

1	Pipe	D (m)	L (m)	Q (m³/s)	sign (Q)	Re	e/D	1/h*	λ	R	R·Q	2·R·Q	
2	Loop 1	H/	0.305	457.2	-0.05574	-1	2.32E+05	0.0008525	7.02721	0.02025	2843355.50	-8834.70	316986.95
3		H9/	0.203	243.8	0.04796	1	3.00E+05	0.0012808	6.78934	0.02169	12436215.23	28603.27	1192839.44
4		H10/	0.152	396.2	0.00039	1	3.23E+03	0.0017105	4.76152	0.04411	174580242.45	26.16	135172.17
5		H15/	0.152	335.3	-0.01571	-1	1.31E+05	0.0017105	6.46417	0.02393	80164204.83	-19794.70	2519385.80
6											Σ	0.05	
7	Loop 2	H8/	0.203	762.0	0.00967	1	6.04E+04	0.0012808	6.42507	0.02422	43401951.95	4059.45	839494.75
8		H10/	0.152	396.2	-0.00039	-1	3.23E+03	0.0017105	4.76152	0.04411	174580242.45	-26.16	135172.17
9		H4/	0.152	548.6	-0.00530	-1	4.42E+04	0.0017105	6.17994	0.02618	143502354.70	-4033.48	1521596.04
10											Σ	-0.20	
11	Loop 3	H2/	0.203	304.8	-0.04003	-1	2.50E+05	0.0012808	6.76589	0.02184	15655797.23	-25084.10	1253334.06
12		H11/	0.152	304.8	0.01080	1	9.01E+04	0.0017105	6.38739	0.02451	74634733.49	8704.43	1612020.82
13		H15/	0.152	335.3	0.01571	1	1.31E+05	0.0017105	6.46417	0.02393	80164204.83	19794.70	2519385.80
14		H7/	0.254	365.9	-0.02356	-1	1.18E+05	0.0010236	6.75206	0.02193	6153353.16	-3415.03	289923.28
15											Σ	0.00	
16	Loop 4	H7/	0.203	304.8	0.01497	1	9.36E+04	0.0012808	6.56424	0.02321	16632455.46	3728.75	498069.02
17		H11/	0.152	304.8	-0.01080	-1	9.01E+04	0.0017105	6.38739	0.02451	74634733.49	-8704.43	1612020.82
18		H4/	0.152	548.6	0.00530	1	4.42E+04	0.0017105	6.17994	0.02618	143502354.70	4033.48	1521596.04
19		H6/	0.152	548.6	0.00243	1	2.02E+04	0.0017105	5.85065	0.02921	160110712.91	942.32	776854.28
20											Σ	0.11	
21	Loop 5	H3/	0.203	365.8	-0.01647	-1	1.03E+05	0.0012808	6.59019	0.02303	19804245.22	-5371.88	652337.60
22		H2/	0.254	335.3	-0.00742	-1	3.70E+04	0.0010236	6.30497	0.02516	6466804.98	-355.70	95921.53
23		H7/	0.254	365.9	0.02356	1	1.18E+05	0.0010236	6.75206	0.02193	6153353.16	3415.03	289923.28
24		H9/	0.152	396.2	0.00469	1	3.91E+04	0.0017105	6.13529	0.02657	105151761.22	2312.62	986258.42
25											Σ	0.07	
26	Loop 6	H6/	0.203	335.3	0.01255	1	7.84E+04	0.0012808	6.51199	0.02358	18591548.24	2926.73	466529.39
27		H2/	0.254	335.3	0.00742	1	3.70E+04	0.0010236	6.30497	0.02516	6466804.98	355.70	95921.53
28		H15/	0.152	548.6	-0.00243	-1	2.02E+04	0.0017105	5.85065	0.02921	160110712.91	-942.32	776854.28
29		H8/	0.152	548.6	-0.00397	-1	3.31E+04	0.0017105	6.07000	0.02714	148747633.48	-2340.13	1179980.82
30											Σ	-0.02	
31	Loop 7	H4/	0.203	609.6	0.01034	1	6.46E+04	0.0012808	6.44857	0.02405	34468935.92	3685.74	712863.71
32		H13/	0.254	304.8	-0.01607	-1	8.03E+04	0.0010236	6.63034	0.02275	5315748.35	-1373.20	170875.05
33		H9/	0.152	396.2	-0.00469	-1	3.91E+04	0.0017105	6.13529	0.02657	105151761.22	-2312.62	986258.42
34											Σ	-0.08	
35	Loop 8	H5/	0.203	853.4	-0.00869	-1	5.43E+04	0.0012808	6.38571	0.02452	49208991.31	-3713.34	854937.41
36		H13/	0.254	304.8	0.01607	1	8.03E+04	0.0010236	6.63034	0.02275	5315748.35	1373.20	170875.05
37		H8/	0.152	548.6	0.00397	1	3.31E+04	0.0017105	6.07000	0.02714	148747633.48	2340.13	1179980.82
38											Σ	-0.01	

Слика. Решење класичног проблема са слике 42 обједињеном методом чворова и прстенова (итерација 7), пример прорачуна водовода

Наставак примера 21:

Итерација 8

	Pipe	D (m)	L (m)	Q (m <sup>3</sup> /s)	sign (Q)	Re	e/D	f/λ*	λ	R	R·Q'	2·R·Q	
Loop 1	H1	0.305	457.2	-0.05574	-1	2.32E+05	0.0008525	7.02721	0.02025	2843355.46	-8834.70	316987.01	
	H9	0.203	243.8	0.04796	1	3.00E+05	0.0012808	6.78934	0.02169	12436215.34	28603.26	1192839.16	
	H10	0.152	396.2	0.00039	1	3.23E+03	0.0017105	4.76136	0.04411	174591802.66	26.15	135149.05	
	H15	0.152	335.3	-0.01571	-1	1.31E+05	0.0017105	6.46417	0.02393	80164203.05	-19794.71	2519386.76	
											Σ	0.00	
Loop 2	H8	0.203	762.0	0.00967	1	6.04E+04	0.0012808	6.42507	0.02422	43401912.03	4059.51	839500.93	
	H10	0.152	396.2	-0.00039	-1	3.23E+03	0.0017105	4.76136	0.04411	174591802.66	-26.15	135149.05	
	H14	0.152	548.6	-0.00530	-1	4.42E+04	0.0017105	6.17994	0.02618	143502594.69	-4033.37	1521576.32	
											Σ	-0.01	
Loop 3	H2	0.203	304.8	-0.04003	-1	2.50E+05	0.0012808	6.76589	0.02184	15655797.14	-25084.11	1253334.22	
	H11	0.152	304.8	0.01080	1	9.01E+04	0.0017105	6.38739	0.02451	74634737.49	8704.42	1612019.72	
	H15	0.152	335.3	0.01571	1	1.31E+05	0.0017105	6.46417	0.02393	80164203.05	19794.71	2519386.76	
	H17	0.254	365.9	-0.02356	-1	1.18E+05	0.0010236	6.75206	0.02193	6153353.45	-3415.02	289923.13	
											Σ	0.00	
Loop 4	H7	0.203	304.8	0.01497	1	9.36E+04	0.0012808	6.56424	0.02321	16632455.23	3728.75	498069.10	
	H11	0.152	304.8	-0.01080	-1	9.01E+04	0.0017105	6.38739	0.02451	74634737.49	-8704.42	1612019.72	
	H14	0.152	548.6	0.00530	1	4.42E+04	0.0017105	6.17994	0.02618	143502594.69	4033.37	1521576.32	
	H16	0.152	548.6	0.00243	1	2.02E+04	0.0017105	5.85064	0.02921	16010861.82	942.31	776850.65	
											Σ	0.01	
Loop 5	H3	0.203	365.8	-0.01647	-1	1.03E+05	0.0012808	6.59019	0.02303	19804243.40	-5371.89	652338.29	
	H12	0.254	335.3	-0.00742	-1	3.70E+04	0.0010236	6.30497	0.02516	6466800.28	-355.70	95921.91	
	H17	0.254	365.9	0.02356	1	1.18E+05	0.0010236	6.75206	0.02193	6153353.45	3415.02	289923.13	
	H19	0.152	396.2	0.00469	1	3.91E+04	0.0017105	6.13529	0.02657	105151901.95	2312.58	986248.95	
											Σ	0.00	
Loop 6	H6	0.203	335.3	0.01255	1	7.84E+04	0.0012808	6.51199	0.02358	18591545.97	2926.74	466529.93	
	H12	0.254	335.3	0.00742	1	3.70E+04	0.0010236	6.30497	0.02516	6466800.28	355.70	95921.91	
	H16	0.152	548.6	-0.00243	-1	2.02E+04	0.0017105	5.85064	0.02921	16010861.82	-942.31	776850.65	
	H18	0.152	548.6	-0.00397	-1	3.31E+04	0.0017105	6.07000	0.02714	148747637.66	-2340.13	1179980.61	
											Σ	0.00	
Loop 7	H4	0.203	609.6	0.01034	1	6.46E+04	0.0012808	6.44857	0.02405	34468924.33	3685.77	712865.71	
	H13	0.254	304.8	-0.01607	-1	8.03E+04	0.0010236	6.63034	0.02275	5315748.95	-1373.19	170874.89	
	H19	0.152	396.2	-0.00469	-1	3.91E+04	0.0017105	6.13529	0.02657	105151901.95	-2312.58	986248.95	
											Σ	0.00	
Loop 8	H5	0.203	853.4	-0.00869	-1	5.43E+04	0.0012808	6.38571	0.02452	49209001.46	-3713.32	854936.09	
	H13	0.254	304.8	0.01607	1	8.03E+04	0.0010236	6.63034	0.02275	5315748.95	1373.19	170874.89	
	H18	0.152	548.6	0.00397	1	3.31E+04	0.0017105	6.07000	0.02714	148747637.66	2340.13	1179980.61	
											Σ	0.00	

Слика. Решење класичног проблема са слике 42 обједињеном методом чворова и прстенова (итерација 8), пример прорачуна водовода

Наставак примера 21:

Итерација 9

	Pipe	D (m)	L (m)	Q (m³/s)	sign (Q)	Re	e/D	1/k*	λ	R	R·Q'	2·R·Q	
Loop 1	#1	0.305	457.2	-0.05574	-1	2.32E+05	0.0008525	7.02721	0.02025	2843355.46	-8834.70	316987.01	
	#9	0.203	243.8	0.04796	1	3.00E+05	0.0012808	6.78934	0.02169	12436215.34	28603.26	1192839.14	
	#10	0.152	396.2	0.00039	1	3.23E+03	0.0017105	4.76136	0.04411	174592506.73	26.15	135147.64	
	#15	0.152	335.3	-0.01571	-1	1.31E+05	0.0017105	6.46417	0.02393	80164202.95	-19794.71	2519386.81	
											Σ	0.00	
Loop 2	#8	0.203	762.0	0.00967	1	6.04E+04	0.0012808	6.42507	0.02422	43401909.54	4059.51	839501.31	
	#10	0.152	396.2	-0.00039	-1	3.23E+03	0.0017105	4.76136	0.04411	174592506.73	-26.15	135147.64	
	#14	0.152	548.6	-0.00530	-1	4.42E+04	0.0017105	6.17994	0.02618	143502609.48	-4033.36	1521575.10	
											Σ	0.00	
Loop 3	#2	0.203	304.8	-0.04003	-1	2.50E+05	0.0012808	6.76589	0.02184	15655797.14	-25084.11	1253334.23	
	#11	0.152	304.8	0.01080	1	9.01E+04	0.0017105	6.38739	0.02451	74634737.72	8704.42	1612019.65	
	#15	0.152	335.3	0.01571	1	1.31E+05	0.0017105	6.46417	0.02393	80164202.95	19794.71	2519386.81	
	#17	0.254	365.9	-0.02356	-1	1.18E+05	0.0010236	6.75206	0.02193	6153353.47	-3415.02	289923.12	
											Σ	0.00	
Loop 4	#7	0.203	304.8	0.01497	1	9.36E+04	0.0012808	6.56424	0.02321	16632455.21	3728.75	498069.10	
	#11	0.152	304.8	-0.01080	-1	9.01E+04	0.0017105	6.38739	0.02451	74634737.72	-8704.42	1612019.65	
	#14	0.152	548.6	0.00530	1	4.42E+04	0.0017105	6.17994	0.02618	143502609.48	4033.36	1521575.10	
	#16	0.152	548.6	0.00243	1	2.02E+04	0.0017105	5.85064	0.02921	16010871.68	942.31	776850.41	
											Σ	0.00	
Loop 5	#3	0.203	365.8	-0.01647	-1	1.03E+05	0.0012808	6.59019	0.02303	19804243.30	-5371.90	652338.32	
	#12	0.254	335.3	-0.00742	-1	3.70E+04	0.0010236	6.30497	0.02516	6466799.99	-355.70	95921.94	
	#17	0.254	365.9	0.02356	1	1.18E+05	0.0010236	6.75206	0.02193	6153353.47	3415.02	289923.12	
	#19	0.152	396.2	0.00469	1	3.91E+04	0.0017105	6.13529	0.02657	105151910.09	2312.57	986248.40	
											Σ	0.00	
Loop 6	#6	0.203	335.3	0.01255	1	7.84E+04	0.0012808	6.51199	0.02358	18591545.82	2926.74	466529.97	
	#12	0.254	335.3	0.00742	1	3.70E+04	0.0010236	6.30497	0.02516	6466799.99	355.70	95921.94	
	#16	0.152	548.6	-0.00243	-1	2.02E+04	0.0017105	5.85064	0.02921	16010871.68	-942.31	776850.41	
	#18	0.152	548.6	-0.00397	-1	3.31E+04	0.0017105	6.07000	0.02714	148747638.24	-2340.13	1179980.58	
											Σ	0.00	
Loop 7	#4	0.203	609.6	0.01034	1	6.46E+04	0.0012808	6.44857	0.02405	34468923.63	3685.77	712865.88	
	#13	0.254	304.8	-0.01607	-1	8.03E+04	0.0010236	6.63034	0.02275	5315748.99	-1373.19	170874.88	
	#19	0.152	396.2	-0.00469	-1	3.91E+04	0.0017105	6.13529	0.02657	105151910.09	-2312.57	986248.40	
											Σ	0.00	
Loop 8	#5	0.203	853.4	-0.00869	-1	5.43E+04	0.0012808	6.38571	0.02452	49209002.12	-3713.32	854936.01	
	#13	0.254	304.8	0.01607	1	8.03E+04	0.0010236	6.63034	0.02275	5315748.99	1373.19	170874.88	
	#18	0.152	548.6	0.00397	1	3.31E+04	0.0017105	6.07000	0.02714	148747638.24	2340.13	1179980.58	
											Σ	0.00	

Слика. Решење класичног проблема са слике 42 обједињеном методом чворова и прстенова (итерација 9), пример прорачуна водовода

Пример 22:

Итерација 1

Loop	Pipe	Q (m³/s)	D (m)	L (m)	sign (Q)	Re	e/D	1/n	λ	R	R D <sup>5</sup>	-5 R Q <sup>4</sup>	first correction	ΔD (m)		
Loop 1	M1	0.0557	-0.266407	457.2	-1	2.65E+05	0.000375351	6.36336	0.02062	23.74350303	-17693.7016	-332080.5842	0.008434	-0.257373		
	M3	0.0480	0.247108	243.8	1	2.46E+05	0.001052171	6.30023	0.02100	3.546056339	10360.7112	-203633.2917	0.008434	0.255542		
	M5	0.0004	0.0221569	336.2	1	2.21E+04	0.01122291	4.85962	0.04234	0.002037071	377875.5136	-85111306.5	0.008434	-0.0044		
	M5	0.0157	-0.141448	335.3	-1	1.41E+05	0.001838129	6.42753	0.02421	1.624440818	-28583.1483	-1014122.486	0.008434	-0.0156		
											Σ	-341853.37	-66667148.37			
														-0.008434		
Loop 2	M7	0.0037	0.1103676	762.0	1	1.11E+05	0.002343026	6.22135	0.02583	1.492303322	88690.19675	-3396213.031	0.004385	0.115353		
	M9	0.0004	-0.022199	336.2	-1	2.21E+04	0.01122291	4.85962	0.04234	0.002037071	-377875.514	-85111306.5	0.004385	-0.026247		
	M4	0.0053	-0.082159	548.6	-1	8.19E+04	0.003164583	5.36738	0.02806	0.350363181	-93756.6346	-5705781.743	0.004385	-0.0142		
														-0.004385		
														-3481307.34		
														-382941.95		
														-0.004385117		
Loop 3	M2	0.0400	-0.225754	304.8	-1	2.25E+05	0.001151635	6.82364	0.02148	8.501509347	-14438.2786	-321107.5557	0.015621	-0.210133		
	M1	0.0108	0.1172613	304.8	1	1.17E+05	0.00221727	6.26868	0.02545	0.733249809	33073.36219	-1410241.948	0.015621	0.118701		
	M5	0.0157	0.1414481	335.3	1	1.41E+05	0.001838129	6.42753	0.02421	1.624440818	28683.14631	-1014122.486	0.015621	0.148635		
	M6	0.0236	-0.173191	365.9	-1	1.73E+05	0.001501232	6.53906	0.02236	3.713614668	-24237.3163	-700304.3761	0.015621	-0.068029		
														Σ	-23006.32	
															-3443716.37	
															-0.015620814	
Loop 4	M7	0.0150	0.1380723	304.8	1	1.38E+05	0.001883071	6.40707	0.02436	1.34925038	26888.05181	-973694.3716	0.014181	0.152253		
	M1	0.0108	-0.117261	304.8	-1	1.17E+05	0.00221727	6.26868	0.02545	0.733249809	-33073.36222	-1410241.948	0.014181	-0.118701		
	M4	0.0053	0.0821593	548.6	1	8.19E+04	0.003164583	5.36738	0.02808	0.350363181	93756.63457	-5705781.743	0.014181	0.031955		
	M6	0.0024	-0.0555774	548.6	1	5.54E+04	0.004678159	5.63639	0.03148	0.082373056	155354.3352	-13378444.66	0.014181	-0.068117		
														Σ	242326.26	
															-22064162.74	
															-0.014180871	
Loop 5	M3	0.0165	-0.14481	365.8	-1	1.44E+05	0.001795461	6.44743	0.02406	1.934772725	-30383.867	-1043091.057	0.003238	-0.141571		
	M7	0.0074	-0.091715	335.3	-1	9.68E+04	0.002675587	6.10953	0.02679	0.400502103	-46220.3508	-2378203.032	0.003238	-0.095578		
	M5	0.0236	0.173191	365.9	1	1.73E+05	0.001501232	6.53906	0.02236	3.779814868	24257.31687	-700304.3761	0.003238	0.160809		
	M9	0.0047	0.0772724	336.2	1	7.70E+04	0.003364716	5.31545	0.02658	0.20184039	73263.03538	-414056.887	0.003238	0.01143		
														Σ	20916.13	
															-8868771.35	
															-0.003238221	
Loop 6	M2	0.0125	0.1263327	335.3	1	1.26E+05	0.00205708	6.33220	0.02434	1.067045152	33080.52315	-1308640.232	0.001641	0.128034		
	M1	0.0074	-0.0917143	335.3	-1	9.68E+04	0.002675587	6.10953	0.02679	0.400502103	-46220.35077	-2378203.032	0.001641	-0.095578		
	M6	0.0024	-0.055577	548.6	-1	5.54E+04	0.004678159	5.63639	0.03148	0.082373056	-155354.336	-13378444.68	0.001641	-0.068117		
	M8	0.0040	-0.071064	548.6	-1	7.08E+04	0.00365865	5.84453	0.02328	0.204803389	-112333.079	-7950463.223	0.001641	-0.072592		
														Σ	-183053.14	
															-25613751.23	
															-0.001641433	
Loop 7	M4	0.0103	0.114744	609.6	1	1.14E+05	0.002265913	6.25030	0.02560	1.352430381	67396.04388	-2362944.386	-0.001485	0.113253		
	M3	0.0161	-0.143053	304.8	-1	1.43E+05	0.001817508	6.43709	0.02413	1.540257957	-25710.3363	-838631.9108	-0.001485	-0.147708		
	M5	0.0047	-0.077272	336.2	-1	7.70E+04	0.003364716	5.31545	0.02858	0.20184039	-73263.0354	-414056.887	-0.001485	-0.081936		
														Σ	-30977.38	
															-8602443.78	
															0.001485466	
Loop 8	M5	0.0087	-0.105168	853.4	-1	1.05E+05	0.002472223	6.17648	0.02621	1.368230261	-106354.361	-5056391.832	0.003169	-0.101939		
	M3	0.0161	0.143053	304.8	1	1.43E+05	0.001817508	6.43709	0.02413	1.540257957	25710.33627	-838631.9108	0.003169	0.147708		
	M8	0.0040	0.0710645	548.6	1	7.08E+04	0.00365865	5.84453	0.02328	0.204803389	112333.0723	-7950463.223	0.003169	0.072592		
														Σ	32395.11	
															-13905486.37	
															-0.003169262	
Variables																
constants																
stopping criterion (stop when result is 0.00)																
										Inputs						
										roughness (m)						
										Leq (mm)						
iteration 1 iteration 2 iteration 3 iteration 4 iteration 5 iteration 6 iteration 7																

Слика. Решење оптимизационог проблема са слике 42 модификованом Харди Крос методом (итерација 1)

Наставак примера 22:

Итерација 2

Loop	Pipe	Q (m <sup>3</sup> /s)	D (m)	L (m)	sign (G)	Pc	s/D	H <sup>*</sup>	λ	R	R D <sup>5</sup>	-5 R Q <sup>4</sup>	first correction	D (m)				
Loop 1	H/	0.0557	-0.25737	457.2	-1	2.74E+05	0.001007857	6.34723	0.02072	23.85755777	-20881.1134	-404714.8958	0.005750	-0.252223				
	H3/	0.0480	0.255542	243.8	1	2.38E+05	0.001017447	6.31706	0.02090	3.439661476	8717.651843	-170572.0242	0.005750	0.261232				
	H10/	0.0004	0.026247	336.2	1	1.87E+04	0.003905741	4.35206	0.04078	0.001961727	157473.1667	-29397853.78	0.005750	-0.0018				
	H5/	0.0157	-0.14864	335.3	-1	1.34E+05	0.001743248	6.45309	0.02401	1.611537027	-22214.3839	-747236.4091	0.005750	-0.004				
												Σ	123094.72	-31320433.11				
Loop 2	H8/	0.0097	0.115353	762.0	1	1.06E+05	0.002253956	6.24238	0.02566	1.482543681	72588.77034	-3146382.26	0.001801	0.117154				
	H10/	0.0004	-0.02625	336.2	-1	1.87E+04	0.003905741	4.35206	0.04078	0.001961727	-157473.167	-29397853.78	0.001801	-0.0057				
	H4/	0.0053	-0.03196	548.6	-1	7.31E+04	0.002827468	6.02558	0.02754	0.344234337	-52357.1944	-2846883.79	0.001801	-0.0104				
													Σ	-13724159	-35391125.83			
Loop 3	H2/	0.0400	-0.21013	304.8	-1	2.42E+05	0.001237309	6.78533	0.02172	8.537731284	-20385.1061	-433328.1235	0.003362	-0.206171				
	H10/	0.0108	0.118701	304.8	1	1.5E+05	0.002190373	6.27518	0.02539	0.731730884	31050.35437	-1307945.539	0.003362	-0.0104				
	H5/	0.0157	0.148635	335.3	1	1.34E+05	0.001743248	6.45309	0.02401	1.611537027	22214.38393	-747236.4091	0.003362	-0.0057				
	H7/	0.0236	-0.16081	365.3	-1	1.86E+05	0.00161683	6.55875	0.02325	3.826422469	-35583.438	-1106331.639	0.003362	7.4E-05				
												Σ	-3302.60	-3660363.83				
Loop 4	H7/	0.0150	0.152253	304.8	1	1.25E+05	0.001707682	6.45619	0.02339	1.328733943	16241.54437	-333372.8069	0.010332	0.162646				
	H10/	0.0108	-0.1187	304.8	-1	1.5E+05	0.002190373	6.27518	0.02539	0.731730884	-31050.355	-1307945.539	0.010332	-0.004				
	H4/	0.0053	0.031955	548.6	1	7.31E+04	0.002827468	6.02558	0.02754	0.344234337	52357.19439	-2846883.79	0.010332	-0.0018				
	H6/	0.0024	0.068117	548.6	1	4.52E+04	0.003816371	5.73304	0.03036	0.079458571	54183.62531	-3977255.866	0.010332	0.00301				
												Σ	31731.41	-8665464.06				
Loop 5	H3/	0.0165	-0.14167	365.8	-1	1.45E+05	0.001836529	6.43532	0.02415	1.942059218	-34143.5522	-4206039.41	-0.000074	-0.141645				
	H2/	0.0074	-0.035578	335.3	-1	3.84E+04	0.002720287	6.10047	0.02687	0.40163312	-50361.76457	-2634585.224	-0.000074	0.00301				
	H7/	0.0236	0.160803	365.3	1	1.86E+05	0.00161683	6.55875	0.02325	3.826422469	35583.43802	-1106331.639	-0.000074	-0.004				
	H3/	0.0047	0.081936	336.2	1	7.26E+04	0.003170881	5.34715	0.02827	0.193634385	53876.40406	-3285300.319	-0.000074	0.00061				
												Σ	4348.53	-8232367.31				
Loop 6	H6/	0.0125	0.128034	335.3	1	1.24E+05	0.002030708	6.33904	0.02469	1.064743874	30346.80014	-1203536.181	-0.003014	0.125020				
	H2/	0.0074	0.035578	335.3	1	3.84E+04	0.002720287	6.10047	0.02687	0.40163312	50361.76457	-2634585.224	-0.003014	7.4E-05				
	H6/	0.0024	-0.06812	548.6	-1	4.52E+04	0.003816371	5.73304	0.03036	0.079458571	-54183.6259	-3977255.866	-0.003014	-0.0018				
	H8/	0.0040	-0.072529	548.6	-1	6.33E+04	0.003581647	5.85618	0.02916	0.20338931	-10193.361	-6370020.239	-0.003014	0.00167				
												Σ	-74063.02	-14790336.12				
Loop 7	H4/	0.0103	0.113259	603.6	1	1.16E+05	0.002295633	6.24325	0.02566	1.35554352	72737.53517	-321167.326	-0.000609	0.112649				
	H3/	0.0161	-0.14171	304.8	-1	1.38E+05	0.001760233	6.45375	0.02401	1.532314259	-21793.718	-737793.391	-0.000609	0.00167				
	H3/	0.0047	-0.082	336.2	-1	7.26E+04	0.003170881	5.34715	0.02827	0.193634385	-53876.4041	-3285300.319	-0.000609	7.4E-05				
													Σ	-2332.59	-7234153.84			
Loop 8	H5/	0.0087	-0.102	853.4	-1	1.08E+05	0.002543046	6.15371	0.02636	1.375752027	-124612.433	-6108518.198	-0.001671	-0.103669				
	H3/	0.0161	0.141708	304.8	1	1.38E+05	0.001760233	6.45375	0.02401	1.532314259	21793.71739	-737793.391	-0.001671	0.00061				
	H8/	0.0040	0.072532	548.6	1	6.33E+04	0.003581647	5.85618	0.02916	0.20338931	10193.3619	-6370020.239	-0.001671	0.00301				
													Σ	-1624.31	-15816269.43			
												Σ	0.001670504					
variables:																		
constants:																		
stopping criterion (stop when result is 0.00)																		
												Inputs:						
												roughness (m)						
												ε=0.00026						
												iteration 1	iteration 2	iteration 3	iteration 4	iteration 5	iteration 6	iteration 7

Слика. Решење оптимизационог проблема са слике 42 модификованом Харди Крос методом (итерација 2)

Наставак примера 22:

Итерација 3

Pipe	$\theta$ (m <sup>1/2</sup> )	D (m)	L (m)	sign (Q)	Re	$\epsilon/D$	$1/\kappa$	$\lambda$	R	R D <sup>4</sup>	-5 P Q <sup>4</sup>	first correction	D (m)
Loop 1													
/N/	0.0557	-0.252223	457.2	-1	2.80E+05	0.001030833	6.39527	0.02079	23.34036076	-23453.368	-464332.7368	0.003213	-0.243010
/N/	0.0480	0.2612316	243.8	1	2.33E+05	0.000995057	6.32785	0.02084	3.470101387	7775.489846	-148789.5358	0.003213	0.264505
/N/	0.0004	0.030196	396.2	1	1.63E+04	0.008610338	5.01683	0.03973	0.001911339	76137.85351	-12607253.87	0.003213	-0.032957
/N/	0.0197	-0.146848	395.3	-1	1.36E+05	0.001770544	6.44638	0.02406	1.614653301	-23645.36339	-805099.1183	0.003213	-0.0032
										36814.61	-14026075.26	-0.003213	-0.146808
Loop 2													
/M/	0.0097	0.117154	762.0	1	1.05E+05	0.002219301	6.25032	0.02560	1.47878992	67007.11482	-2853787.808	0.000452	0.117606
/M/	0.0004	-0.030196	396.2	-1	1.63E+04	0.008610338	5.01683	0.03973	0.001911339	-76137.8535	-12607253.87	0.000452	-0.032957
/M/	0.0053	-0.100546	548.6	-1	6.63E+04	0.002585875	6.06628	0.02717	0.333963173	-33050.5189	-1643547.964	0.000452	-0.105817
										-42181.26	-17110589.65	-0.000452	-0.100546
Loop 3													
/J/	0.0400	-0.206171	304.8	-1	2.46E+05	0.001261087	6.77463	0.02179	8.624812761	-23153.0436	-561500.1939	0.003174	-0.202399
/J/	0.0108	0.1122709	304.8	1	1.22E+05	0.002315827	6.24485	0.02564	0.738856634	41421.32203	-1844704.083	0.003174	0.109722
/J/	0.0157	0.1468475	395.3	1	1.36E+05	0.001770544	6.44638	0.02406	1.614653301	23645.36335	-805099.1183	0.003174	-0.0032
/J/	0.0236	-0.1567723	365.9	-1	1.31E+05	0.001658456	6.54426	0.02335	3.843376283	-40585.0089	-1294393.125	0.003174	-0.153466
										1328.63	-4505636.52	-0.003174	-0.153466
Loop 4													
/I/	0.0150	0.1626456	304.8	1	1.17E+05	0.001598567	6.48604	0.02377	1.316536022	11567.52668	-355605.2045	0.005722	0.168368
/I/	0.0108	-0.112271	304.8	-1	1.22E+05	0.002315827	6.24485	0.02564	0.738856634	-41421.322	-1844704.083	0.005722	-0.109722
/I/	0.0053	0.1005463	548.6	1	6.63E+04	0.002585875	6.06628	0.02717	0.333963173	33050.51889	-1643547.964	0.005722	0.105817
/I/	0.0024	0.081523	548.6	1	3.77E+04	0.003183284	5.80749	0.02965	0.077536467	21543.63567	-1321634.2	0.005722	0.088536
										24746.42	-5165551.45	-0.005722	-0.088536
Loop 5													
/K/	0.0165	-0.141645	365.8	-1	1.47E+05	0.001835569	6.43561	0.02414	1.941888318	-34057.3612	-1202204.5	-0.00133	-0.141778
/K/	0.0074	-0.032639	395.3	-1	1.02E+05	0.002806608	6.08298	0.02703	0.404005756	-53214.7506	-3196011.837	-0.00133	-0.031421
/K/	0.0236	0.1567723	365.9	1	1.31E+05	0.001658456	6.54426	0.02335	3.843376283	40585.00887	-1294393.125	-0.00133	0.153466
/K/	0.0047	0.0825315	396.2	1	7.21E+04	0.003150314	5.95050	0.02824	0.193463186	52092.87834	-3155340.381	-0.00133	0.082516
										-594.22	-8643550.44	-0.00133	-0.082516
Loop 6													
/L/	0.0125	0.1250204	395.3	1	1.27E+05	0.00207966	6.32634	0.02439	1.069022325	35001.10329	-1333915.282	-0.001351	0.123670
/L/	0.0074	0.0326395	395.3	1	1.02E+05	0.002806608	6.08298	0.02703	0.404005756	53214.75061	-3196011.837	-0.001351	0.031421
/L/	0.0024	-0.081523	548.6	-1	3.77E+04	0.003183284	5.80749	0.02965	0.077536467	-21543.6357	-1321634.2	-0.001351	-0.088536
/L/	0.0040	-0.073336	548.6	-1	6.81E+04	0.003516577	5.86602	0.02906	0.203305213	-32020.0823	-6222334.306	-0.001351	-0.074614
										-19353.92	-12140516.23	-0.001351	-0.074614
Loop 7													
/A/	0.0103	0.1126432	609.6	1	1.16E+05	0.002308051	6.24031	0.02568	1.35682234	74796.79489	-3318939.33	-0.000118	0.112531
/A/	0.0161	-0.146647	304.8	-1	1.39E+05	0.00177297	6.45005	0.02404	1.534073241	-22619.6409	-771229.5001	-0.000118	-0.146032
/A/	0.0047	-0.082531	396.2	-1	7.21E+04	0.003150314	5.95050	0.02824	0.193463186	-52092.8789	-3155340.381	-0.000118	-0.082516
										84.28	-7247070.41	-0.000118	-0.082516
Loop 8													
/S/	0.0087	-0.103669	853.4	-1	1.06E+05	0.002507971	6.16868	0.02628	1.371155136	-114597.22	-552519.093	-0.000672	-0.104341
/S/	0.0161	0.1466466	304.8	1	1.39E+05	0.00177297	6.45005	0.02404	1.534073241	22619.64093	-771229.5001	-0.000672	0.146032
/S/	0.0040	0.0733355	548.6	1	6.81E+04	0.003516577	5.86602	0.02906	0.203305213	32020.08287	-6222334.306	-0.000672	0.074614
										82.50	-12519343.50	-0.000672	-0.074614
variables													
constants													
stopping criterion (stop when result is 0.00)													
inputs													
roughness (m)													
$\epsilon=0.00026$													

Слика. Решење оптимизационог проблема са слике 42 модификованом Харди Крос методом (итерација 3)

Наставак примера 22:

Итерација 4

Pipe	Q (m³/s)	D (m)	L (m)	sign (Q)	Rs	e/D	1/n	λ	R	R D <sup>5</sup>	-5 R Q <sup>4</sup>	first correction	D (m)	
Loop 1 /1/	0.0557	-0.2430103	457.2	-1	2.64E+05	0.001044134	6.32630	0.02083	23.38858005	-25056.3005	-503117.8138	0.000643	-0.248367	
/3/	0.0480	0.2645045	243.8	1	2.30E+05	0.00098297	6.93364	0.02080	9.454276235	7302.352188	-138038.3237	0.000643	0.265148	
/10/	0.0004	0.0323572	396.2	1	1.49E+04	0.007883009	5.05065	0.03320	0.001885884	48502.11935	-7358339.861	0.000643	0.033835	
/15/	0.0157	-0.1468062	335.3	-1	1.35E+05	0.001771018	6.44685	0.02406	1.614721571	-23678.0705	-806428.8318	0.000643	-0.146566	
										Σ	7070.10	-5805324.83	-0.000643	
Loop 5 /8/	0.0097	0.1176058	762.0	1	1.04E+05	0.002210776	6.25226	0.02558	1.477868447	65688.99088	-2792762.197	-0.000235	0.117371	
/10/	0.0004	-0.0323572	396.2	-1	1.49E+04	0.007883009	5.05065	0.03320	0.001885884	48502.119	-7358339.861	-0.000235	-0.033835	
/14/	0.0053	-0.1058167	548.6	-1	6.35E+04	0.00245708	6.08721	0.02639	0.337300762	-25424.1775	-1201331.416	-0.000235	-0.106748	
										Σ	-8297.31	-1532433.47	-0.00023514	
Loop 5 /2/	0.0400	-0.2023977	304.8	-1	2.50E+05	0.001280803	6.76588	0.02184	8.647282327	-25085.5607	-617171.8855	0.000400	-0.202597	
/11/	0.0108	0.1037223	304.8	1	1.25E+05	0.002363618	6.23186	0.02575	0.741938673	46654.40145	-2126020.395	0.000400	-0.109427	
/15/	0.0157	0.1468062	335.3	1	1.35E+05	0.001771018	6.44685	0.02406	1.614721571	23678.07052	-806428.8318	0.000400	0.146566	
/17/	0.0236	-0.153466	365.3	-1	1.95E+05	0.001634186	6.53187	0.02344	3.857974818	-45320.8536	-1476576.237	0.000400	-0.153126	
										Σ	-73.95	-5028304.01	-0.000400463	
Loop 4 /7/	0.0150	0.1636378	304.8	1	1.13E+05	0.001544238	6.50053	0.02366	1.310731523	9687.647218	-287632.9595	0.000636	0.163064	
/11/	0.0108	-0.1037223	304.8	-1	1.25E+05	0.002363618	6.23186	0.02575	0.741938673	-46654.4014	-2126020.395	0.000636	-0.109427	
/14/	0.0053	0.1058167	548.6	1	6.35E+04	0.00245708	6.08721	0.02639	0.337300762	25424.17752	-1201331.416	0.000636	0.106748	
/16/	0.0024	0.0888358	548.6	1	3.47E+04	0.002934677	5.83119	0.02341	0.076366321	14100.64295	-735785.2409	0.000636	0.089264	
										Σ	2556.07	-4410850.61	-0.000635395	
Loop 5 /3/	0.0165	-0.1417782	365.8	-1	1.47E+05	0.001833851	6.43611	0.02414	1.94582643	-33892.3415	-1195280.739	0.000060	-0.141718	
/12/	0.0074	0.0914206	335.3	1	1.03E+05	0.002843398	6.07542	0.02709	0.405011725	63423.038	-3468749.473	0.000060	7.2E-05	
/17/	0.0236	0.153466	365.3	1	1.95E+05	0.001634186	6.53187	0.02344	3.857974818	45320.85367	-1476576.237	0.000060	-0.000000	
/19/	0.0047	0.0825164	396.2	1	7.21E+04	0.003150888	5.95041	0.02824	0.19347546	52141.96755	-3153490.162	0.000060	-2E-05	
										Σ	146.85	-9300096.73	0.0000600463	
Loop 6 /6/	0.0125	0.1236638	335.3	1	1.29E+05	0.002102372	6.32045	0.02503	1.07101631	37023.48391	-1496867.913	-0.000072	0.123598	
/12/	0.0074	0.0914206	335.3	1	1.03E+05	0.002843398	6.07542	0.02709	0.405011725	63423.038	-3468749.473	-0.000072	-6E-05	
/16/	0.0024	-0.0888358	548.6	-1	3.47E+04	0.002934677	5.83119	0.02341	0.076366321	-14100.64295	-735785.2409	-0.000072	-0.000000	
/18/	0.0040	-0.0746141	548.6	-1	6.74E+04	0.003484595	5.87086	0.02301	0.202970418	-87766.256	-5881343.452	-0.000072	3E-05	
										Σ	-1420.36	-1642746.08	-0.00007205	
Loop 7 /4/	0.0103	0.1125315	609.6	1	1.17E+05	0.002310464	6.23974	0.02568	1.35707108	75202.46648	-3341396.297	0.000022	0.112554	
/13/	0.0161	-0.1460923	304.8	-1	1.40E+05	0.001779697	6.44810	0.02405	1.535004107	-23066.0326	-783433.5475	0.000022	3E-05	
/19/	0.0047	-0.0825164	396.2	-1	7.21E+04	0.003150888	5.95041	0.02824	0.19347546	-52141.9675	-3153490.162	0.000022	-6E-05	
										Σ	-5.53	-7290320.01	-0.0000221E-05	
Loop 6 /5/	0.0087	-0.1043415	853.4	-1	1.05E+05	0.002491819	6.17221	0.02625	1.370187636	-110788.734	-5308350.303	-0.000030	-0.104372	
/13/	0.0161	0.1460923	304.8	1	1.40E+05	0.001779697	6.44810	0.02405	1.535004107	23066.03261	-783433.5475	-0.000030	-2E-05	
/18/	0.0040	0.0746141	548.6	1	6.74E+04	0.003484595	5.87086	0.02301	0.202970418	87766.25597	-5881343.452	-0.000030	7.2E-05	
										Σ	43.55	-11979727.91	3.01355E-05	
variables														
constants														
stopping criterion (stop when result is 0.00)														
	Inputs													
	roughness (m) =0.00026													
<div style="display: flex; justify-content: space-between; border: 1px solid black; padding: 2px;"> <span>iteration 1</span> <span>iteration 2</span> <span>iteration 3</span> <span style="background-color: #e0e0e0;">iteration 4</span> <span>iteration 5</span> <span>iteration 6</span> <span>iteration 7</span> </div>														

Слика. Решење оптимизационог проблема са слике 42 модификованом Харди Крос методом (итерација 4)



Наставак примера 22:

Итерација 5

Pipe	Q (m³/s)	D (m)	L (m)	sign (°)	Re	e/D	f/W <sup>4</sup>	λ	R	R D <sup>4</sup>	-S R Q <sup>4</sup>	first correction	D (m)
Loop 1													
M1	0.0557	-0.2483612	457.2	-1	2.85E+05	0.001046887	6.32689	0.02084	23.39831956	-25332.7454	-51193.6377	0.000031	
M2	0.0400	0.26318161	243.8	1	2.29E+05	0.000360596	6.33478	0.02079	3.45116461	12115.2221	-135396.3291	0.000031	-0.263179
M3	0.0004	0.033383545	336.2	1	1.45E+04	0.007684249	5.05976	0.03306	0.001879107	42373.26595	-6261667.952	0.000031	1.2E-05
M4	0.0187	-0.1465656	335.3	-1	1.36E+05	0.00117335	6.44601	0.02407	1.615143487	-23880.9435	-814684.639	0.000031	-4E-06
									Σ	311.43	-7723543.24		
											-0.000031		
Loop 2													
M1	0.0091	0.11737086	762.0	1	1.05E+05	0.002215204	6.25125	0.02553	1.47854634	66371.04628	-282742.201	-0.000012	0.117353
M2	0.0004	-0.00330354	336.2	-1	1.45E+04	0.007684249	5.05976	0.03306	0.001879107	42373.266	-6261667.952	-0.000012	-0.00330354
M4	0.0093	-0.1067478	548.6	-1	6.30E+04	0.002435648	6.03061	0.02636	0.336323454	-24307.3183	-1158933.783	-0.000012	6.3E-06
									Σ	-303.54	-10227613.34		
											1.20289E-05		
Loop 3													
M1	0.0400	-0.2025973	304.8	-1	2.51E+05	0.001283334	6.76475	0.02185	8.65011336	-25342.9334	-625451.0423	0.000004	-0.202594
M2	0.0108	0.10942681	304.8	1	1.25E+05	0.002376017	6.23032	0.02576	0.742306166	47311.23384	-216175.477	0.000004	6.3E-06
M3	0.0187	0.14656556	335.3	1	1.36E+05	0.00117335	6.44601	0.02407	1.615143487	23680.9435	-814684.639	0.000004	0.146556
M4	0.0236	-0.1531257	365.9	-1	1.85E+05	0.001637852	6.53057	0.02345	3.853515423	-45845.1031	-1496376.536	0.000004	-0.153124
									Σ	4.15	-5098881.75		
											-3.50675E-06		
Loop 4													
M1	0.0150	0.16306381	304.8	1	1.12E+05	0.001537881	6.50221	0.02365	1.310056218	3484.3844	-280514.3184	-0.000006	0.163057
M2	0.0108	-0.1094268	304.8	-1	1.25E+05	0.002376017	6.23032	0.02576	0.742306166	-47311.2338	-216175.477	-0.000006	-0.109437
M3	0.0053	0.10674778	548.6	1	6.30E+04	0.002435648	6.03061	0.02636	0.336323454	24307.31627	-1158933.783	-0.000006	0.106753
M4	0.0024	0.089393532	548.6	1	3.44E+04	0.002303465	5.83335	0.02339	0.076310132	13435.28367	-755078.2246	-0.000006	0.089354
									Σ	-23.65	-4335908.41		
											6.34375E-06		
Loop 5													
M1	0.0165	-0.1417181	365.8	-1	1.47E+05	0.001834623	6.43588	0.02414	1.341720983	-33367.2815	-1198410.453	0.000001	-0.141717
M2	0.0074	-0.0912888	335.3	-1	1.03E+05	0.002848105	6.01459	0.02710	0.405122367	-63899.787	-3439871.122	0.000001	-0.091290
M3	0.0236	0.15312566	365.9	1	1.85E+05	0.001637852	6.53057	0.02345	3.853515423	45845.10314	-1496376.536	0.000001	0.153124
M4	0.0047	0.0825545	336.2	1	7.21E+04	0.003143435	5.85065	0.02824	0.193459568	52017.70051	-3150506.712	0.000001	0.082555
									Σ	-4.26	-3345764.82		
											-1.43705E-06		
Loop 6													
M1	0.0125	0.1233981	335.3	1	1.23E+05	0.002103532	6.32013	0.02504	1.071124239	37134.78403	-1502239.295	0.000003	0.123601
M2	0.0074	0.09128877	335.3	1	1.03E+05	0.002848105	6.01459	0.02710	0.405122367	-63899.78695	-3439871.122	0.000003	0.091290
M3	0.0024	-0.08939353	548.6	-1	3.44E+04	0.002303465	5.83335	0.02339	0.076310132	-13435.2837	-755078.2246	0.000003	6.3E-06
M4	0.0040	-0.0746557	548.6	-1	6.74E+04	0.003482653	5.87115	0.02301	0.202350121	-87513.1956	-5861117.025	0.000003	-0.074654
									Σ	26.03	-11618305.67		
											-2.38754E-06		
Loop 7													
M1	0.0103	0.1125352	609.6	1	1.17E+05	0.002310012	6.23985	0.02568	1.357024487	75126.34904	-3337361.164	0.000001	0.112554
M2	0.0161	-0.1460401	304.8	-1	1.40E+05	0.001780332	6.44791	0.02405	1.535032119	-23108.5758	-791172.0418	0.000001	-0.146041
M3	0.0047	-0.0825545	336.2	-1	7.21E+04	0.003143435	5.85065	0.02824	0.193459568	-52017.7005	-3150506.712	0.000001	-0.082555
									Σ	0.07	-7273033.92		
											-8.03551E-07		
Loop 8													
M1	0.0087	-0.1043716	853.4	-1	1.06E+05	0.002431039	6.11236	0.02625	1.370117938	-110623.252	-5239430.529	0.000001	-0.104370
M2	0.0161	0.14604014	304.8	1	1.40E+05	0.001780332	6.44791	0.02405	1.535032119	23108.57578	-791172.0418	0.000001	-8E-07
M3	0.0040	0.07465573	548.6	1	6.74E+04	0.003482653	5.87115	0.02301	0.202350121	87513.19559	-5861117.025	0.000001	0.074654
									Σ	-1.48	-1831773.60		
											-1.33477E-06		
Variables													
constants													
stopping criterion (stop when result is 0.00)													
Inputs													
roughness (m)													
ε=0.0009													
iteration 1	iteration 2	iteration 3	iteration 4	iteration 5	iteration 6	iteration 7							

Слика. Решење оптимизационог проблема са слике 42 модификованом Харди Крос методом (итерација 5)



Наставак примера 22:

Итерација 6

Pipe	Q (m³/s)	D (m)	L (m)	sign (G)	Re	$\epsilon/D$	$f_{H, \epsilon}$	$\lambda$	R	RD²	-SRG¹	first correction	D (m)
<b>Loop 1</b>													
/1/	0.0557	-0.248336	457.2	-1	2.85E+05	0.001046368	6.92682	0.02084	23.99878465	-25409.0666	-51585.9373	-0.000001	-0.248337
/3/	0.0480	0.265173	243.8	1	2.29E+05	0.000980471	6.33484	0.02079	3.451017545	7207.532204	-135899.6068	-0.000001	0.265178
/10/	0.0004	0.033978	396.2	1	1.45E+04	0.007674503	5.06018	0.03905	0.00187879	42098.19692	-6213120.793	-0.000001	0.033877
/15/	0.0157	-0.146539	335.3	-1	1.36E+05	0.001174282	6.44531	0.02407	1.615191297	-23304.0131	-81524.3698	-0.000001	-0.146539
										-7.41	0.000001		
<b>Loop 2</b>													
/8/	0.0097	0.117359	762.0	1	1.05E+05	0.002215431	6.25120	0.02559	1.478371483	66406.169	-2829198.379	0.000000	0.117359
/10/	0.0004	-0.033878	396.2	-1	1.45E+04	0.007674503	5.06018	0.03905	0.00187879	-42098.1969	-6213120.793	0.000000	-0.033877
/14/	0.0053	-0.106153	548.6	-1	6.30E+04	0.002435518	6.09063	0.02696	0.33692118	-24300.6829	-113168.378	0.000000	-0.106153
										7.35	-101804.8155		
<b>Loop 3</b>													
/2/	0.0400	-0.202534	304.8	-1	2.51E+05	0.001283356	6.76474	0.02185	8.650196688	-25345.2011	-625511.8343	0.000000	-0.202534
/11/	0.0108	0.109437	304.8	1	1.25E+05	0.002375803	6.23037	0.02576	0.742293882	47289.16846	-2160572.485	0.000000	0.109436
/15/	0.0157	0.146538	335.3	1	1.36E+05	0.001174282	6.44531	0.02407	1.615191297	23904.01312	-815624.3698	0.000000	0.146539
/17/	0.0236	-0.153124	365.9	-1	1.95E+05	0.001637974	6.53056	0.02345	3.85952454	-45848.22	-1437037.96	0.000000	-0.153124
										-0.24	-509682.65		
<b>Loop 4</b>													
/7/	0.0150	0.163057	304.8	1	1.12E+05	0.001537939	6.50219	0.02365	1.310062337	9486.80843	-280579.3915	0.000000	0.163058
/11/	0.0108	-0.109437	304.8	-1	1.25E+05	0.002375803	6.23037	0.02576	0.742293882	-47289.1685	-2160572.485	0.000000	-0.109436
/14/	0.0053	0.106153	548.6	1	6.30E+04	0.002435518	6.09063	0.02696	0.33692118	24300.68288	-113168.378	0.000000	0.106153
/16/	0.0024	0.089354	548.6	1	3.44E+04	0.002909768	5.83332	0.02939	0.07631081	13502.45671	-75558.1246	0.000000	0.089354
										0.78	-4334878.58		
<b>Loop 5</b>													
/3/	0.0165	-0.141717	365.8	-1	1.47E+05	0.001834648	6.43588	0.02414	1.341724437	-33969.136	-1193488.541	0.000000	-0.141717
/12/	0.0074	-0.09129	335.3	-1	1.03E+05	0.002848058	6.07460	0.02710	0.405121114	-63894.3732	-3439517.465	0.000000	-0.091290
/17/	0.0236	0.153124	365.9	1	1.95E+05	0.001637974	6.53056	0.02345	3.85952454	45848.22003	-1437037.96	0.000000	0.153124
/19/	0.0047	0.082855	396.2	1	7.21E+04	0.003143408	5.95065	0.02824	0.199453281	52015.45376	-3150344.764	0.000000	0.082855
										0.17	-9345448.73		
<b>Loop 6</b>													
/6/	0.0125	0.123601	335.3	1	1.29E+05	0.002103541	6.32014	0.02503	1.071119766	37130.14134	-1502015.175	0.000000	0.123601
/12/	0.0074	-0.09129	335.3	-1	1.03E+05	0.002848058	6.07460	0.02710	0.405121114	-63894.37315	-3439517.465	0.000000	-0.091290
/16/	0.0024	-0.089354	548.6	-1	3.44E+04	0.002909768	5.83332	0.02939	0.07631081	-13502.4567	-75558.1246	0.000000	-0.089354
/18/	0.0040	-0.074654	548.6	-1	6.74E+04	0.003482727	5.87114	0.02901	0.202950897	-87522.86665	-5861899.785	0.000000	-0.074654
										-0.81	-11616990.55		
<b>Loop 7</b>													
/4/	0.0103	0.112554	609.6	1	1.17E+05	0.002309996	6.23985	0.02568	1.357022774	75123.55253	-3337121.931	0.000000	0.112554
/13/	0.0161	-0.146041	304.8	-1	1.40E+05	0.001780325	6.44791	0.02405	1.535091131	-23108.0979	-79152.5104	0.000000	-0.146041
/19/	0.0047	-0.082855	396.2	-1	7.21E+04	0.003143408	5.95065	0.02824	0.199453281	-52015.4538	-3150344.764	0.000000	-0.082855
										-0.01	-7278710.20		
<b>Loop 8</b>													
/5/	0.0087	-0.10437	853.4	-1	1.06E+05	0.002491133	6.17236	0.02625	1.370121166	-110630.905	-5293927.352	0.000000	-0.104370
/13/	0.0161	0.146041	304.8	1	1.40E+05	0.001780325	6.44791	0.02405	1.535091131	23108.0979	-79152.5104	0.000000	0.146041
/18/	0.0040	0.074654	548.6	1	6.74E+04	0.003482727	5.87114	0.02901	0.202950897	87522.86645	-5861899.785	0.000000	0.074654
										0.06	-11952970.25		
											3.94664E-08		
variables													
constants													
stopping criterion (stop when result is 0.00)													
Inputs													
roughness (m)													
ε (m) 0.0006													

Слика. Решење оптимизационог проблема са слике 42 модификованом Харди Крос методом (итерација 6)

Наставак примера 22:

Итерација 7

Pipe	Q (m³/s)	D (m)	L (m)	sign (Q)	Re	e/D	1/n	A	R	R D <sup>4</sup>	-5 R Q <sup>4</sup>	first correction	D (m)
Loop 1 / I1	0.057	-0.248337	457.2	-1	2.85E+05	0.001046365	6.32682	0.02084	23.39877335	-25408.6789	-51576.631	0.000000	-0.248337
I51	0.0490	0.2651776	243.8	1	2.23E+05	0.000980474	6.33484	0.02079	8.451021003	7207.635254	-103901.9233	0.000000	0.265178
I101	0.0004	0.0338774	396.2	1	1.45E+04	0.007674737	5.06017	0.03905	0.001878798	42104.71582	-6214280.343	0.000000	8.007E-03
I151	0.0157	-0.146539	335.3	-1	1.36E+05	0.001774274	6.44531	0.02407	1.615190172	-23903.4703	-815602.2573	0.000000	-3.235E-03
										0.20	-7617361.16	0.000000	
Loop 2 / I81	0.0097	0.1173583	762.0	1	1.05E+05	0.002215426	6.25120	0.02559	1.418370884	66405.31288	-2829154.839	0.000000	0.117353
I161	0.0004	-0.033877	396.2	-1	1.45E+04	0.007674737	5.06017	0.03905	0.001878798	-42104.7158	-6214280.343	0.000000	-0.033877
I141	0.0053	-0.106753	548.6	-1	6.30E+04	0.00243552	6.03063	0.02636	0.336921219	-24300.7973	-1138174.783	0.000000	5.7689E-03
										-0.20	-101816.107	0.000000	
Loop 3 / I21	0.0400	-0.202554	304.8	-1	2.51E+05	0.001263356	6.76474	0.02185	8.650196015	-25345.1408	-625516.0602	0.000000	-0.202534
I111	0.0108	0.1034364	304.8	1	1.25E+05	0.00237581	6.23037	0.02576	0.742294242	47289.81407	-2160607.672	0.000000	5.7689E-03
I151	0.0167	0.1465396	335.3	1	1.36E+05	0.001774274	6.44531	0.02407	1.615190172	23903.47029	-815602.2573	0.000000	0.146539
I171	0.0236	-0.153124	365.3	-1	1.95E+05	0.00167974	6.53056	0.02345	3.859524284	-45848.1323	-1497094.541	0.000000	-1.023E-03
										0.01	-5038820.53	0.000000	
Loop 4 / I71	0.0150	0.1630577	304.8	1	1.12E+05	0.001537937	6.50219	0.02365	1.310062149	9486.752342	-280577.403	0.000000	0.163058
I111	0.0108	-0.103436	304.8	-1	1.25E+05	0.00237581	6.23037	0.02576	0.742294242	-47289.8141	-2160607.672	0.000000	-0.103436
I141	0.0053	0.1067534	548.6	1	6.30E+04	0.00243552	6.03063	0.02636	0.336921219	24300.79732	-1138174.783	0.000000	0.106753
I161	0.0024	0.0693545	548.6	1	3.44E+04	0.002909759	5.83332	0.02939	0.076310789	13502.23937	-75543.5706	0.000000	-2.682E-03
										-0.03	-4334303.43	0.000000	
Loop 5 / I31	0.0165	-0.141717	365.8	-1	1.47E+05	0.001834647	6.43588	0.02414	1.941724353	-33969.0907	-1198486.633	0.000000	-0.141717
I121	0.0074	-0.091823	335.3	-1	1.03E+05	0.00284806	6.07460	0.02710	0.40512157	-63894.5593	-3493523.628	0.000000	-0.091820
I171	0.0236	0.1531237	365.3	1	1.95E+05	0.00167974	6.53056	0.02345	3.859524284	45848.13226	-1497094.541	0.000000	0.153124
I191	0.0047	0.0825552	396.2	1	7.21E+04	0.003145409	5.95065	0.02824	0.193453288	52015.5111	-3150348.474	0.000000	0.082555
										-0.01	-9345459.28	0.000000	
Loop 6 / I61	0.0125	0.123601	335.3	1	1.23E+05	0.002103543	6.32014	0.02503	1.071119898	37130.27784	-1502021.765	0.000000	0.123601
I121	0.0074	0.0918202	335.3	1	1.03E+05	0.00284806	6.07460	0.02710	0.40512157	63894.55934	-3493523.628	0.000000	0.091820
I161	0.0024	-0.069354	548.6	-1	3.44E+04	0.002909759	5.83332	0.02939	0.076310789	-13502.2394	75543.5706	0.000000	-0.069354
I181	0.0040	-0.074654	548.6	-1	6.74E+04	0.003482725	5.87114	0.02301	0.202950874	-87522.5727	-5861866.311	0.000000	-0.074654
										0.03	-1161861.27	0.000000	
Loop 7 / I41	0.0103	0.1125543	609.6	1	1.17E+05	0.002309996	6.23985	0.02568	1.357022818	15123.62448	-3337216.745	0.000000	0.112554
I131	0.0161	-0.146041	304.8	-1	1.40E+05	0.001780325	6.44791	0.02405	1.535091163	-23108.1131	-79153.1324	0.000000	-0.146041
I191	0.0047	-0.082555	396.2	-1	7.21E+04	0.003145409	5.95065	0.02824	0.193453288	-52015.5111	-3150348.474	0.000000	-0.082555
										0.00	-1218718.35	0.000000	
Loop 8 / I51	0.0087	-0.10437	853.4	-1	1.06E+05	0.002491132	6.17236	0.02625	1.370121075	-110630.688	-5239915.574	0.000000	-0.104370
I131	0.0161	0.1460407	304.8	1	1.40E+05	0.001780325	6.44791	0.02405	1.535091163	23108.11312	-79153.1324	0.000000	0.146041
I181	0.0040	0.0746542	548.6	1	6.74E+04	0.003482725	5.87114	0.02301	0.202950874	87522.57268	-5861866.311	0.000000	-2.681E-03
										0.00	-11952935.02	0.000000	
variables											-1.16057E-03		
constants													
stopping criterion (stop when result is 0.00)													
Inputs													
roughness (m)													
each 1000000													
iteration 2 iteration 3 iteration 4 iteration 5 iteration 6 iteration 7 iteration 8													

Слика. Решење оптимизационог проблема са слике 42 модификованом Харди Крос методом (итерација 7)



Наставак примера 22:

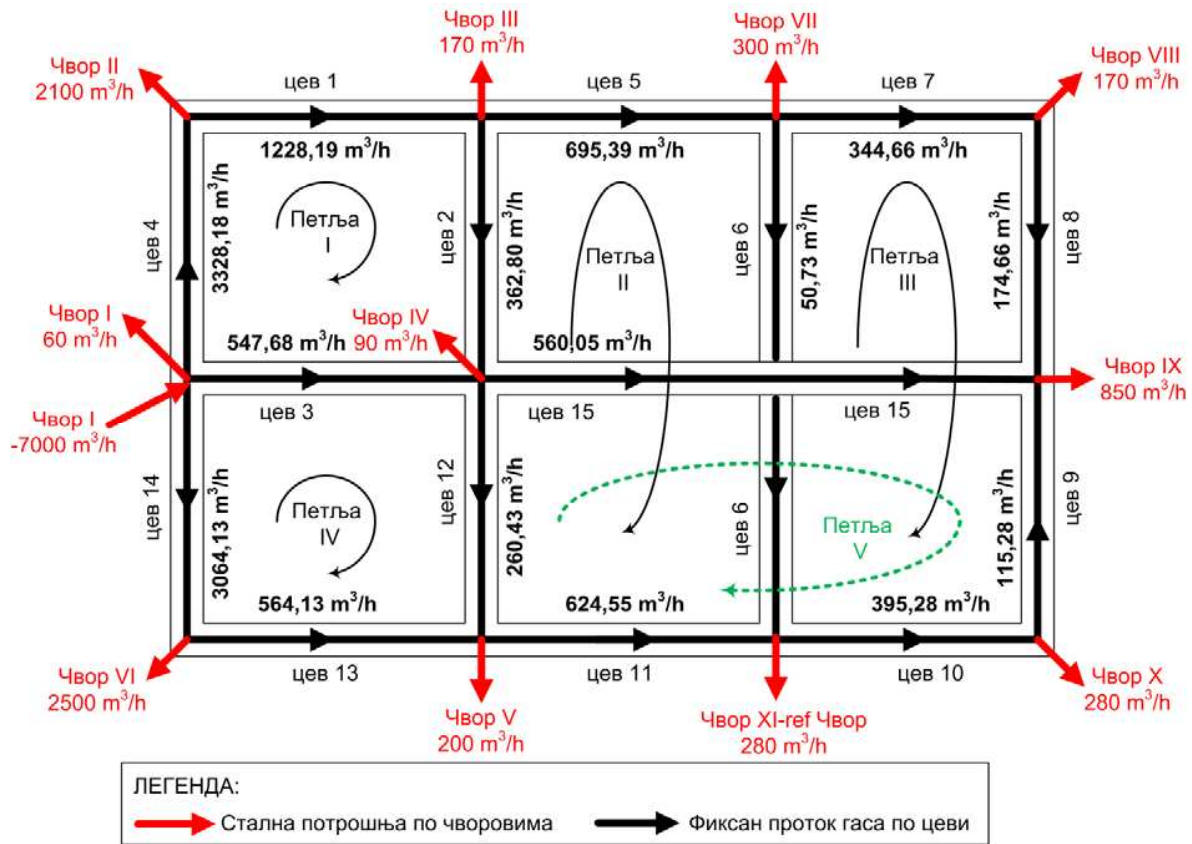
Итерација 9

Loop	Pipe	Q (m³/s)	D (m)	L (m)	z <sub>up</sub> (0)	Re	e/D	f <sub>H</sub>	λ	R	R D <sup>5</sup>	-5 R Q <sup>4</sup>	first correction	D (m)	Final velocity (m/s)	
Loop 1	H1	0.0557	-0.248337	457.2	-1	2.85E+05	0.001046365	6.32682	0.02084	23.39877365	-25408.6833	-51876.8198	0.000000	-0.248337	1.15	
	F31	0.0430	0.2631763	243.8	1	2.23E+05	0.000950474	6.33484	0.02079	3.451021006	7201.832517	-15301.6666	0.000000	-0.263176	0.81	
	H101	0.0004	0.03387741	336.2	1	1.45E+04	0.007674731	5.06017	0.03905	0.001878798	42104.54101	-6214250.116	0.000000	4.1E-12	0.033877	0.43
	H51	0.0157	-0.1465388	335.3	-1	1.36E+05	0.001774275	6.44531	0.02407	1.615190201	-23903.4841	-815602.8207	0.000000	-6E-12	-0.146538	0.83
Σ 0.00													-7617331.68			
Σ 0.000000																
Loop 2	H71	0.0097	0.11735892	762.0	1	1.05E+05	0.002215426	6.25120	0.02553	1.4783703	66405.33563	-262395.396	0.000000	0.117359	0.89	
	H101	0.0004	-0.0338774	336.2	-1	1.45E+04	0.007674731	5.06011	0.03905	0.001878798	-42104.541	-6214250.111	0.000000	-0.033877	0.43	
	H41	0.0053	-0.1067534	548.6	-1	6.30E+04	0.00243552	6.08063	0.02636	0.336321219	-24300.7348	-113374.64	0.000000	2.6E-12	-0.106753	0.59
Σ 0.00													-10181560.75			
Σ 7.11326E-12																
Loop 3	F21	0.0400	-0.2025938	304.8	-1	2.51E+05	0.001283356	6.76474	0.02185	8.650196038	-25345.1423	-625516.1207	0.000000	-0.202594	1.24	
	H111	0.0108	0.10343638	304.8	1	1.25E+05	0.00237581	6.23037	0.02576	0.742234231	47289.73441	-2160606.6	0.000000	0.103436	1.15	
	H151	0.0157	0.14653875	335.3	1	1.36E+05	0.001774275	6.44531	0.02401	1.615190201	23903.48412	-815602.8206	0.000000	0.146538	0.53	
	H171	0.0236	-0.1531237	365.9	-1	1.35E+05	0.001637874	6.53056	0.02345	3.853524293	-45348.1536	-1431034.673	0.000000	-0.153124	1.28	
Σ 0.00													-5038820.21			
Σ -2.50122E-12																
Loop 4	F71	0.0150	0.16305766	304.8	1	1.12E+05	0.001537937	6.50219	0.02365	1.310062154	3486.753952	-280577.4653	0.000000	0.163058	0.67	
	H111	0.0108	-0.1034364	304.8	-1	1.25E+05	0.00237581	6.23037	0.02576	0.742234231	-47289.7344	-2160606.6	0.000000	-0.103436	1.15	
	H141	0.0053	0.10675337	548.6	1	6.30E+04	0.00243552	6.08063	0.02636	0.336321219	24300.73477	-113374.64	0.000000	0.106753	0.59	
	H61	0.0024	0.08335446	548.6	1	3.44E+04	0.002303876	5.83332	0.02393	0.07631079	13502.24587	-75543.3924	0.000000	-4E-12	0.083354	0.59
Σ 0.00													-4334302.70			
Σ 7.26374E-12																
Loop 5	F31	0.0165	-0.1417166	365.8	-1	1.47E+05	0.001836447	6.43588	0.02414	1.341724356	-33963.0913	-1198486.685	0.000000	-0.141717	1.04	
	H121	0.0074	-0.0312302	335.3	-1	1.03E+05	0.00284806	6.07460	0.02710	0.405121156	-63894.5535	-3439529.247	0.000000	-0.031230	1.13	
	H171	0.0236	0.1531237	365.9	1	1.35E+05	0.001637874	6.53056	0.02345	3.853524293	45348.15365	-1431034.673	0.000000	0.153124	1.28	
	H191	0.0047	0.0823557	336.2	1	7.21E+04	0.003145403	5.35065	0.02824	0.193453288	52015.50378	-3150348.378	0.000000	-1E-12	0.082355	0.88
Σ 0.00													-5345458.38			
Σ 5.03335E-13																
Loop 6	F61	0.0125	0.123601	335.3	1	1.23E+05	0.002103543	6.32014	0.02503	1.071119834	37130.2738	-1502021.57	0.000000	0.123601	1.05	
	H121	0.0074	0.03123021	335.3	1	1.03E+05	0.00284806	6.07460	0.02710	0.405121156	63894.55351	-3439529.247	0.000000	0.031230	1.13	
	H161	0.0024	-0.08335445	548.6	-1	3.44E+04	0.002303876	5.83332	0.02393	0.07631079	-13502.2457	-75543.3924	0.000000	7.3E-12	-0.083354	0.59
	H181	0.0040	-0.0746542	548.6	-1	6.74E+04	0.003482725	5.87114	0.02301	0.202350874	-87522.5816	-5861867.025	0.000000	-2E-12	-0.074654	0.51
Σ 0.00													-11618361.83			
Σ -117067E-12																
Loop 7	F41	0.0103	0.11255431	609.6	1	1.17E+05	0.002303936	6.23985	0.02568	1.357022817	75123.62246	-3337216.638	0.000000	0.112554	1.04	
	H131	0.0161	-0.1460407	304.8	-1	1.40E+05	0.001780325	6.44731	0.02405	1.535031162	-23108.1127	-73153.1143	0.000000	-0.146041	0.36	
	H137	0.0047	-0.0823552	336.2	-1	7.21E+04	0.003143403	5.35065	0.02824	0.193453288	-52015.5038	-3150348.378	0.000000	-0.082355	0.88	
Σ 0.00													-1218718.13			
Σ 4.58721E-13																
Loop 8	F51	0.0087	-0.1043702	853.4	-1	1.06E+05	0.002431132	6.17236	0.02625	1.370121077	-110630.694	-5233915.328	0.000000	-0.104370	1.02	
	H137	0.0161	0.14604071	304.8	1	1.40E+05	0.001780325	6.44731	0.02405	1.535031162	23108.11268	-73153.1143	0.000000	0.146041	0.36	
	H187	0.0040	0.07465419	548.6	1	6.74E+04	0.003482725	5.87114	0.02301	0.202350874	87522.58162	-5861867.025	0.000000	-1E-12	0.074654	0.81
Σ 0.00													-11952336.07			
Σ 1.19202E-10																
Variables																
constants																
stopping criterion (stop when result is 0.00)																
Inputs																
roughness (m)																
n																

Слика. Решење оптимизационог проблема са слике 42 модификованом Харди Крос методом (итерација 9)

Пример 23:

Извршити оптимизацију пречника у просторној гасоводној мрежи каква је већ обрађивана, а која се овде поново даје на слици, за оптимизациону брзину од 15 m/s. У претходним разматрањима исте мреже су намерно дати исувише велики пречници. Улазни притисак гаса је  $4 \cdot 10^5$  Pa abs.



Слика. Пример просторне гасоводне мреже – оптимизациони проблем

Табела. Оптимизовани пречници и крајње брзине протока за гасоводну мрежу са слике (модификована Харди Крос метода)

Цев	D (mm)	u (m/s)	Цев	D (mm)	u (m/s)	Цев	D (mm)	u (m/s)
1	95,29	11,96	6	23,38	8,21	11	60,74	14,97
2	50,83	12,41	7	44,61	15,32	12	45,51	11,12
3	52,88	17,32	8	31,62	15,45	13	51,40	18,88
4	150,27	13,03	9	32,21	9,82	14	128,13	16,50
5	69,64	12,68	10	54,41	11,80	15	51,78	18,47

Наставак примера 23:

Итерација 1

Табела. Прорачун мреже са слике по модификованој Харди Крос методи се и то за првих пет итерација (итерација 1)

		Итерација 1							
				Поправке пречника Δ					
*	**	Q (m/s)	L (m)	<sup>a</sup> D <sub>0</sub> (m)	F(D)	F'(D) /(-4,82)	1 (m)	2 (m)	3 (m)
I	1	0.34116	100	+0.08509	+5866228598	68944208981	+0.008113506	-	-
	2	0.10078	100	+0.04624	+12045426810	260471573894	+0.008113506	-0.003880942=	-
	3	0.15213	100	-0.05682	-9447036727	166266376407	+0.008113506	-0.004616219±	-
	4	0.92450	100	+0.14007	+3257789693	23258983022	+0.008113506	-	-
	Σ				+11722408374	518941142304			
II	5	0.19316	100	+0.06402	+8205606712	128164548112	+0.003880942	-	-
	6	0.01409	200	+0.01729	+76906771504	4447506716875	+0.003880942	-0.000927932=	-
	11	0.17349	100	-0.06068	-8742571995	144087293667	+0.003880942	-0.004839216 ±	-
	12	0.07234	100	-0.03918	-14647820114	373855131820	+0.003880942	-0.004616219±	-0.004839216 ±
	2	0.10078	100	-0.04624	-12045426810	260471573894	+0.003880942	-0.004616219±	-
Σ				+49676559296	5354085264368				
III	7	0.09574	100	+0.04507	+12415442427	275445664411	+0.000927932	-	-
	8	0.04852	100	+0.03209	+18540679974	577823962992	+0.000927932	-	-
	9	0.03202	100	-0.02607	-23691170194	908819144474	+0.000927932	-0.004839216 ±	-
	10	0.10980	100	-0.04827	-11451193122	237229669519	+0.000927932	-0.004839216±	-
	6	0.01409	200	-0.01729	-76906771504	4447506716875	+0.000927932	-0.003880942±	-
Σ				-81093012419	6446825158270				
IV	3	0.15213	100	+0.05682	+9447036727	166266376407	+0.004616219	-0.008113506=	-
	12	0.07234	100	+0.03918	+14647820114	373855131820	+0.004616219	-0.003880942=	+0.004839216 ±
	13	0.15670	100	-0.05767	-9283511284	160988384923	+0.004616219	-	-
	14	0.85115	100	-0.13439	-3420618983	25452059775	+0.004616219	-	-
Σ				+11390726575	726561952924				
V	15	0.15557	200	+0.05746	+18646631658	324531867819	-0.004839216	-	-
	9	0.03202	100	-0.02607	-23691170194	908819144474	-0.004839216	+0.000927932=	-
	10	0.10980	100	-0.04827	-11451193122	237229669519	-0.004839216	+0.000927932=	-
	11	0.17349	100	-0.06068	-8742571995	144087293667	-0.004839216	+0.003880942=	-
	12	0.07234	100	-0.03918	-14647820114	373855131820	-0.004839216	+0.003880942=	-0.004616219±
Σ				-39886123768	1988523107300				

-2501296305905	1255472986169	0	801403934281	0				
1255472986169	-25806690974253	21436982375336	1801981735372	-2496482490849				
0	21436982375336	-31073697262862	0	-5523955283446				
801403934281	1801981735372	0	-3502028613095	1801981735372				
0	-2496482490849	-5523955283446	1801981735372	-9584681377184				
-5.01273E-13	-1.09369E-13	-8.42915E-14	-1.45398E-13	4.97309E-14	ΣF1	11722408374	Δ1	-0.00811
-1.09369E-13	-1.82104E-13	-1.47276E-13	-5.60733E-14	1.2177E-13	ΣF2	49676559296	Δ2	-0.00388
-8.42915E-14	-1.47276E-13	-1.55447E-13	-3.23646E-14	1.21865E-13	ΣF3	-81093012419	Δ3	-0.00093
-1.45398E-13	-5.60733E-14	-3.23646E-14	-3.65965E-13	-3.55458E-14	ΣF4	11390726575	Δ4	-0.00462
4.97309E-14	1.21770E-13	1.21865E-13	-3.55458E-14	-2.12967E-13	ΣF5	-39886123768	Δ5	0.004839



Наставак примера 23:

Итерација 2

Табела. Наставак (итерација 2)

Итерација 2									
*	**	Q (m/s)	L (m)	<sup>a</sup> D <sub>u</sub> (m)	F(D)	F'(D) /(-4,82)	<sup>6</sup> Поправке пречника Δ		
							1 (m)	2 (m)	3 (m)
I	1	0.34116	100	+0.09320	+3781836527	40577597320	+0.001722536	-	-
	2	0.10078	100	+0.05048	+7897671245	156460007164	+0.001722536	-0.001008987=	-
	3	0.15213	100	-0.05332	-12831508872	240644649043	+0.001722536	-0.001449028±	-
	4	0.92450	100	+0.14818	+2483406607	16759461902	+0.001722536	-	-
				+1331405507	454441715429				
II	5	0.19316	100	+0.06790	+6179001982	90994881938	+0.001008987	-	-
	6	0.01409	200	+0.02025	+35968951462	1776672762703	+0.001008987	+0.001230265 ̄	-
	11	0.17349	100	-0.06163	-8106571599	131528024312	+0.001008987	-0.000631727 ̄	-
	12	0.07234	100	-0.04475	-7714612216	172374450123	+0.001008987	-0.001449028±	-0.000631727 ̄
	2	0.10078	100	-0.05048	-7897671245	156460007164	+0.001008987	-0.001722536±	-
				+18429098385	2328030126240				
III	7	0.09574	100	+0.04600	+11253959129	244640920267	-0.001230265	-	-
	8	0.04852	100	+0.03302	+16160244696	489481804664	-0.001230265	-	-
	9	0.03202	100	-0.02998	-12076695041	402833602636	-0.001230265	-0.000631727 ̄	-
	10	0.10980	100	-0.05218	-7866033468	150742921638	-0.001230265	-0.000631727 ̄	-
	6	0.01409	200	-0.02025	-35968951462	1776672762703	-0.001230265	-0.001008987±	-
				-28497476146	3064372011907				
IV	3	0.15213	100	+0.05332	+12831508872	240644649043	+0.001449028	-0.001722536=	-
	12	0.07234	100	+0.04475	+7714612216	172374450123	+0.001449028	-0.001008987=	+0.000631727 ̄
	13	0.15670	100	-0.05305	-13879434894	261631765359	+0.001449028	-	-
	14	0.85115	100	-0.12978	-4048272506	31193739452	+0.001449028	-	-
				+2618413688	705844603977				
V	15	0.15557	200	+0.05262	+28495379307	541554019534	-0.000631727	-	-
	9	0.03202	100	-0.02998	-12076695041	402833602636	-0.000631727	-0.001230265 ̄	-
	10	0.10980	100	-0.05218	-7866033468	150742921638	-0.000631727	-0.001230265 ̄	-
	11	0.17349	100	-0.06163	-8106571599	131528024312	-0.000631727	+0.001008987=	-
	12	0.07234	100	-0.04475	-7714612216	172374450123	-0.000631727	+0.001008987=	-0.001449028±
				-7268533017	1399033018243				

-2190409068369	754137234530	0	1159907208385	0				
754137234530	-11221105208477	8563562716226	830844849594	-1464809926778				
0	8563562716226	-14770273097390	0	-2668238846997				
1159907208385	830844849594	0	-3402170991170	830844849594				
0	-1464809926778	-2668238846997	830844849594	-6743339147929				
-6.21537E-13	-1.18537E-13	-7.34043E-14	-2.34525E-13	2.58983E-14	ΣF1	1331405507	Δ1	-0.00172
-1.18537E-13	-2.33094E-13	-1.53666E-13	-7.22984E-14	1.02529E-13	ΣF2	18429098385	Δ2	-0.00101
-7.34043E-14	-1.53666E-13	-1.74434E-13	-3.87102E-14	9.76312E-14	ΣF3	-28497476146	Δ3	0.00123
-2.34525E-13	-7.22984E-14	-3.87102E-14	-3.95879E-13	-1.77542E-14	ΣF4	2618413688	Δ4	-0.00145
2.58983E-14	1.02529E-13	9.76312E-14	-1.77542E-14	-2.11385E-13	ΣF5	-7268533017	Δ5	0.000632

Наставак примера 23:

Итерација 3

Табела. Наставак (итерација 3)

*	**	Q (m/s)	L (m)	<sup>a</sup> D <sub>w</sub> (m)	F(D)	F'(D) /(-4,82)	Итерација 3		
							<sup>b</sup> Поправке пречника Δ		
							1 (m)	2 (m)	3 (m)
I	1	0.34116	100	+0.09492	+3462320903	36475183373	+0.000336669	-	-
	2	0.10078	100	+0.05119	+7381001226	144186086101	+0.000336669	-0.000669531=	-
	3	0.15213	100	-0.05305	-13153543970	247956030333	+0.000336669	-0.000181595±	-
	4	0.92450	100	+0.14990	+2348844555	15669210136	+0.000336669	-	-
				+38622714	444286509944				
II	5	0.19316	100	+0.06891	+5754971837	83509561832	+0.000669531	-	-
	6	0.01409	200	+0.02248	+21693347679	964818957518	+0.000669531	+0.000149988 ±	-
	11	0.17349	100	-0.06126	-8350061496	136312986008	+0.000669531	-0.000196089 ±	-
	12	0.07234	100	-0.04583	-6882967605	150195474576	+0.000669531	-0.000181595±	-0.000196089 ±
	2	0.10078	100	-0.05119	-7381001226	144186086101	+0.000669531	-0.000336669±	-
				+4834289190	1479023066035				
III	7	0.09574	100	+0.04477	+12824789745	286448681144	-0.000149988	-	-
	8	0.04852	100	+0.03178	+19406301860	610554040885	-0.000149988	-	-
	9	0.03202	100	-0.03184	-9032601248	283675146378	-0.000149988	-0.000196089 ±	-
	10	0.10980	100	-0.05404	-6642977465	122918471717	-0.000149988	-0.000196089 ±	-
	6	0.01409	200	-0.02248	-21693347679	964818957518	-0.000149988	-0.000669531±	-
				-5137834787	2268415297641				
IV	3	0.15213	100	+0.05305	+13153543970	247956030333	+0.000181595	-0.000336669=	-
	12	0.07234	100	+0.04583	+6882967605	150195474576	+0.000181595	-0.000669531=	+0.000196089 ±
	13	0.15670	100	-0.05160	-15861523577	307391041445	+0.000181595	-	-
	14	0.85115	100	-0.12833	-4273401822	33300271862	+0.000181595	-	-
				-98413824	738842818216				
V	15	0.15557	200	+0.05199	+30203591289	580993935034	-0.000196089	-	-
	9	0.03202	100	-0.03184	-9032601248	283675146378	-0.000196089	-0.000149988 ±	-
	10	0.10980	100	-0.05404	-6642977465	122918471717	-0.000196089	-0.000149988 ±	-
	11	0.17349	100	-0.06126	-8350061496	136312986008	-0.000196089	+0.000669531=	-
	12	0.07234	100	-0.04583	-6882967605	150195474576	-0.000196089	+0.000669531=	-0.000181595±
				-705016524	1274096013712				

-2141460977928	694976935007	0	1195148066207	0					
694976935007	-7128891178288	4650427375236	723942187456	-1380970780015					
0	4650427375236	-10933761734631	0	-1959781239215					
1195148066207	723942187456	0	-3561222383800	723942187456					
0	-1380970780015	-1959781239215	723942187456	-6141142786093					
-6.40946E-13	-1.28136E-13	-5.79681E-14	-2.37217E-13	1.93493E-14	ΣF1	38622714	Δ1	-0.00034	
-1.28136E-13	-2.61114E-13	-1.27217E-13	-7.77572E-14	9.01487E-14	ΣF2	4834289190	Δ2	-0.00067	
-5.79681E-14	-1.27217E-13	-1.59169E-13	-2.98905E-14	7.58786E-14	ΣF3	-5137834787	Δ3	0.00015	
-2.37217E-13	-7.77572E-14	-2.98905E-14	-3.79828E-13	-1.77515E-14	ΣF4	-98413824	Δ4	-0.00018	
1.93493E-14	9.01487E-14	7.58786E-14	-1.77515E-13	-2.09415E-13	ΣF5	-705016524	Δ5	0.000196	



Наставак примера 23:

Итерација 4

Табела. Наставак (итерација 4)

*	**	Q (m/s)	L (m)	<sup>a</sup> D <sub>u</sub> (m)	F(D)	F'(D) /(-4,82)	Итерација 4		
							<sup>б</sup> Поправке пречника Δ		
							1 (m)	2 (m)	3 (m)
I	1	0.34116	100	+0.09526	+3403736940	35731276682	+0.000032647	-	-
	2	0.10078	100	+0.05086	+7616775135	149765705056	+0.000032647	-0.000057701=	-
	3	0.15213	100	-0.05289	-13340467850	252217015198	+0.000032647	-0.000021414±	-
	4	0.92450	100	0.15024	+2323582737	15465952345	+0.000032647	-	-
				+3626961	453179949281				
II	5	0.19316	100	+0.06958	+5492928910	78940154393	+0.000057701	-	-
	6	0.01409	200	+0.02330	+18255205369	783354399910	+0.000057701	+0.00001453 ±	-
	11	0.17349	100	-0.06078	-8668247407	142609509909	+0.000057701	-0.000010292 ±	-
	12	0.07234	100	-0.04553	-7098220813	155885338528	+0.000057701	-0.000021414±	-0.000010292 ±
	2	0.10078	100	-0.05086	-7616775135	149765705056	+0.000057701	-0.000032647±	-
				+364890924	1310555107796				
III	7	0.09574	100	+0.04462	+13033910484	292098057047	-0.000014530	-	-
	8	0.04852	100	+0.03163	+19853825274	627595409132	-0.000014530	-	-
	9	0.03202	100	-0.03219	-8574008958	266377530589	-0.000014530	-0.000010292 ±	-
	10	0.10980	100	-0.05439	-6441703904	118435780826	-0.000014530	-0.000010292 ±	-
	6	0.01409	200	-0.02330	-18255205369	783354399910	-0.000014530	-0.000057701±	-
					-383182473	2087861177504			
IV	3	0.15213	100	+0.05289	+13340467850	252217015198	+0.000021414	-0.000032647=	-
	12	0.07234	100	+0.04553	+7098220813	155885338528	+0.000021414	-0.000057701=	+0.000010292 ±
	13	0.15670	100	-0.05142	-16133357036	313763295750	+0.000021414	-	-
	14	0.85115	100	-0.12815	-4302669580	33575851630	+0.000021414	-	-
				+2662048	755441501107				
V	15	0.15557	200	+0.05179	+30758796530	593914035315	-0.000010292	-	-
	9	0.03202	100	-0.03219	-8574008958	266377530589	-0.000010292	-0.000014530 ±	-
	10	0.10980	100	-0.05439	-6441703904	118435780826	-0.000010292	-0.000014530 ±	-
	11	0.17349	100	-0.06078	-8668247407	142609509909	-0.000010292	+0.000057701=	-
	12	0.07234	100	-0.04553	-7098220813	155885338528	-0.000010292	+0.000057701=	-0.000021414±
				-23384552	1277222195168				

-2184327355533	721870698368	0	1215686013255	0					
721870698368	-6316875619579	3775768207568	751367331706	-1438745169469					
0	3775768207568	-10063490875570	0	-1854800161018					
1215686013255	751367331706	0	-3641228035334	751367331706					
0	-1438745169469	-1854800161018	751367331706	-6156210980707					
-6.35291E-13	-1.38726E-13	-5.58031E-14	-2.36527E-13	2.0366E-14	ΣF1	3626961	Δ1	-3.3E-05	
-1.38726E-13	-2.77041E-13	-1.20672E-13	-8.47555E-14	9.0759E-14	ΣF2	364890924	Δ2	-5.8E-05	
-5.58031E-14	-1.20672E-13	-1.57971E-13	-2.86114E-14	7.23048E-14	ΣF3	-383182473	Δ3	1.45E-05	
-2.36527E-13	-8.47555E-14	-2.86114E-14	-3.7466E-13	-1.72992E-14	ΣF4	2662048	Δ4	-2.1E-05	
2.0366E-14	9.07590E-14	7.23048E-14	-1.72992E-14	-2.07545E-13	ΣF5	-23384552	Δ5	1.03E-05	

Наставак примера 23:

Итерација 5

Табела. Наставак (итерација 5)

*	**	Q (m/s)	L (m)	<sup>a</sup> D <sub>w</sub> (m)	F(D)	F'(D) /(-4,82)	Итерација 5		
							<sup>b</sup> Поправке пречника Δ		
							1 (m)	2 (m)	3 (m)
I	1	0.34116	100	+0.09529	+3398119866	35660089094	+0.000000213	-	-
	2	0.10078	100	+0.05083	+7634886947	150195821589	+0.000000213	+0.000000383=	-
	3	0.15213	100	-0.05288	-13354132710	252528997937	+0.000000213	+0.000000135±	-
	4	0.92450	100	+0.15027	+2321150551	15446406968	+0.000000213	-	-
				+24653	453831315589				
II	5	0.19316	100	+0.06964	+5471026866	78560249650	+0.000000383	-	-
	6	0.01409	200	+0.02338	+17984917926	769371308197	+0.000000383	+0.000000089 ±	-
	11	0.17349	100	-0.06074	-8700909476	143258602099	+0.000000383	+0.000000076 ±	-
	12	0.07234	100	-0.04551	-7117785316	156404287427	+0.000000383	+0.000000135±	-0.000000076 ±
	2	0.10078	100	-0.05083	-7634886947	150195821589	+0.000000383	+0.000000213±	-
				+2363053	1297790268962				
III	7	0.09574	100	+0.04461	+13054387174	292652249190	-0.000000089	-	-
	8	0.04852	100	+0.03162	+19897838164	629275726035	-0.000000089	-	-
	9	0.03202	100	-0.03221	-8542209647	265185081010	-0.000000089	+0.000000076 ±	-
	10	0.10980	100	-0.05441	-6427552468	118121686875	-0.000000089	+0.000000076 ±	-
	6	0.01409	200	-0.02338	-17984917926	769371308197	-0.000000089	+0.000000383±	-
					-2454704	2074606051308			
IV	3	0.15213	100	+0.05288	+13354132710	252528997937	+0.000000135	+0.000000213=	-
	12	0.07234	100	+0.04551	+7117785316	156404287427	+0.000000135	+0.000000383=	+0.000000076 ±
	13	0.15670	100	-0.05140	-16165781277	314524872451	+0.000000135	-	-
	14	0.85115	100	-0.12813	-4306136784	33608524006	+0.000000135	-	-
				-36	757066681821				
V	15	0.15557	200	+0.05178	+30788277170	594601436506	-0.000000076	-	-
	9	0.03202	100	-0.03221	-8542209647	265185081010	-0.000000076	+0.000000089 ±	-
	10	0.10980	100	-0.05441	-6427552468	118121686875	-0.000000076	+0.000000089 ±	-
	11	0.17349	100	-0.06074	-8700909476	143258602099	-0.000000076	+0.000000383=	-
	12	0.07234	100	-0.04551	-7117785316	156404287427	-0.000000076	+0.000000383=	-0.000000135±
				-179738	1277571093917				

-2187466941139	723943860061	0	1217189770055	0					
723943860061	-6255349096397	3708369705510	753868665398	-1444375127515					
0	3708369705510	-9999601167304	0	-1847538621208					
1217189770055	753868665398	0	-3649061406376	753868665398					
0	-1444375127515	-1847538621208	753868665398	-6157892672681					
-6.34906E-13	-1.39644E-13	-5.55726E-14	-2.36398E-13	2.04873E-14	ΣF1	24653	Δ1	-2.1E-07	
-1.39644E-13	-2.78476E-13	-1.20067E-13	-8.53329E-14	9.08952E-14	ΣF2	2363053	Δ2	-3.8E-07	
-5.55726E-14	-1.20067E-13	-1.5784E-13	-2.84601E-14	7.20349E-14	ΣF3	-2454704	Δ3	8.94E-08	
-2.36398E-13	-8.53329E-14	-2.84601E-14	-3.74088E-13	-1.72428E-14	ΣF4	-36	Δ4	-1.3E-07	
2.04873E-14	9.08952E-14	7.20349E-14	-1.72428E-14	-2.07437E-13	ΣF5	-179738	Δ5	7.58E-08	

Наставак примера 23:

*Објашњења уз табелу*

*\*-означава контуру,*

*\*\*-означава цев*

*<sup>a</sup> плус уколико се смер протока поклопи са замишљеним смером обиласка контуре*

*<sup>b</sup>  $\Delta_1$  додаје се са супротним алгебарским знаком од прорачунатог,  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  се додају према правилима приказаним у табели 5*

*<sup>c</sup> промена смера протока*



Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Изјављујем да је докторска дисертација под насловом

ЕФИКАСНОСТ ДИСТРИБУЦИЈЕ И КОРИШЋЕЊА ПРИРОДНОГ ГАСА У  
ДОМАЋИНСТВИМА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис

У Београду, 23.05.2014.



Прилог 2.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

ЕФИКАСНОСТ ДИСТРИБУЦИЈЕ И КОРИШЋЕЊА ПРИРОДНОГ ГАСА У ДОМАЋИНСТВИМА

која је моје ауторско дело.

Сагласан/на сам да електронска верзија моје дисертације буде доступна у отвореном приступу.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

### 1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци. Кратак опис лиценци дат је на следећој страници.)

Потпис



У Београду, 23.05.2014