

Matematička fizika

Dragoslav Kuzmanović, Aleksandar Sedmak, Dobrica Nikolić, Ivan Obradović, Mihailo Lazarević, Nikola Mladenović



Дигитални репозиторијум Рударско-геолошког факултета Универзитета у Београду

[ДР РГФ]

Matematička fizika | Dragoslav Kuzmanović, Aleksandar Sedmak, Dobrica Nikolić, Ivan Obradović, Mihailo Lazarević, Nikola Mladenović | | 2021 | |

<http://dr.rgf.bg.ac.rs/s/repo/item/0006096>

Дигитални репозиторијум Рударско-геолошког факултета Универзитета у Београду омогућава приступ издањима Факултета и радовима запослених доступним у слободном приступу. - Претрага репозиторијума доступна је на www.dr.rgf.bg.ac.rs

The Digital repository of The University of Belgrade Faculty of Mining and Geology archives faculty publications available in open access, as well as the employees' publications. - The Repository is available at: www.dr.rgf.bg.ac.rs

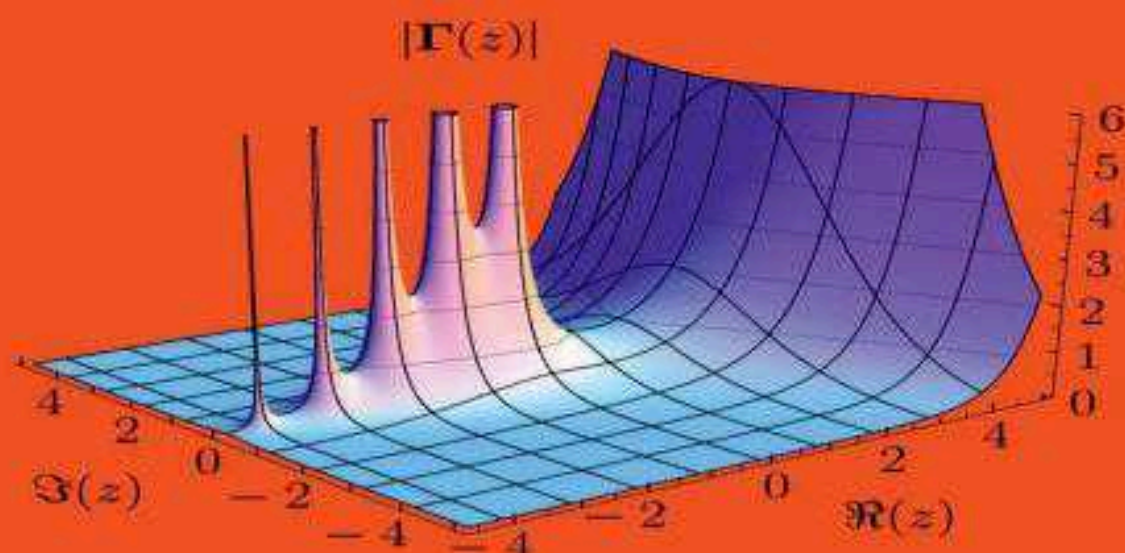


D. Kuzmanović, A. Sedmak, D. Nikolić,
I. Obradović, M. Lazarević, N. Mladenović

Matematička fizika

teorija i zadaci

Drugo, prerađeno i dopunjeno izdanje



Univerzitet u Beogradu,
Rudarsko-geološki fakultet

2021

**Univerzitet u Beogradu
Rudarsko-geološki fakultet**

**Dragoslav Kuzmanović, Aleksandar Sedmak,
Dobrica Nikolić, Ivan Obradović,
Mihailo Lazarević, Nikola Mladenović**

Matematička fizika

II izdanje

Beograd 2021.

D. Kuzmanović, A. Sedmak, D. Nikolić, I. Obradović, M. Lazarević, N. Mladenović
Matematička fizika
II izdanje

Recenzenti:

prof. dr Teodor Atanacković
prof. dr Vesna Damnjanović

Izdavač:

Univerzitet u Beogradu – Rudarsko-geološki fakultet,
Đušina 7, Beograd,

Za izdavača:

prof. dr Zoran Gligorić, dekan.

Urednik:

prof. dr Ivana Vasiljević

Lektor:

Jovanka Cvetković

Korice:

Nenad Pantić

Grafička priprema:

Dobrica Nikolić, Nikola Živković

Priprema u L^AT_EX-u:

Dragoslav Kuzmanović

Štampa:

"BeoTeleProm", Beograd

Tiraž:

150 primeraka

ISBN 978-86-7352-367-5

Odobreno za štampu od strane Nastavno-naučnog veća Rudarsko-geološkog fakulteta
Univerziteta u Beogradu odlukom br. 8/10 od 22.02.2021. godine.

Sva prava zadržavaju autori.

Sadržaj

I	Vektori	
1	Vektorska algebra	3
1.1	Uvod - O skalarima, vektorima i tenzorima	3
1.2	Koordinatni sistem	4
1.3	Vektorska algebra	6
1.4	Operacije sa vektorima	6
1.4.1	Sabiranje vektora	6
1.4.2	Množenje vektora realnim brojem (skalarom)	10
1.4.3	Projekcija na osu i na ravan	11
1.4.4	Skalarni (unutrašnji) proizvod dva vektora	13
1.4.5	Vektorski (spoljašnji) proizvod dva vektora	15
1.4.6	Recipročni (konjugovani) sistem vektora	18
1.4.7	Linearna zavisnost vektora. Dimenzija prostora	18
1.5	Aritmetički model linearnog vektorskog prostora	25
1.6	Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije	28

2	Vektorska analiza	33
2.1	Vektorska analiza	33
2.1.1	Vektorska funkcija	33
2.1.2	Hodograf vektorske funkcije	34
2.1.3	Granični procesi. Nепrekidnost	34
2.1.4	Izvod vektorske funkcije jedne skalarne promenljive	36
2.1.5	Svojstva izvoda	37
2.1.6	Diferencijal vektorske funkcije	38
2.1.7	Izvodi i diferencijali višeg reda	39
2.1.8	Parcijalni izvod vektorske funkcije više nezavisno promenljivih ..	39
2.1.9	Diferencijal vektorske funkcije n skalarnih promenljivih	40
2.2	Integracija	41
2.2.1	Neodređeni integral vektorske funkcije	41
2.2.2	Određeni integral	42
2.2.3	Krivolinijski integral vektorske funkcije	43
2.2.4	Površinski integral	46
3	Zadaci	51
3.1	Vektorska algebra	51
3.2	Vektorska analiza	69

II

Teorija polja

4	Teorija polja	79
4.1	Skalarno polje	79
4.1.1	Izvod funkcije u pravcu. Gradijent	80
4.1.2	Parcijalni gradijent skalarne funkcije	87
4.1.3	Svojstva gradijenta	87
4.1.4	Nabla operator ili Hamiltonov operator	89
4.1.5	Laplasov ili delta operator	89
4.2	Vektorsko polje	90
4.2.1	Vektorska funkcija. Vektorsko polje	90
4.2.2	Divergencija i rotor	92
4.2.3	Klasifikacija vektorskih polja	94
4.2.4	Potencijal	95
4.2.5	Primeri potencijalnih polja	96
4.2.6	Kratak pregled uvedenih pojmova	101
4.2.7	Prostorno diferenciranje	103
4.2.8	Integralne teoreme	106

4.3	Primeri nekih polja	107
4.4	Generalisane koordinate	113
4.4.1	Element luka i zapremine	117
4.4.2	Gradijent, divergencija, rotor i Laplasijan izraženi preko generalisanih koordinata	120
4.5	Posebni koordinatni sistemi	121
5	Zadaci	127
5.1	Gradijent	127
5.2	Divergencija	136
5.3	Rotor	142
5.4	Mešoviti problemi	151
5.5	Invarijanta	159
5.6	Integrali, integralne teoreme	165
5.7	Razni zadaci	202
5.8	Generalisani ortogonalni sistemi	205
5.8.1	Krivolinijske koordinate	205
5.8.17	Gradijent, divergencija i rotor u generalisanim koordinatama	218
5.8.26	Površni u ortogonalnim generalisanim koordinatama	225
5.8.29	Generalisani sistemi	227
5.8.33	Raznovrsni problemi	232

III

Diferencijalne jednačine

6	Diferencijalne jednačine. Specijalne funkcije	241
6.1	Funkcionalni redovi. Potencijalni redovi	241
6.2	Rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću redova	245
6.2.1	Korišćenje potencijalnog reda, pri rešavanju dif. jednačina	246
6.3	Ležandrova: jednačina, funkcija, polinomi	247
6.4	Beselova jednačina. Beselove funkcije	251
6.4.1	Beselova jednačina	253
6.4.2	Veberove funkcije	262
6.5	Neke druge specijalne funkcije	263
6.5.1	Hermitovi polinomi	264
6.5.2	Lagerovi polinomi	265

6.6	Specijalne funkcije koje nisu posledica Frobeniusove metode	265
6.6.1	Gama funkcija (faktorijel funkcija)	265
6.6.2	Beta funkcija	273
6.6.3	Funkcija greške	275
6.6.4	Eksponencijalni integral	276
6.7	Mitag-Lefflerove funkcije	277
6.8	Eliptički integrali	279
6.8.1	Neka svojstva integrala $F(\varphi, k)$	281
6.8.2	Eliptičke funkcije	282
6.8.3	Potpuni eliptički integrali prve i druge vrste	283
6.8.4	Jakobijeve eliptičke funkcije	283
6.8.5	Osnovna svojstva eliptičke funkcije	284
6.9	Ortogonalne i normirane funkcije	287
6.9.1	Redovi ortogonalnih funkcija	289
6.9.2	Kompletnost ortonormiranih funkcija	289
6.9.3	Šturm-Liuvilov problem	290
6.10	Zadaci	295

IV Furijeov red i integral

7	Furijeov red i integral	337
7.1	Periodične funkcije	337
7.1.1	Svojstva periodičnih funkcija	338
7.1.2	Proširenje neperiodičnih funkcija	339
7.1.3	Zbir (superpozicija) harmonika	339
7.2	Osnovna teorema o konvergenciji Furijeovog reda	341
7.2.1	Razvijanje u Furijeov red parnih i neparnih funkcija	343
7.2.2	Razvijanje funkcija u Furijeov red, na intervalu $(-\pi, \pi)$	345
7.2.3	Razvijanje funkcija u Furijeov red, na intervalu $(0, \ell)$	346
7.2.4	Aproksimacija funkcije trigonometrijskim polinomom	349
7.2.5	Kompleksan oblik Furijeovog reda	353
7.2.6	Furijeov integral	354
7.3	Zadaci	356

V	PDJ	
8	Parcijalne diferencijalne jednačine	367
8.1	Definicije i oznake	368
8.2	Formiranje parcijalnih diferencijalnih jednačina	370
8.3	Linearne i kvazilinearne PDJ prvog reda	377
8.3.1	O rešenjima PDJ	377
8.3.2	Opšta metoda za integraciju LPJ prvog reda. Prvi integral	378
8.3.3	Simetričan oblik sistema ODJ	380
8.3.4	Opšte rešenje linearne homogene PJ prvog reda	380
8.3.5	Opšte rešenje linearne nehomogene PJ prvog reda	381
8.3.6	Pfavofova jednačina	383
8.3.7	Nelinearne PDJ prvog reda. Lagranž-Šarpijev metod	386
8.4	Linearne PDJ drugog reda	392
8.4.1	Neka svojstva homogenih LPJ drugog reda	393
8.4.2	Klasifikacija LPJ drugog reda sa dve promenljive	395
8.4.3	Svođenje na kanonski oblik	397
8.4.4	Primeri klasifikacije nekih jednačina matematičke fizike	400
8.5	Jedan formalan postupak za rešavanje LDJ	401
8.6	Metoda razdvajanja promenljivih	402
8.7	Grinove formule	409
8.8	Zadaci	422
8.8.35	Dodatak	477

VI	Frakcioni račun	
9	Račun necelobrojnog reda	481
9.1	Uvod	481
9.2	Račun necelobrojnog reda	482
9.2.1	Račun celobrojnog reda-(klasični integralni račun)	482
9.2.2	Račun necelobrojnog reda prema definiciji Riman-Liuvila	485
9.2.3	Račun necelobrojnog reda prema definiciji Kaputa	491
9.2.4	Račun necelobrojnog reda prema definiciji Grunvald-Letnikova	492
9.2.5	Ostala svojstva operatora necelobrojnog reda: Riman-Liuvilov, Kaputov, Grunvald-Letnikov	494
9.2.6	Diferencijalne jednačine necelobrojnog reda	504

Predgovor

Ovaj udžbenik je doraden udžbenika "Matematička fizika", pa se može shvatiti kao njeno II izdanje. Naime, dodali smo nova poglavlja: "Frakcioni izvodi" (M. Lazarević) i, u numeričkom delu, "Zapreminski elementi" (N. Mladenović). Pored ovog, izvršene su manje izmene u nekim delovima knjige (dodat Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije, proširen deo o Eliptičkim integralima, dotate neke specijalne funkcije, ...). Dodati su i novi zadaci, za koje smatramo da bi bili zanimljivi studentima Geofizike. Takođe su ispravljene i uočene greške i prerađene neke slike.

Navodimo predgovore prethodnih izdanja, da se ne zaborave svi oni koji su doprineli kvalitetu knjige kroz ove tri faze.

Veliku zahvalnost dugujemo prof. Teodoru Atanackoviću, redovnom članu SANU, i prof. Vesni Damjanović, koji su izvršili recenziju ove knjige i dali veoma korisne sugestije.

Posebnu zahvalnost dugujemo gospodinu Milošu Matijašu, koji je još jednom pokazao nesebičnost i pomogao štampanje ove knjige.

Svesni da do grešaka i propusta nema knjige, naravno nenamerno, bićemo zahvalni svakom koji nam na njih ukaže. Podrazumeva se da je moja odgovornost ipak najveća.

U Beogradu, marta 2021. god.

D. Kuzmanović

Predgovor udžbenika "Matematička fizika" - I izdanje

Udžbenik "Matematička fizika" nastao je na osnovu udžbenika "Metode matematičke fizike" dodavanjem poglavlja o **parcijalnim jednačinama prvog reda**. Upotpunjen je i velikim brojem zadataka, kako bi se lakše razumela izložena teorija.

Ova dorada dovela je do promene u sastavu grupe autora. Treba istaknuti da su oni delovi knjige "Metode matematičke fizike", autora koji su učestvovali u pripremi ovog izdanja, malo izmenjeni u želji da tekst bude jasniji i čitljiviji.

Sa posebnim zadovoljstvom ističem nesebičnu pomoć prof. Jova Jarića, koji je pročitao većinu zadataka, a čije su primedbe uticale na njihovu bolju formulaciju, kao i na neka elegantnija rešenja. Njegove primedbe i sugestije su uticale i na izmene prvobitnog teksta.

Zahvalnost dugujemo i studentima Goranu Runjevcu i Jeleni Ninkov, koji su ukazali na greške u nekim od zadataka.

Stoga navodimo predgovor knjige "Metode matematičke fizike", pri čemu smo u tom tekstu promenili samo imena ljudi koji su se angažovali oko ove knjige.

Predgovor udžbenika "Metode matematičke fizike"

Kako je i zašto nastala ova knjiga?

Materijal između ovih korica nastao je kao želja da se predavanja koja sam držao studentima Geofizike, Rudarsko-geološkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, u periodu od 1991. do 1995. godine, pretoče u udžbenik.

Knjiga nije standardnog tipa ni po sadržaju ni po stilu. Sva poglavlja pojedinačno su obrađena i u drugim knjigama na našem jeziku, ali koliko je meni poznato, u nas ne postoji još neka knjiga sa ovakvim sadržajem.

Uobičajen naslov za ovakav sadržaj je "Jednačine matematičke fizike". Međutim, ova materija predaje se pod nazivom "Metode matematičke fizike", pa je on uzet i za naslov knjige.

Mnoštvo je knjiga sa istim naslovom u stranoj literaturi, iako one nemaju isti sadržaj. Zajedničko za sve su uglavnom Teorija polja i Parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda.

Što se stila tiče, želja autora bila je da se svi pojmovi matematički korektno definišu, ali gde god su izvođenja i dokazi teorema i stavova bili složeniji čitaoce smo upućivali na knjige u kojima su oni dati. Nismo želeli da opterećujemo one čitaoce koji bi želeli samo da primene odgovarajuće rezultate ili teoreme.

O poglavljima

Poglavlje 1. je podsećanje na pojmove iz više matematike koji se koriste u daljem tekstu. Poglavlja 2, 3, 4, 5. napisana su prema planu i programu predmeta "Metode matematičke fizike" koji slušaju studenti Geofizike, Rudarsko-geološkog fakulteta, kojima je ovaj udžbenik i namenjen.

Ova poglavlja obradili smo Ivan Obradović i ja, dok sam zadatke pripremio i uradio sa Dobricom Nikolićem.

Poslednje 6. poglavlje prirodan je nastavak 5-tog poglavlja. Naime, sve je više praktičnih problema koji se svode na parcijalne diferencijalne jednačine čija rešenja ne mogu da se dobiju u zatvorenom obliku. Njihova rešenja nalazimo primenom numeričkih metoda, pa su ona, zadnjih decenija, njihov neodvojiv deo. Ovo poglavlje obradio je Aleksandar Sedmak.

Oblasti obrađene u ovoj knjizi izučavaju se na tehničkim fakultetima, i na fakultetima prirodnih nauka. Nadamo se da ovaj udžbenik može da bude od koristi kako studentima tih fakulteta tako i stručnjacima iz prakse.

Kvalitetu knjige doprineli su

Prof. Jovo Jarić pročitao je pojedine delove teksta i dao je korisne primedbe i sugestije. Već smo napomenuli da je pomogao i pri formulaciji zadataka i nekim rešenjima. Međutim, ne treba zaboraviti ni prof. Miloša Miličića, prof. Predraga Cvetkovića i prof. Aleksandra Stojanovića, čije su sugestije i saveti bili od koristi u prethodnoj knjizi, a čije delove nismo menjali.

Prof. Velimir Simonović, prof. Aleksandar Ivić, redovni član SANU, prof. Branislav Glavatović i prof. Arpad Takači, koji su izvršili recenziju ove knjige i dali korisne sugestije.

Gospođe Jovanka Cvetković i Ljiljana Kuzmanović, izvršile su korekturu teksta.

Gospođa Jelena Knežević i gospođice Ivana Vasiljević i Aleksandra Tomašević, uradile su grafičku obradu. Gospodin Nenad Pantić je pomogao oko izrade korica.

Svima njima autori duguju zahvalnost.

Raduje nas postojanje ljudi privrženih nauci bez čije finansijske pomoći mnoge knjige ne bi ugledale svetlost dana. Jedan od tih je i gospodin Miloš Matijaš, direktor firme "BeoTeleProm", koji je u više navrata pomogao autoru ovih redova, kome se toplo zahvaljujemo.

Svesni da do grešaka i propusta uvek dolazi, naravno nenamerno, bićemo zahvalni svakom koji nam na njih ukaže. Podrazumeva se da je moja odgovornost ipak najveća.

U Beogradu, novembra 2003. god.

D. Kuzmanović

CIP - Каталогизacija u publikaciji
Nародна библиотека Србије, Београд

51-73:53(075.8)

MATEMATIČKA fizika : teorija i zadaci / D. [Dragoslav] Kuzmanović ...
[et al.] - Beograd: Univerzitet, Rudarsko-geološki fakultet, 2021
(Beograd : BeoTeleProm). - 687 str. : graf. prikazi, tabele ; 24 cm

Tiraž 150. - Bibliografija: str. 677-682. - Registar.

ISBN 978-86-7352-367-5

1. Кузмановић, Драгослав, 1949- [autor]

a) Математика физика

COBISS.SR-ID 34067209
